F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 1

IANUARIE — MARTIE

1962

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

БЮЛЛЕТЕНЬ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА БУХАРЕСТА

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec lamention „pentru Buletinul Institutului")

MŰSZAKI KÖNYVTÁRÉS KÖZPONT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 1

IANUARIE — MARTIE

1962

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Prof. *M. Bercovici*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Prof. Dr. *D. Dumitrescu*, membru corespondent al Acad. R.P.R.; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Conf. *Gh. Hagymaș*, cand. St. Th; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Conf. *C. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

C. IONESCU-BUJOR — Asupra unor transformări optice (II) 13

M. TÎRNOVEANU — Despre nilpotență și radical . . 27

A. TĂNĂSESCU — The construction of a perspectograph based on the principle of Brunellesky . . . 37

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. BLUM, D. IONESCU, FR. BARCA, A. ȘTEFĂNESCU — Influența conținutului de cenușă din cărbune asupra caracteristicilor brichetelor de cărbune cu liant 43

L. BLUM LAZĂR — Obținerea electrochimică a naftenatului de cobalt 59

E. RUCKENSTEIN, O. SMIGELSCHI — On the thermal theory of mass transfer in rectification of mixtures 67

I. TEOREANU — Unele considerații cu privire la structura stratului fludizat 77

E. RUCKENSTEIN, I. TEOREANU — Remarks on the mixing in a fixed or fluidised bed 101

V. PARAUSANU, F. DANES — Influența reacției chimice asupra vitezei de difuzie în schimbători de ioni 113

REZISTENȚA MATERIALELOR

GH. BUZDUGAN, ST. MANTEA, C. POPOVICI, M. BLUMENFELD, A. ALOMAN, E. DUMITRESCU — Studiu asupra cauzelor ruperii și posibilităților de remediere a unor prăjini de foraj 129

M. BLUMENFELD — Calculul deformațiilor grinzilor drepte 147

ELECTROTEHNICA

A. MILEA — O metodă generală pentru calculul rezistenței în curent alternativ a conductoarelor de secțiune oarecare 163

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

К. ИОНЕСУКУ-БУЖОР — О некоторых оптическик преобразованиях (II) 13
М. ТЫРНОВЯНУ—О нильпотенности и радикальности 27
А. ТЭНЭСЕСКУ — Построение Перспектографа по принципу Брунеллески 37

ТЕХНОЛОГИЯ КИМИКИ

И. БЛУМ, Д. ИОНЕСКУ, Фр. БАРКА, А. ШТЕФАНЕСКУ — Влияние зольности, имеющейся в угле на качественные характеристики, брикетов со связующем 43
Л. БЛУМ ЛАЗАР — Электролитическое получение нафтената кобавьта. 59
Э. РУКЕНШТЕЙН, О. ШМИГЕЛЬСКИ — К вопросу о термической теории массопередачи при ректификации смесей 67
И. ТЕОРЯНУ — Некоторые соображения относительно структуры кипящего слоя 77
Э. РУКЕШТЕЙН, И. ТЕОРЯНУ — Замечания относительно-перемешивания в неподвижности или в кипящем слое 101
В. ПЫРЭУШАНУ, Ф. ДАНЕШ — Влияние химической реакции на скорость диффузии в ионообщенных веществах 113

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Г. БУЗДУГАН, Шт. МАНТЯ, К. ПОПОВИЧ, М. БЛУМЕНФЕЛЬД, А. АЛОМАН, Э. ДУМИТРЕСКУ — Исследование причин положки и возможностей исправления некоторых бурильных труб. . . 129

М. ВЛУМЕНФЕЛЬД — Расчет деформации прямых брусьев методом трех неизвестных . . . 147

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. МИЛИЯ — Общай метод расчета сопротивления при переменном токе токопроводов любого сечения 163

CONTENTS

MATEMATICS

C. IONESCU-BUJOR — Optic transformations (II) . 13

M. TÎRNOVEANU — About nilpotence and radical . . 27

A. TĂNĂSESCU — The construction of a perspectograph based on the principle of Brunellesky . . . 37

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. BLUM, D. IONESCU, FR. BARCA, A. ȘTEFĂNESCU — Influence of the contents of ashes in coal on the characteristics of briquettes using a binder . . . 43

L. BLUM LAZĂR — The electrochemical obtainment of cobalt naphthenate 59

E. RUCKENSTEIN, O. SMIGELSCHI — On the thermal theory of mass transfer in rectification of mixtures . 67

I. TEOREANU — Considerations on the structure of the fluidized bed 77

E. RUCKENSTEIN, I. TEOREANU — Remarks on the mixing in a fixed or fluidised bed 101

V. PARAUSANU, F. DANES — The influence of the chemical reaction upon the rate of diffusion in ionexchangers 113

STRENGTH OF MATERIALS

GH. BUZDUGAN, ST. MANTEA, C. POPOVICI, M. BLUMENFELD, A. ALOMAN, E. DUMITRESCU — A study on the causes of breaking of some drill-pipes and the remedyng possibilities 129

M. BLUMENFELD — The calculation of the right beam deflections, by the three unknwns method . . . 147

ELECTRICITY

A. MILEA — A general method for calculating the alternative current resistance of conductors having arbitrary cross section 163

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

C. IONESCU-BUJOR — Sur les transformations optiques (II) 13

M. TIRNOVEANU — Sur la nilpotence et le radical . 27

A. TĂNĂSESCU — La construction d'un perspectograph basé sur le principe de Brunelleschy 37

CHIMIE TECHNOLOGIQUES

I. BLUM, D. IONESCU, FR. BARCA, A. ȘTEFĂNESCU— Influences du contenu en cendres du charbon sur les caractéristiques des briquettes à liant . . . 43

L. BLUM LAZĂR — L'obtention électrochimique du naphthénate de cobalt 59

E. RUCKENSTEIN, O. SMIGELSCHI — Sur la théorie thérmique du transfert de masse dans la rectification des mélanges 67

I. TEOREANU — Considérations sur la structure des chouches fluidisées 77

E. RUCKENSTEIN, I. TEOREANU — Observations sur le melangeage dans une couche fixe ou fludisée . . 101

V. PARAUSANU, F. DANES — L'influence de la réaction chimique sur la vitésse de diffusion dans les échangeurs d'ions 113

RÉSISTANCES DES MATÉRIAUX

GH. BUZDUGAN, ST. MANTEA, C. POPOVICI, M. BLUMENFELD, A. ALOMAN, E. DUMITREȘCU — Étude sur les causes de rupture des tiges des forage et les possibilités d'y remédier 129

M. BLUMENFELD — Le calcul des déformations des poutres, par la méthode des trois inconnues . . 147

ELECTROTECHNIQUE

A. MILEA — Une méthode générale pour le calcul de la résistance en courant alternatif des conducteurs à section quelconque 163

INHALT

MATHEMATIK

C. IONESCU-BUJOR — Optische Transformationen (II) 13

M. TÎRNOVEANU — Über Nilpotenz und Radical . . 27

A. TĂNĂSESCU — Die Konstruktion eines Perspecktographen auf grund des Prinzipes von Brunelleschy 37

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

I. BLUM, D. IONESCU, FR. BARCA, A. ȘTEFĂNESCU — Einfluss des Aschengenhalts der Kohle auf die Eigenschaften der Bindemittelbriketts 43

L. BLUM LAZĂR — Elektrochemische gewinnung von Kobaltnaphthenat 59

E. RUCKENSTEIN, O. SMIGELSKI — Über die thermische Theorie des Stoffaustausches in Rektifizierung von Mischungen 67

I. TEOREANU — Uber den aufban des wirbelschichtbettes 77

E. RUCKENSTEIN, I. TEOREANU — Uber den Mischvorgang in Schüttschichten und Wirbelschichten . 101

V. PARAUSANU, F. DANES — Die Einwirkung der chemischen Reaktion auf die Diffusionsgeschwindigkeit in Ionenaustauschen 113

FESTIGKEITSLEHRE

GH. BUZDUGAN, ST. MANTEA, C. POPOVICI, M. BLUMENFELD, A. ALOMAN, E. DUMITRESCU — Untersuchungen über die Gründe der Brüche bei Bohrstangen und derer Ausbesserungsmöglichkeiten . . 129

M. BLUMENFELD — Berechnung der verformung gerader stäben durch die Methode der drei Unbekanten 147

ELEKTROTECHNIK

A. MILEA — Eine Allgemeine Methode zur Berechnung des Wechselstromwirkwiderstandes von Leitern beliebigen Querschnittes 163

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI OPTICE

de CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

II[1]

18°. *Grupul translațiilor convergente de centru O este perfect simetric în raport cu mulțimea simetriilor ale căror axe trec prin O.*

Fie dată mulțimea $[T\ (O)]$ a translațiilor convergente de centrul O și $[\sigma]$ mulțimea simetriilor ale căror axe trec prin O.

Dacă $T \in [T\ (O)]$ este translația convergentă definită de vectorul $\bar{v}$ și $\sigma \in [\sigma]$ o simetrie a cărei axă Δ trece prin O, translația convergentă $T_1 \in [T\ (O)]$, definită de $\bar{w}$, simetricul vectorului $\bar{v}$ în raport cu Δ, este corespondenta transformării T în raport cu σ, deoarece

$$T_1 \sigma = \sigma\ T.$$

Din această relație deducem:

$$T\sigma = \sigma\ T_1,$$

de unde rezultă că T este corespondenta transformării T_1 în raport cu σ. Ca urmare, grupul $[T\ (O)]$ este perfect simetric în raport cu mulțimea $[\sigma]$.

19°. Fie $[R]$ grupul rotațiilor de centru O, $[\sigma]$ mulțimea simetriilor ale căror axe trec prin O și $[H]$ mulțimea omotetiilor de centru O.

$[R]$, $[\sigma]$, $[H]$ sînt mulțimi disjuncte de transformări, autosimetrice și reciproc perfect simetrice {2, § 26°}. Considerînd mulțimea de transformări

$$[M] = [R] U [\sigma] U [H],$$

produsul a două transformări ale mulțimii $[R]$ sau $[\sigma]$ sau $[H]$ aparține mulțimii $[M]$, iar inversa oricărei transformări a mulțimilor $[R]$, $[\sigma]$, $[H]$ aparține mulțimii respective.

Rezultă {2, § 28°} că *mulțimea de transformări*

$$[G] = [R] U [\sigma] U [H] U [R\sigma] U [RH] U [\sigma H] U [R\sigma H]$$

este un grup autosimetric.

---

[1] Urmarea notei publicată în Buletinul Institutului politehnic din București, Vol. XXIII, Fasc. 1.

Dar $[T\ (O)]$ fiind un grup perfect simetric {3, § 7°, 8°} în raport cu fiecare dintre mulțimile de transformări $[R]$, $[H]$, $[\sigma]$ este perfect simetric și în raport cu mulțimile $[R\sigma]$, $[RH]$, $[\sigma H]$, $[R\sigma H]$. Deci $[T\ (O)]$ *este perfect simetric în raport cu* $[G]$.

Deducem {1, § 14°} că *mulțimea*

$$[GT]=[RT]U[\sigma T]U[HT]U[R\sigma T]U[RHT]U[\sigma HT]U[R\sigma HT]$$

este un grup.

De asemenea din {1, § 17°} rezultă că *mulțimea*

$$[\mu]=[T(0)]U[G]U[GT]$$

este un grup. Acest grup este perfect simetric în raport cu $[G]$.

Am arătat {3, § 11°} că expresia

$$E\,(M_1 M_2 M_3 M_4)=\frac{OM_1\ M_3}{OM_2\ M_3}:\frac{OM_1\ M_4}{UM_2\ M_4}$$

este invariant în raport cu grupurile de transformări $[T\ (O)]$, $[R]$, $[H]$. Ea este invariant și în raport cu $[\sigma]$, deci:

Biraportul de arii $E\ (M_1\ M_2\ M_3\ M_4)$ *este invariant în raport cu transformările grupului* $[\mu]$.

20°. *Grupul transformărilor prin lentilă convergentă de centru* O *este perfect simetric în raport cu mulțimea simetriilor ale căror axe trec prin* O.

Adoptînd notațiile din § 18° și notînd I inversiunea de pol O și modul k, dacă

$$L=I\,T\,I,\quad L_1=I\,T_1\,I,$$

L și L_1 sînt transformări prin lentilă convergentă aparținînd grupului $[L\ (O)]$. Dar

$$L_1\,\sigma=(IT_1\,I)\,\sigma$$

și cum

$$I\sigma=\sigma I\quad \text{iar}\quad T_1\,\sigma=\sigma T,$$

avem:

$$L_1\,\sigma=IT_1\,\sigma I=I\sigma\,TI=\sigma\,ITI=\sigma L.$$

de unde rezultă că L_1 *este corespondenta transformării* L *în raport cu* σ.

Din relația precedentă deducem

$$L\sigma=\sigma\,L_1,$$

care arată că L *este corespondenta transformării* L_1 în raport cu σ. *Astfel* $[L\ (O)]$ *este grup perfect simetric în raport cu* $[\sigma]$.

21°. Întrucît grupul $[L\ (O)]$ este perfect simetric în raport cu fiecare dintre mulțimile de transformări $[R]$, $[H]$, $[\sigma]$, el este perfect sime-

tric în raport cu mulțimile $[R\sigma]$, $[RH]$, $[\sigma H]$, $[R\sigma H]$, deci în raport cu grupul $[G]$ definit mai sus (§ 19°).

Deducem astfel {1, § 14°} *că mulțimea*

$$[GL]=[RL]U[\sigma L]U[HL]U[R\sigma L]U[\sigma HL]U[RHL]U[R\sigma HL]$$

este un grup.

De asemenea, din {1, § 17°} rezultă că *mulțimea*

$$[\nu]=[L(0)]U[G]U[GL]$$

este un grup. Acest grup este perfect simetric în raport cu $[G]$.

Expresia $E(M_1\ M_2\ M_3\ M_4)$ *este invariant în raport cu transformările grupului* $[\nu]$.

22°. *Transformările plane prin lentilă divergentă.*

a) *Transformarea plană prin lentilă divergentă a punctelor unui plan P este o transformare punctuală D, definită de un punct O al planului P, de un vector* $\bar{v}$ *paralel cu planul și de un număr real k, prin produsul de transformări*

$$I\,T^{-1}I=D,$$

unde I este inversiunea de pol O și modul k, iar T este translația convergentă de centru O și vector $\bar{v}$.

Punctul O este centrul transformării prin lentilă divergentă D, $\bar{v}$ este vectorul transformării, iar k este modulul ei.

Paralela Ox la vectorul $\bar{v}$ este axa transformării D (sensul + fiind sensul vetcorului $\bar{v}$), iar dreapta Oy perpendiculară pe Ox este lentila transformării D.

Dacă $\overline{OF'}=v$, iar F este transformatul punctului F' prin inversiunea I, punctul F se numește focarul transformării prin lentila divergentă considerată. Perpendiculara din F pe Ox este dreapta focală a transformării.

b) Definiția dată transformării prin lentilă divergentă conduce la relația cunoscută poziționalâ dintre obiect și imaginea sa. Fie M un punct situat pe semiaxa Ox corespunzătoare transformării D definită mai sus.

Prin I punctul M se transformă în M', iar aceasta prin T^{-1} (translația convergentă de vector $-\bar{v}$) se transformă în M'' astfel încît

$$\overline{M'M''}=v\cos(\pi+\pi)\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM'}}=\overline{OF'},\ \text{cînd}\ k>0\ \text{sau}$$

$$\overline{M'M''}=v\cos(\pi+0)\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM'}}=\overline{OF'},\ \text{cînd}\ k<0.$$

Prin I punctul M' se transformă în M_1 și avînd pentru oricare k

$$OM''-OM'=OF',$$

dacă F este focarul transformării, rezultă

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1} = -\frac{1}{OF}.$$

c) Transformarea prin lentilă convergentă L și transformarea prin lentilă divergentă D, definite de același centru O, de același vetcor $\bar{v}$ și de același modul k, au aceiași dreaptă lentilă și același focar. L și D sînt două transformări omofocale și avem

$$D = L^{-1}, \quad L = D^{-1}.$$

Deci transformările prin lentilă divergentă aparțin mulțimii transformărilor prin lentilă convergentă.

d) Dacă L^* este transformarea prin lentilă convergentă definită de centrul O, vectorul $\bar{v}$ și modulul $-k$, avem:

$$L^* = L^{-1}.$$

În adevăr, notînd I^* inversiunea de pol O și modul $-k$, avem:

$$L = ITI, \quad L^* = I^* T I^*.$$

Dar $I I^*$ este echivalent cu omotetia H de centru O și raport -1, deci:

$$LL^* = ITHTI^*.$$

Corespondenta translației convergente T în raport cu H este translația convergentă de centru O și vector $-\bar{v}$, deci T^{-1}. Ca urmare:

$$T^{-1} H = HT$$

și

$$LL^* = ITT^{-1}HI^* = IHI^* = I(II^*)\ I^* = 1.$$

Rezultă

$$L^* = L^{-1}.$$

Ca urmare, avem și

$$D = L^*.$$

Transformarea prin lentilă divergentă de centru O, vector $\bar{v}$ și modul k este echivalentă cu transformarea prin lentilă convergentă de centru O, vector $\bar{v}$ și modul $-k$.

23°. *Fie L_1, L_2 două transformări prin lentilă convergentă avînd același centru O și același vector $\bar{v}$ și modulele respectiv λ_1, λ_2. Dacă M_1, M_2 sînt transformatele unui punct M respectiv prin L_1, L_2, atunci raportul anarmonic*

$$(OMM_1 M_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Dacă F_1, F_2 sînt focarele transformărilor L_1, L_2 și φ_1, φ_2 punctele în care OM este intersectată de dreptele focale ale celor două transformări, atunci

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1} = \frac{1}{O\varphi_1}, \quad \frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_2} = \frac{1}{O\varphi_2}.$$

Notînd

$\overline{OF'} = \bar{v}$, rezultă $OF_1 \times OF' = \lambda_1$ și $OF_2 \times OF' = \lambda_2$, de unde

$$\frac{\lambda_1}{OF_1} = \frac{\lambda_2}{OF_2} \text{ sau } \frac{\lambda_1}{O\varphi_1} = \frac{\lambda_2}{O\varphi_2},$$

deci

$$\frac{1}{OM_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{1}{OM_1} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\frac{1}{OM},$$

relație care arată că

$$(OMM_1M_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

24°. *Fie L, D o transformare prin lentilă convergentă și o transformare prin lentilă divergentă definite de centrul O, vectorul $\bar{v}$ și modulul λ.*

Dacă punctul M se transformă în M_1, M_2 respectiv prin L, D *atunci punctele M_1, M_2 sînt conjugate armonic în raport cu O, M* deci $(O\,M\,M_1\,M_2) = -1$.

In adevăr,

$$D = L'$$

unde L' este transformarea prin lentilă convergentă, definită de centrul O, vectorul $\bar{v}$ și modulul $-\lambda$.
și aplicînd teorema precedentă transformărilor L, L' avem

$$(OMM_1M_2) = -1.$$

25°. *Transformări prin lentilă convergentă echivalente.*

Condiția necesară și suficientă ca două transformări prin lentilă convergentă L_1, L_2 care au același centru să fie echivalente este ca între vectorii lor $\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$ să existe relația:

$$\bar{v}_2 = \lambda\,\bar{v}_1,$$

λ fiind raportul modulelor k_2, k_1 ale transformărilor considerate.

Condiția este suficientă. Dacă T_1, T_2 sînt translațiile convergente de vectori $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ și centrul O, iar I_1, I_2 inversiunile de pol O și module k_1, k_2, avem:

$$L_1 L_2^{-1} = (I_1 T_1 I_1)\,(I_2 T_2^{-1} I_2).$$

Dar $I_1 I_2$ este echivalent cu omotetia H de centru O și raport $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{\lambda}$, deci

$$L_1 L_2^{-1} = I_1 T_1 H T_2^{-1} I_2.$$

Corespondenta translației convergente T_2^{-1} în raport cu omotetia H este {3, § 8°} translația convergentă de centru O și raport

$$-\frac{1}{\lambda}\bar{v}_2 = -\bar{v}_1, \text{ deci } T_2^{-1}.$$

Astfel

$$L_1 L_2^{-1} = I_1 T_1 T_1^{-1} H I_2 = I_1 (I_1 I_2) I_2 = 1.$$

Deci

$$L_1 = L_2.$$

Condiția este necesară.

Din $L_1 L_2^{-1} = 1$ rezultă

$$(I_1 T_1 I_1)(I_2 T_2^{-1} I_2) = 1$$

sau

$$I_1 T_1 H T_2^{-1} I_2 = 1.$$

Corespondenta translației convergente T_2^{-1} în raport cu omotetia H este translația convergentă T' de centru O și de vector $-\frac{k_1}{k_2}\bar{v}_2$

și avem

$$I_1 T_1 T' H I_2 = 1$$

sau

$$I_1 T_1 T' I_1 I_2 I_2 = 1.$$

Dar $T_1 T'$ este echivalentă {3, § 5°} cu o translație convergentă T de centru O *și vector* $\bar{v} = \bar{v}_1 - \frac{k_1}{k_2}\bar{v}_2$, deci

$$I_1 T I_1 = 1$$

sau înmulțind la stînga și la dreapta cu I_1, avem

$$T = 1,$$

de unde concluzia că vectorul translației convergente T trebuie să fie nul sau

$$\bar{v}_2 = \frac{k_2}{k_1}\bar{v}_1.$$

Consecințe.

1) Două transformări prin lentilă convergentă cu același centru ai căror vectori nu sînt coliniari nu pot fi echivalente.

2) *Două transformări prin lentilă convergentă* L_1, L_2 *cu același centru, echivalente, au aceiași axă, aceiași lentilă și același focar.* Întrucît vectorii lor satisfac relația de coliniaritate

$$\bar{v}_2 = \lambda \bar{v}_1 \qquad (\lambda = k_2 : k_1),$$

transformările L_1, L_2 au aceiași axă și aceiași lentilă.

Fie $\overline{OF}_1 = \bar{v}_1$ și $\overline{OF}_2 = \bar{v}_2$, avem:

$$\overline{OF_2} = \frac{k_2}{k_1} \overline{OF_1},$$

Focarul transformării L_1 este punctul F_1' transformatul lui F_1 prin inversiunea I_1 de pol O și de modul k_1, deci

$$OF_1 \times OF_1' = k_1.$$

Dacă F_2' este focarul transformării L_2, avem

$$OF_2 \times OF_2' = k_2.$$

Rezultă

$$F_1' = F_2'.$$

3) Două transformări prin lentilă convergentă cu același centru, definite de același vector $\bar{v}$, avînd modulele k_1, k_2 neegale, nu sînt echivalente.

4) Două transformări prin lentilă convergentă cu același centru și același modul definite de vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ colineari, nu sînt echivalente dacă $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2$.

26° *Asupra grupurilor de transformări prin lentilă convergentă plane de formă* $[L\ (O, k)]$.

Am arătat {3, § 13°} că mulțimea transformărilor prin lentilă convergentă plane $[L\ (O)]$ formează un grup. Acesta este reuniunea unei infinități de grupuri de forma $[L\ (O, k)]$, care se deosebesc între ele prin valoarea lui k.

a) *Transformările grupului* $[L\ (O, k_1)]$ *sînt echivalente cu transformările grupului* $[L\ (O, k_2)]$ *și reciproc.*

Fie $L_1 \in [L\ (O, k_1]$ transformarea prin lentilă convergentă definită de vectorul $\bar{v}$. Vectorul $\frac{k_2}{k_1} \bar{v}$ definește o transformare $L_2 \in [L\ (O, k_2)]$ și avem (§ 25°)

$$L_1 = L_2.$$

Deci fiecare transformare a grupului $[L\ (O, k_1)]$ este echivalentă cu o transformare a grupului $[L\ (O, k_2)]$ și reciproc.

Dacă $L'_1 \in [L\ (O, k_1)]$ este definită de vectorul $\bar{v}'$ echivalenta ei în $[L\ (O, k_2)]$ este L'_2 definită de vectorul $\frac{k_2}{k_1} \bar{v}'$.

Dar produsul $L_1 L_1'$ este echivalent cu o transformare a grupului $[L(O, k_1)]$ definită de vectorul $\bar{v} + \bar{v}'$ iar $L_2 L_2'$ este echivalent cu o transformare a grupului $[L_2(O, k_2)]$ definită de vectorul $\frac{k_2}{k_1}(\bar{v} + \bar{v}')$.

Rezultă

$$L_1 L_1' = L_2 L_2'.$$

Deci corespondența prin transformări echivalente între grupurile $[L(O, k_1)]$, $[L(O, k_2)]$ este un izomorfism.

b) *Transformările grupului* $[L(O)]$ *sînt echivalente cu transformările unui subgrup* $[L(O, k)]$.

Fie $L \in [L(O)]$ o transformare definită de vectorul $\bar{v}$ și de modulul λ. Transformarea L^* de vector $\frac{k}{\lambda}\bar{v}$ și de modul k este echivalentă cu L și aparține grupului $[L(O, k)]$.

Deci orice transformare a grupului $[L(O)]$ are o echivalentă în grupul $[L(O, k)]$.

De asemenea, o transformare $L_1^* \in [L(O, k)]$ definită de vectorul $\bar{v}$ este echivalentă cu transformările grupului $[L(O)]$ definite de vectorii $\lambda\bar{v}$ și avînd modulele λk (λ număr real).

Se arată ca mai sus (§ 26°) că această corespondență prin transformări echivalente între $[L(O)]$ *și* $[L(O, k)]$ este o aplicație omomorfă a grupului $[L(O)]$ pe $[L(O, k)]$.

În particular $[L(O)]$ se aplică omomorf prin transformări echivalente pe grupul $[L(O, 1)]$.

27°. *Descompunerea grupului* $[L(O)]$ *în clase de transformări echivalente.*

Fie $[L(O, \lambda\bar{v}, \lambda)]$ mulțimea de transformări prin lentilă convergentă aplicate planului P, avînd același centru O, unde $\bar{v}$ este un vector dat, iar λ un parametru care primește orice valoare reală.

Transformările acestei mulțimi sînt echivalente (§ 25°).

Orice transformare a grupului $[L(O)]$ echivalentă cu o transformare a mulțimii $[L(O, \lambda\bar{v}, \lambda)]$ aparține acestei mulțimi.

Considerînd toate mulțimile de forma $[L(O, \lambda\bar{v}_\alpha, \lambda)]$ corespunzătoare tuturor vectorilor $\bar{v}_\alpha$ paraleli cu planul P,

$$[L(O)] = \overset{\alpha}{U}[L(O, \lambda\bar{v}_\alpha, \lambda)].$$

Astfel am realizat descompunerea grupului $[L(O)]$ în clase de transformări echivalente.

28°. *Lanțurile de transformări corespondente ale grupului* $[L(O, 1)]$ *față de rotații.*

Fie $L_0 \in [L(O, 1)]$ o transformare prin lentilă convergentă aplicată planului P, definită de vectorul $\bar{v}$ și $[R]$ grupul rotațiilor de centru O

aplicate planului. Grupul $[L(O,1)]$ este perfect simetric în raport cu grupul $[R]$. Corespondenta de ordin $p<n$ a transformării L_0 în raport cu o rotație $R \in [R]$ avînd unghiul $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ este transformarea $L_p \in [L(O,1)]$ definită de vectorul $\bar{v}$ dedus din $\bar{v}_p$ prin rotația R_p, Avem :

$$L_p = R^p L_0 R^{-p}$$

Transformările L_p $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$ sînt distincte și cum

$$L_{p+n} = R^{p+n} L_0 R^{-(p+n)}$$

iar $R^n = 1$, rezultă

$$L_{p+n} = L_p .$$

Conchidem {4, § 32°} că lanțul de transformări corespondente $[L_0]_R$ este un lanț ciclic de ordin n.

Grupul $[L(O,1)]$ este o reuniune de lanțuri ciclice de ordin n în raport cu această rotație R {4, § 34°}.

29°. *Lanțuri de transformări corespondente ale grupului* $[L(O)]$ *față de omotetii.*

Fie $L_0 \in [L\ (O,\ 1)\ ]$ o transformare prin lentilă convergentă aplicată planului, definită de vectorul $\bar{v}$ și $[H]$ grupul omotetiilor de centru O. Grupul $[L\ (O,\ 1)]$ este perfect simetric în raport cu $[H]$.

Corespondenta de ordin p (p întreg) a transformării L_0 în raport cu omotetia $H \in [H]$ avînd raportul λ este transformarea $L_p^* \in [L\ (O,\ 1)]$, definită de vectorul $\lambda^p \bar{v}$.

Avem

$$L_p^* = H^p L_0 H^{-p}.$$

Dacă $\lambda = -1$, H este o transformare involutivă de ordinul 1, deci {4, § 34° *b*}, grupul $[L\ (O)]$ este o reuniune de lanțuri ciclice de ordin 2 de transformări corespondente în raport cu H, fiecare lanț fiind format dintr-o transformare a grupului $[L\ (O)]$ și din inversa acesteia.

Dacă $\lambda \neq -1$ și considerăm o corespondentă de ordin q a transformării Lo $(q \neq p)$, deci

$$L_q^* = H^q L_0 H^{-q},$$

atunci,

$$L_p^* \neq L_q^*.$$

Aceasta pentru că transformările L_p^*, L_q^* sînt definite de vectorii $\lambda^p \bar{v}$, $\lambda^q \bar{v}$ și

$$\lambda^p \bar{v} = \lambda^q \bar{v}$$

nu este satisfăcută pentru valori reale ale lui λ diferite de ± 1.

Rezultă că, în acest caz, $[L_0]_H$ este un lanț normal de transformări corespondente.

Astfel grupul $[L\ (O,\ 1)]$ se poate descompune sau în lanțuri ciclice de ordin 2 sau în lanțuri normale în raport cu omotetiile grupului $[H]$.

BIBLIOGRAFIE

[1] *C. Ionescu-Bujor.* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transformation donnée. (I). Bul. Inst. Politehnic Bucureşti Tom XXI. Fasc. 1.

[2] *C. Ionescu-Bujor.* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transformation donnée. (II). Bul. Inst. Politehnic Bucureşti. Tom XXI. Fasc. 2.

[3] *C. Ionescu-Bujor.* Asupra unor transformări optice. Bul. Inst. Politehnic Bucureşti. Tom XXIII. Fasc. 2.

[4] *C. Ionescu-Bujor.* Asupra transformărilor corespondente. (III). Bul. Inst. Politehnic Bucureşti. Tom XXIII. Fasc. 1.

О НЕКОТОРЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ (II)

(Краткое содержание)

В этой работе (заметке) даны свойства группы $[T(O)]$ сходящихся трансляций с центром о и группы $[L(O)]$ преобразования через собирающую линзу с центром О, приложенные к плоскости Р проходящей через О, группы изучены в работе (I) (Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti Tom XXIII Fascicola 2).

а) Сохраняя обозначения из первой работы (заметки), если $[\sigma]$ есть множетво симметричностей плоскости Р с осью, проходящей через О, если

$$[G] = [R]\ U\ [\sigma]\ U\ [H]\ U\ [R\sigma]\ U\ [RH]\ U\ [\sigma H]\ U\ [R\sigma H],$$

тогда множества

$$[\mu] = [T(O)]\ U\ [G]\ U\ [GT]$$
$$[\nu] = [L(O)]\ U\ [G]\ U\ [GL]$$

являются (§19°, 21°) совершению симметричными группами относительно $[G]$.

б) Необходимое и достаточное условие для того чтобы два преобразования через собирающие линцы L_1, L_2 с одним и тем же центром являлись эквивалентными, надо чтобы между векторами $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ существовало соотношение

$$\bar{v}_2 = \lambda \bar{v}_1, \text{ где}$$

λ есть соотношение модулей k_2 и k_1 рассматриваемых преобразований.

в) Если $[L(O,k)]$ является группы преобразований через собирающие линзы с центром О и модулем k, тогда:

Преобразования группы $[L(O,k_1)]$ эквивалентны преобразованиям группы $[L(O,k_2)]$ и обратно. $[L(O,k_1)]$ и $[L(O,k_2)]$ изоморфно. Преобразования группы $[L(O)]$ является эквивалентны преобразованию группы $[L(O,k)]$ и обратно. $[L(O)]$ действует ономорфно на $[L(O,k)]$, $[L(O)]$ разлагается в классы $[L(O,\lambda \bar{v}_1, \lambda)]$ эквивалентных преобразований (λ — параметр).

OPTIC TRANSFORMATIONS (II)

(Summary)

In this note we give some theorems of the group $[T(O)]$ of the convergent translations that have in O the centre and of the group $[L(O)]$ of the transformations by convergent lentil. These groups have been studied in the note I (Bul. Inst. Politehnic Bucureşti ,Tom XXIII. Fasc. 2).

a) With the notations of the note I, if $[\sigma]$ is the set of the symetries of the plan P, whose axis contain the point O, if

$$[G] = [R]U[\sigma]U[H]U[R\sigma]U[RH]U[\sigma H]U[R\sigma H],$$

then the sets :

$$[\mu] = [T(O)]U[G]U[GT],$$

$$[\nu] = [L(O)]U[G]U[GL],$$

are (§ 19°, 21°) perfect symmetric groups in connexion with $[G]$.

b) If L_1, L_2 are two transformations by convergent lentil, that have the same centre and whose vectors are $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, then the condition necessary and sufficient of theirs equivalence is

$$\bar{v}_2 = \lambda \bar{v}_1,$$

λ being the quotient $k_2 : k_1$ of the squares of radius given for the inversions which define L_2, L_1. (§ 25°).

c) If $[L(O,k)]$ is the group of transformations by convergent lentil whose centre is O, and k the square of radius of theirs inversion, then :

The transformations of the group $[L(O,k_1)]$ are equivalent with the transformations of the group $[L(O,k_2)]$.

This equivalence is reciprocal. $[L(O,k_1)]$ *and* $[L(O,k_2)]$ are isomorphic (§ 26°, a).

The transformations of the group $[L(O)]$ are equivalent with the transformations of the group $[L(O,k)]$. This equivalence is reciprocal : The correspondence is a homomorphism (§ 26° b).

$[L(O)]$ is separated into classes $[L(O, \lambda\bar{v}, \lambda)]$ of equivalent transformations.

SUR LES TRANSFORMATIONS OPTIQUES (II)

(Résumé)

On donne dans cette note des propriétés du groupe $[T(O)]$ des translations convergentes dont le centre est O, du groupe $[L(O)]$ des transformations par lentille convergente dont le centre est O. Ces groupes ont été étudiés dans la note I (Buletinul Institut. Politehnic din București Tom XXIII Fasc. 2).

a) En utilisant les notations de la note I, si $[\sigma]$ est l'ensemble des symétries du plan P dont les axes passent par O, si

$$[G]=[R]\,U\,[\sigma]\,U\,[H]\,U\,[R\sigma]\,U\,[RH]\,U\,[\sigma H]\,U\,[R\sigma H],$$

alors les ensembles

$$[\mu]=[T(O)]\,U\,[G]\,U\,[GT],$$

$$[\mu]=[L(O)]\,U\,[G]\,U\,[GL],$$

sont (§ 19°, 21°) des groupes parfaitement symétriques par rapport à $[G]$.

b) La condition nécessaire et suffisante pour que deux transformations par lentille convergente L_1, L_2 qui ont le même centre soient équivalentes, c'est la relation $\bar{v}_2 = \lambda \bar{v}_1$ ou $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ sont les vecteurs de L_1, L_2 et λ le rapport des modules k_2, k_1 de L_2, L_1. (§ 25°).

c) Si $[L(O,k)]$ est le groupe des transformations par lentille convergente ayant O comme centre et le module k, alors :

Les transformations du groupe $[L(O,k_1)]$ sont équivalentes aux transformations du groupe $[L(O,k_2)]$. Cette équivalence est réciproque. Les groupes $[L(O,k_1)]$, $[L(O,k_2)]$ sont isomorphes (§ 26, a).

Les transformations du groupe $[L(O)]$ sont équivalentes aux transformations du groupe $[L(O,k)]$. L'équivalence est réciproque. La correspondance entre $[L(O)]$, $[L(O,k)]$ est homomorphe. (§ 26°, b).

Le groupe $[L(O)]$ est formé par les classes $[L(O,\lambda\bar{v},\lambda)]$ des transformations équivalentes, ou $\bar{v}$ est donné pour les transformations qui appartiennent à la même classe, le changement de direction de $\bar{v}$ ayant comme conséquence le changement de la classe.

OPTISCHE TRANSORMATIONEN (II)

(Zusammenfassung)

In dieser Anmerkung geben wir einige Sätze der Gruppe $[T(O)]$ der konvergenten Translationen, die O als Mittelpunkt haben, sowie der Gruppe $[L(O)]$ der Transformationen mit konvergenter Linse deren Mittelpunkt auch O ist.

Man bestimmt diese Gruppen in der Anmerkung I (Bul. Inst. Politehnic București Tom. XXIII, Fasc. 2).

a) Ist $[\sigma]$ die Menge der ebenen Symmetrien deren Achsen den Punkt O enthalten, ist mit der Bedeutung aus der Anmerkung I

$$[G] = [R]U[\sigma]U[H]U[R\sigma]U[RH]U[\sigma H]U[R\sigma H],$$

so sind

$$[\mu] = [T(O)]U[G]U[GT],$$

$$[\nu] = [L(O)]U[G]U[GL]$$

vollkommensymetrische Mengen (§ 19°, 21°) in Beziehung auf $[G]$.

b) Sind L_1, L_2 zwei Transformationen mit konvergenter Linse, die denselben Mittelpunkt und die Vektoren $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ haben, so ist

$$\bar{v}_2 = \lambda \bar{v}_1$$

eine nötige und gemügende Bedingung für ihre Äquivalenz, ($\lambda = k_2 : k_1$ wo k_1, k_2 die Moduln der Transformationen L_1, L_2 sind) (§ 25°).

c) Ist $[L(O, k)]$ die Gruppe der Transformationen mit konvergenter Linse, welche O als Mittelpunkt und k als Modul haben, so:

— Die Transformationen der Gruppe $[L(O, k_1)]$ sind mit den Transformation en der Gruppe $[L(O, k_2)]$ äquivalent.

Diese Äquivalenz ist wechselseitig. $[L(O, k_1)]$ und $[L(O, k_2)]$ sind isomorph (§ 26°, a).

— Die Transformationen der Gruppe $[L(O)]$ sind mit den Transformationen der Gruppe $[L(O, k)]$ äquivalent.

Die Äquivalenz ist wechselseitig. $[L(O)]$ und $[L(O, k)]$ sind homomorph (§ 26°, b).

Es gibt eine Einteilung von $[L(O)]$ in Klassen $[L(O, \lambda\bar{v}, \lambda)]$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

DESPRE NILPOTENTA ȘI RADICAL

de MIRCEA TIRNOVEANU

§ 1. Definiții

În acest paragraf redăm, după Vander Vaerden [2] și D. Barbilian [1], cîteva definiții și teoreme care vor fi folosite în paragraful următor.

Definiția 1.1. Element nilpotent

Fie L un inel oarecare și fie $a \in L$.

Elementul $a \in L$ se numește element nilpotent dacă satisface condiția :

$$a^n = o,$$

unde n este număr natural, iar o este elementul nul al inelului L.

Se numește „exponent de nilpotență" al elementului nilpotent a un număr natural m astfel ca :

$$a^m = o\,;\ a^{m-1} \neq o\,;\ m \leq n$$

Definiția 1.2. Inel nilpotent.

Se spune că un inel L este nilpotent dacă există un număr natural n astfel încît :

$$a_1 a_2 \ldots a_n = o\,;\ a_i \in L\,;\ i = 1,2 \cdots, n$$

Cel mai mic număr natural m pentru care avem

$$a_1 a_2 \cdots a_m = o\,;\ a_i \in L\,;\ i = 1,2 \cdots m$$

se numește exponent de nilpotență al inelului L și se scrie simbolic

$$L^m = (o)$$

(o) fiind idealul nul al inelului L.

Definiția 1.3. Ideal drept (respectiv sting, respectiv bilateral) nilpotent.

Fie $I_r \, CL$ un ideal drept (respectiv I_r ideal stîng, respectiv I ideal bilateral) al inelului L. Se spune că I_r este un ideal drept nilpotent (respectiv I_r ideal stîng niplotent, respectiv I ideal bilateral nilpotent) dacă subinelul I_r (respectiv I_1 respectiv I) este nilpotent.

Definiție 1.4. Element radical

Fie L un inel și fie $a \in L$ un element al său. Se spune că elementul a este un element radical al inelului L dacă idealul principal complet (drept sau stîng) general de a este ideal nilpotent, adică

$$[(a)_r]^n = o$$

sau

$$[(a)_r]^n = o$$

Teorema 1.1.

Orice element radiacl al unui inel L este element nilpotent al inelului L.

Definiția 1.5. Cvasi radical.

Fie L un inel oarecare. Se numește cvasi radical al inelului L mulțimea tuturor elementelor radicale ale inelului L.

Teorema 1.2.

Cvasi radicalul unui inel L este un ideal bilateral al inelului L.

Definiția 1.5. Radical.

Se numește radical al unui inel L, un cvasi radical $R < L$ care satisface condiția :

$$R^n = (o)$$

(n număr natural iar (o) idealul nul), adică R este un ideal nilpotent.

§ 2. Nilpotență și radical în structuri s-totale

În acest paragraf definim noțiunile de element cardinal nilpotent, element cardinal radical, substructuri s-totale cardinal nipotente, demonstrăm și enunțăm cîteva teoreme.

Teorema 2.1.

Fie L un inel cu element unitate. Dacă inelul L este comutativ atunci orice element nilpotent din L este element radical în L.

Demonstrație.

Inelul L având element unitate, conform unei teoreme din teoria idealelor [2] orice ideal drept complet I_r (respectiv stîng complet I_r) este identic cu idealul drept necomplet I_r^* (respectiv identic cu idealul stîng necomplet I^*). În particular idealul principal drept complet $(a)_r$ generat de elementul $a \in L$ este identic cu idealul principal drept necomplet $(a)_r^*$ (aceiaș proprietate pentru ideale principale stîngi și bilaterale), adică

$$(a)_r = (a)_r^*; \quad (a)_r = (a)_r^*; \quad (a) = (a)^*$$

Deoarece inelul L este comutativ rezultă că avem numai ideale bilaterale și deci în L vom avea

$$(a) = (a)^*$$

Fie $a \in L$ un element nilpotent avînd exponentul de nilpotență n, adică

$$a^n = o.$$

o fiind elementul nul în inelul L.

Pentru a arăta că elementul $a \in L$ este element radical trebuie să arăt că idealul principal complet (a), generat de a, este nilpotent. Cum

$$(a) = (a)^*$$

rezultă că un element arbitrar $\alpha \in (a)$ va fi de forma

$$\alpha = Aa; \text{ cu } A \in L$$

Fie acum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, n, elemente arbitrare în idealul principal (a) avem :

$$\alpha_i = A_i a; \; A_i \in L; \; i = 1,2 \cdots n$$

Să considerăm produsul

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = A_1 a A_2 a \cdots A_n a$$

Deoarece inelul L este comutativ avem

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = A_1 A_2 \cdots A_n \underbrace{aa \cdots}_{n} a$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = A_1 A_2 \cdots A_n a^n$$

cum

$$A_1 A_2 \cdots A_n = A; \text{ cu } A \in L$$

și

$$a^n = o$$

(deoarece a este element nilpotent al inelului L), rezultă

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = A.o$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = o \quad \alpha_i \in (a); \; i = 1,2 \cdots n$$

Cum elementele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sînt arbitrare în idealul (a), rezultă

$$(a)^n = (o)$$

((o) fiind idealul nul.)
Așa dar idealul principal complet (a) este nilpotent și deci elementul nilpotent $a \in L$ este element radical.

c.c.t.d.

Definiția 2.1.

Fie K un corp. Dacă considerăm în corpul K structura de inel, atunci putem defini în corpul K, în același mod ca în paragraful 1, noțiunile de element nilpotent, corp nilpotent, subcorp nilpotent, ideal (în corpul K) nilpotent, element radical, radical și cvasi radical.

Teorema 2.2.

Fie K un corp. Dacă corpul K este comutativ, atunci cvasi radicalul corpului K este radical.

Demonstrație.

Fie K un corp comutativ și fie $Q < K$ un cvasi radical al corpului K (în care am luat în considerare structura de inel). Conform teoremei *L.2.* cvasiradicalul Q (considerat ca un cvasi radical al structurii de inel al corpului K) este un ideal bilateral.
Trebuie să arăt că idealul bilateral Q este un ideal nilpotent:

$$Q^n = (o)$$

Cvasi radicalul Q, conform definiției este format din totalitatea elementelor radicale din K. Însă, conform teoremei 1.1., orice element radical $a_i \in Q$ este un element nilpotent

$$a_i^{n_i} = o\,;\ a_i \in Q$$

n_i fiind numere naturale.
Fie $\{n_i\}$ mulțimea tuturor exponenților de nilpotență a elementelor $a_i \in Q$.
Mulțimea $\{n_i\}$ fiind o mulțime de numere naturale este o mulțime bine ordonată (relația de ordonare fiind relație de mărime în mulțimea numerelor naturale) și deci are un prim element, fie acesta n_1.
Există, așa dar în Q un element a astfel ca:

$$(a)^{n_1^*} = (o) \text{ și } a^{n_1} = (o)\,;\ \text{cu } n_1^* \leq n_1$$

Fie acum n_1 elemente $a_1, a_2, \ldots a_{n_1}$ arbitrare în Q. Deoarece K este un corp, următoarele ecuații sînt solubile în corpul K:

$$a_1 = ax_1$$
$$a_2 = ax_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n_n} = ax_n.$$

Considerăm produsul $a_1 a_2 \ldots a_{n_1}$

Avem :

$$a_1 a_2 \cdots a_{n_1} = ax_1 ax_2 \cdots ax_{n_1}$$

Prin ipoteză K este comutativ, deci

$$a_1 a_2 \cdots a_{n_1} = \underbrace{aa \cdots}_{n,} a x_1 a_2 \cdots x_{n_1}$$

Dar :

$$x_1 x_2 \cdots x_{n_1} = x \; ; \; x \in K$$

$$\underbrace{aa \cdots}_{n} a^* = a^n 1 \; ; \; a \in Q$$

Deci :

$$a_1 a_2 \cdots a_{n_1} = a^n 1 \, x$$

Insă :

$$a^n 1 = o$$

Deci :

$$a_1 a_2 \cdots a_{n_1} = o$$

Deoarece $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1} \in Q$ sînt arbitrare, rezultă că idealul Q este nilpotent și că are ca exponent de nilpotență n_1 :

$$Q^n 1 = (o)$$

adică cvasi radicalul Q este un radical

c.c.t.d.

Teorema 2.3.

Fie K un corp și $Q \subset K$ radicalul său. Dacă K este comutativ, atunci radicalul Q este identic cu idealul nul (o).

Demonstrație.

Fie Q cvasi radicalul corpului comutativ K.

Conform teoremei 1.2, cvasi radicalul Q este un ideal bilateral. Conform teoremei 2.2. cvasi radicalul Q este un radical. Dar, conform unei teoreme din teorema idealelor [2], corpul K are numai două ideale : idealul nul (o) și idealul total (unitate) K. Conform teoremei 1.1. orice element radical este un element nilpotent. Dar, se demonstrează ușor că singurul element nilpotent al corpului K este elementul nul o.

Deci radicalul corpului K coincide cu idealul nul (o).

c.c.t.d.

Definiția 2.2. Element cardinal nilpotent.

Fie E o mulțime abstractă înzestrată cu o structură S-totală definită de sistemul $[E, \Omega, (\Theta_j)_{j \in J}, (O_i)_{i \in I}]$ satisfăcînd sistemul de axiome

$S_1 = S_8$ [4]; unde: Ω este un domeniu de operatori; $(\Theta)_{i\in I}$ o mulțime de operații generale definite pe $\bigcup_\xi P^\xi(E) \bigcup \bigcup_\xi P^\xi(\Omega)$ independente și compatibile; $(\Theta_i)_{i\in I}$ o mulțime de operații algebrice definite pe $\bigcup_\xi P^\xi(E) \times \bigcup_\xi P^\xi(\Omega)$ astfel ca $\bar{I} = \bar{J}$. Spunem că $\{M_k\} \in \bigcup_\xi P^\xi(E)$ este cardinal nilpotent de exponent de nilpotență α, în raport cu submulțimea de operații algebrice $(O_{i'}) \subset (O_i)$ dacă:

$$a)\ [(O_{i'});\ \{M_k\}\{\Omega_s\}]_\alpha = \bigcup_{i'\in I'\subset I} \{M^{*O_{i'}}_{(Ks)\,i'}\}$$

cu

$$\bar{\bar{I}}' \geqslant \alpha$$

$$b)\ \mathcal{C}^\beta([\Theta_j;\ \bigcup_{i'} \{M_{(Ks)i'}\}]_\alpha) = \varnothing\ ;\ \beta \geqslant \alpha$$

Definiția 2.3. Substructură S-totală cardinal nilpotentă.

O substructură S-totală $[E', \Omega, (\Theta_j), (\Theta_i)] \subset [E, \Omega, (\Theta_j), \Theta_i)]$ este α cardinal nilpotentă în raport cu $(O_{i'}) \subset (O_i)$ dacă:

$$a)\ [(O_{i'});\ [\{M_{k_t}\} \cdots \{M_{k_\alpha}\};\ \{\Omega_{s_t}\} \cdots \{\Omega_{s_\alpha}\}]] = \bigcup_{i'\in I'} \prod_{\xi\in\equiv} M_{(k_\eta\, s_\eta)i'}$$

$$\text{cu } \bar{\bar{I}}' \geqslant \alpha\ ,\ \cdot \geqslant \alpha$$

$$b)\ \mathcal{C}^\beta([\Theta_j, \bigcup \prod M_{(k_\xi s_\xi)i'}]_\alpha) = \varnothing$$

cu:

$$\beta \geqslant \alpha$$

Teorema 2.4.

Fie $[E, \Omega, (\Theta_j), (O_i)]$ o structură S-totală. Dacă funcția logică $\mathcal{C}$ este de ordin finit n, și dacă $\alpha \leqslant z$ (adică este cel mult egal cu puterea continuului) atunci structura $[E, \Omega, (\Theta_j), (O_i)]$ conține o mulțime cel mult numerabilă de elemente cardinal nilpotente de exponent α.

Definiția 2.4. Element cardinal radical.

Fie mulțimea E înzestrată cu o structură S-totală și fie extinderea $\bigcup_\xi P^\xi(E)$. Elementul $\{M_K\} \in \bigcup_\xi P^\xi(E)$ se numește cardinal radical de exponent α dacă

$$a)\ [\{M_k\}, \Omega, (\Theta_j), (\Theta_i)] \quad \text{este o structură } S\text{-totală}$$

$$b)\ [\{M_k\}, \Omega, (\Theta_j), (\Theta_i)] \quad \text{este cardinal nilpotentă de exponent } \alpha$$

Teorema 2.5.

Fie o structură S-totală $[E, \Omega, (\Theta_j), (O_i)$. Dacă:

$$\mathcal{C}[(\Theta_i)\downarrow : \{M_k\}\{\Omega_s\}] = \mathcal{C}[(\Theta_i)\uparrow : \{M_k\}\{\Omega_s\}]$$

(unde simbolul $\downarrow$: înseamnă operațiile algebrice (O_i) se aplică după o relație de preordine dată $<$, iar $\uparrow$: se aplică după relațiile de preordine inversă $>$),
atunci orice element $\{M_K\} \in \bigcup P^{\xi}(E)$ cardinal nilpotent de exponent α este un element cardinal radical de exponent α' astfel ca

$$\alpha' \geqslant \alpha$$

BIBLIOGRAFIE

[1] *D. Barbilian:* Algebra axiomatică, partea II-a (lito), București, 1945.

[2] Van der *Waerden:* Modern Algebra. New-York 1953.

[3] *M. Tîrnoveanu:* Structuri „S". Lucrări științifice vol. IV. Brașov 1960.

[4] *M. Tîrnoveanu:* Despre unele proprietăți ale structurilor „S"-D-topologice complete, Comunicările Acad. R.P.R., 1961, XI, 9.

[5] *M. Tîrnoveanu:* Structuri D-topologice. Consfătuirea de geometrie și topologic, Iași, 1956, Editura Acad. R.P.R., 1962.

[6] *M. Tîrnoveanu:* Despre un domeniu logic transfinit, Comunicările Acad. R.P.R., 1961, XI, 9.

О НИЛЬПОТЕНТНОСТИ И РАДИКАЛЬНОСТИ

(краткое содержание)

В настоящем сообщении азтор вводит следующие понятия: кардинальный нильпотентный элемент, кардинальный радикальный элемент и S — тотальная кардинально-нильпотентная структура; сообщаются и доказываются несколько теорем, как например:

2. I В комутативном кольце с элементом единицей, всякий нильпотентный элемент является радикаляным элементом.

2. 4 Если функция C конечного порядка и если $\alpha \leqslant z$, тогда всякая S — тотальная структура содержит мноество слётное / кардинально-нильпотентных элементов с экспонлнтом α.

2. 5 В S — тотальной структуре, всякий кардинально-нильпотентный элемент с элементом α является кардинально-радикальным элементом с єкспонентом a с $\alpha' \leqslant \alpha$
есяи

$$\mathcal{C}[(\Theta_i)\downarrow : \{M_k\}\{\Omega\}] = \mathcal{C}[(\Theta_i)\uparrow : \{M_k\}\{\Omega_s\}]$$

ABOUT NILPOTENCE AND RADICAL

(Summary)

In this paper the author introduces the notions: cardinal nilpotent element, cardinal radical element and cardinal nilpotent S-total sub lattice; he states and proves several theorema, among whic:

2.1. In a comutative ring with unity element, any nilpotent element is a radical element.

2.4. If the $\mathfrak{C}$ function is of finite order and if $\alpha \leqslant z$, then any S total lattice contains a numerable set of cardinal nilpotent elements of tehe exponent α.

2.5. In an S-total lattice any cardinal nilpotent element of exponent α is a cardinal radical element of exponent α' with $\alpha' \leqslant \alpha$, if:

$$\mathfrak{C}[(\Theta_i)\downarrow : \{M_k\}\{\Omega\}] = \mathfrak{C}[(\Theta_i)\uparrow : \{M_k\}\{\Omega\}]$$

SUR LE NILPOTENCE ET LE RADICAL

(Résumé)

L'auteur introduit les notions: élement cardinal nilpotent, élement cardinal radical et la sous-structure S-totale cardinale nilpotente; on énonce et démontre quelques théorémes parmi lesquels:

2.1. Dans un anneaux commutatif les l'éléments nilpotents sont des éléments radicaux.

2.4. Si la fonction $\mathfrak{C}$ a l'ordre finit et si $\alpha \leqslant z$, alors toute structure S-totale continent un ensemble numérable des éléments cardinals nilpotents de l'exponent α.

2.5. Dans une structure S-totale tout élément nilpotents de l'exponent α est un élément cardinal radical de l'exponent α' avec $\alpha' \leqslant \alpha$, si

$$\mathfrak{C}[(\Theta_i)\downarrow : \{M_k\}\{\Omega\}] = \mathfrak{C}[(\Theta_i)\uparrow : \{M_k\}\{\Omega_s\}]$$

ÜBER NILPOTENZ UND RADIKAL

(Kurze Zusamenfassung)

In dieser Arbetit werden Begriffe, wie: Kardinal niplotenz Element, kardinal radikal Element und S-totale Kardinal milpotent Unterstrucktur eingeführt; gleichzeitig werden au einige Theoreme bewiessen vie zum Beispiel:

2.1. In einen komutativen Ringt mit Einheitselement ist jedes nilpoent Element auch ein radikales Element.

2.4. Ist din Funktion $\mathcal{C}$ endlichen Ordnung und $\alpha \leqslant z$, so unthält jede S-totale Struktur eine Menge kardinal nilpotenten Elemente mit dem Exponent α, die höchstens azbählbar ist.

2.5. In einer S-totalen Struktur ist jedes kardinal nilpotentes Element mit dem Exponent α' ein Kardinal — radikaler Element mit dem Exponent $\alpha' \leqslant \alpha$ wenn

$$\mathcal{C}\,[(\Theta_i)\downarrow : \{M_k\}\,\{\Omega\}] = \mathcal{C}\,[(\Theta_i)\uparrow : \{M_k\}\,\{\Omega_s\}]$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

THE CONSTRUCTION OF A PERSPECTOGRAPH BASED ON THE PRINCIPLE OF BRUNELLESKI [1]

by AURELIAN TANASESCU

The mechanization of graphical constructions in descriptive geometry and in perspective is a problem of great importance today.

The scientifique thought exercised in this direction has resulted in many designes and constructions of apparatuses, which facilitate and accelerate the completion of graphical works.

For such work, it is necessary to have the simplest possible appliances, both in principle, as well as from their construction point of view.

The apparatus described in this paper achieves the central perspectives of objects or volumes of architecture on vertical, or profile perspective panel, using the principle of Brunelleski. Thus, in figure 1, according to this principle, is given the perspective of the volume of architecture abcd ABCD, defined by its double orthogonal projections. The vertical perspective projection panel has the horizontal trace T and the double orthogonal projections of the sight point are ω and ω'.

The apparatus consists of a central piece P (Fig. 2) to which are articulate two rods T and T', variable as to position, so that the angle between them may be from 0° to 90°.

On rods T_1 and T_2 slide the respective glider C_1 and C_2, which are bound in such a way by an internal transmission system, to rods T_1 and T_2 and part P, so that their distances from the centtral part P remain the same at any sliding of approach to, or departure from P of glider C_1.

Rod T_1 materialises a direction x_1 x_1, parallel to the base x of the object and may be choosen arbitrarily.

Rod T_2 *materialises* the horizontal trace T of the vertical perspective projection panel.

The centre of glider C_1 materializes the rabate on the vertical plane of projection of the horizontal projection of the point, in which the visual ray intersects the vertical panel of perspective projection.

---

[1] Report presented at the 6 scientifical session of the professors of the Polytechnical Institute Bucharest 17 December, 1960.

Ruler R_1 bound to glider C_1 gives in the considered rabate the direction of the vertical line of this rabated point.

On rod T_1 glides independently an other glider C_3, to which is bound ruler R_3 and on this ruler there is glider C_4 with ruler R_2

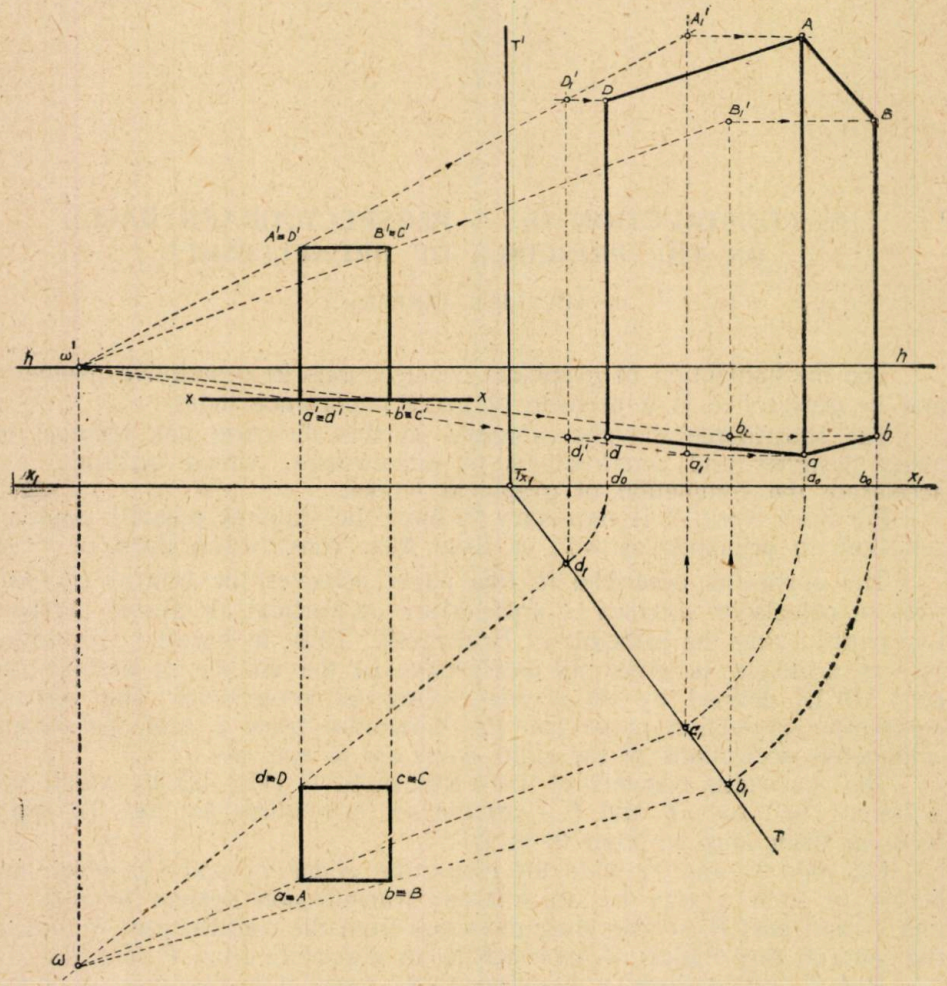


Fig. 1

We notice that position of glider C_3 is always choosen so that the order line of ruler R_3 shall pass through the centre of glider C_2.

The double orthogonal projections ω and ω′ of the sight point are materialized by a system of embedded while which replaces the double orthogonal projections of the considered visual ray.

The wire embedded on ω′ is connected with glider C_4 and the wire embedded on ω is connected with the centre of glider C_2.

In order to understand how the apparatus works, let us consider the double orthogonal projections of the object or of the volume of architecture and let us establish the position of the apparatus and the projections ω and ω′ of the sight point in relation to the effects of perspective which we are pusuing.

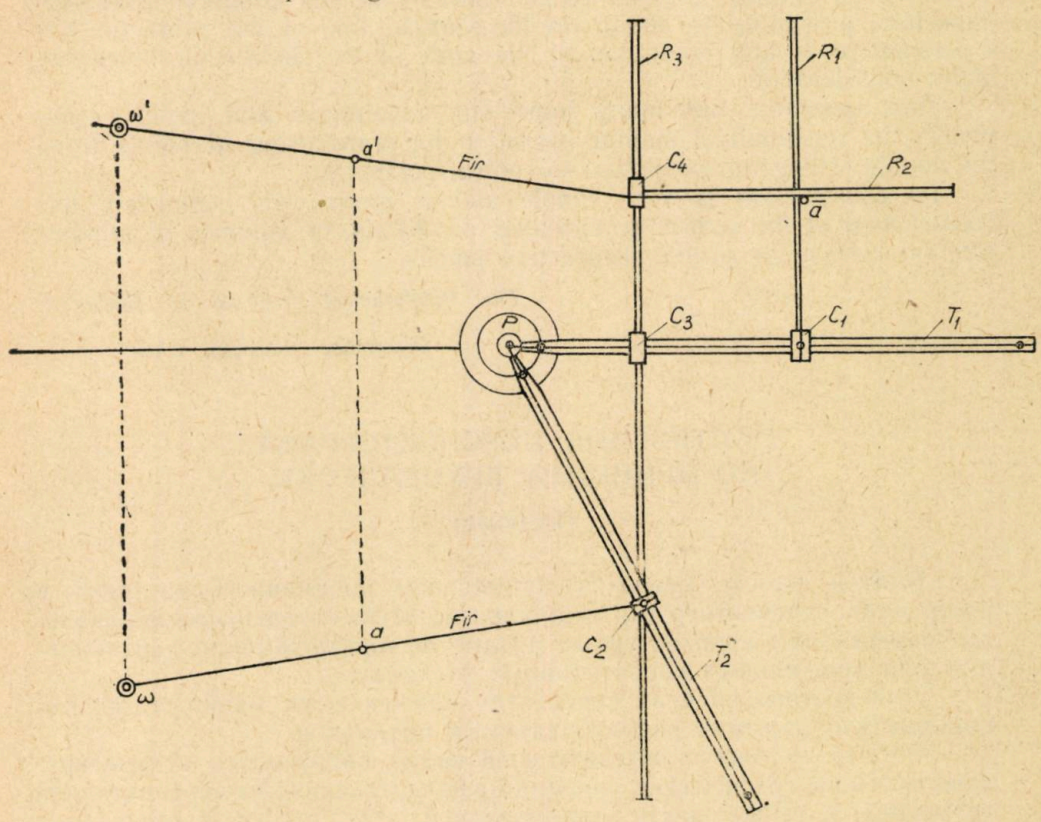


Fig. 2

We notice, that the apex of the horizon depends on the selection of the vertical projection ω′ the centralization of the perspective depends on the selection of the horizontal projection ω and on the position of trace T (rod T_2) while the size of perspective depends on the distance at which the panel is, or the size point in relation to the object under consideration.

In order to build with this apparatus the central perspective $\bar{a}$-, of given point by its double orthogonal projections a and a′, we proceed as follows (fig. 2).

We move glider C_1, so that the wire embedded on ω shall pas through the horizontal projection a.

We bring glider C_3 with its order line in the centre of glider C_2.

We Slide glider C_4 on ruler R_3 so that the wire embedded on ω' shall pass through the vertical projection a'.

At the intersection of rulers R_1 and R_2 we obtain the central perspective $\overline{a}$ of the double orthogonal projection point, given a and a'.

An other sliding of glider C_4 on ruler R_3 in this situation gives the immediate possibility to obtain on the vertical line of the point (a, a') a perspective of any point, i.e. of the apex of the architectural volume under consideration.

This apparatus has many important advantages and avoids completely the repetition of similar operation for transposing of points from the double orthogonal projection to central perspective.

Its construction is very simple and it mechanizes completely the construction of the central perspectives of objects, or volumes of arhitecture on vertical or profile perspective panels.

The Polytechnical Institute of Bucharest

Descriptive Geometry Chair

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТОГРАФА НО ПРИНЦИПУ БРУНЕЛЛЕСКИ

(Резюме)

В этой работе делается применение принципа Брунелески в построении перспектографа, — аппарата, осуществдяющего центральные перспективы архитектурных предметов или объёмов на вертикальных или профильных перспективных картинах.

Для построения етих перспектив применяются двойные ортогональные изображения рассматриваемых предметов.

Работа состоит из вступительной части, касающейся механизированной стадии графических операций в начертательной и перспективной геометрии, а также части описывающей этот апарат и способ его использования.

THE CONSTRUCTION OF A PERSPECTOGRAPH BASED ON THE PRINCIPLE OF BRUNELLESKY

(Summary)

In this report the principle of Brunellesky is applied for the construction of a perspectograph, an apparatus, which realizes the central perspectives of objects, or volumes of architecture on vertical perspective, or profile panels.

For the construction of these perspectives the double orthogonal representations of the objects considered are used.

This report includes an introductory part, referring to the stage of mechanization of graphical operations in descriptive geometry and in perspective, as well as a description of the apparatus and how it works.

LA CONSTRUCTION D'UN PERSPECTOGRAPH BASÉ SUR LE PRINCIPE DE BRUNELLESCHI

(Résumé)

Dans ce travail on applique le principe de Brunelleschi dans la construction d'un perspectograph.

Avec cet appareil nous pouvons construire la perspective centrale sur un tableau perspectif vertical ou de profil d'un objet ou d'un volume d'architecture représeanté par double projection orthogonale.

L'ouvrage contient la description de l'appareil.

DIE KONSTRUKTION EINES PERSPEKTOGRAPHEN AUF GRUND DES PRINZIPES VON BRUNELLESCHI

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird das Prinzip von Brunelleschi auf die Konstruktion eines Perspektographen, welcher zentrale Perspektiven von Gebilden oder Volumina der Architektur auf vertikale oder profile Tafeln realisiert angewendet.

Für die Konstruktion dieser Perspektiven werden die zweifachorthogonalen Darstellungen der betrachteten Gebielde verwendet.

Die Arbeit enthält eine Einleitung in das Studium der Mechanisierung der graphischen Operationen in der darstellenden Geometrie und in der Perspektive.

Gleichzeitig werden eine Beschreibung und eine Gebrauchseinweisung des Apparates gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

INFLUENȚA CONȚINUTULUI DE CENUȘĂ DIN CĂRBUNE ASUPRA CARACTERISTICILOR BRICHETELOR DE CĂRBUNE CU LIANT

I. BLUM, D. IONESCU, FR. BARCA, A. ȘTEFĂNESCU

A — Generalități

Una din principalele probleme ale termoenergeticei noastre este aceea a utilizării raționale a combustibililor clasici ,deoarece pentru o perioadă încă destul de lungă acești combustibiil vor constitui baza energetică principală a țării.

Dezvoltarea rapidă a industriei din țara noastră necesită creșterea corespunzătoare a resurselor termoenergetice. Directivele Congresului al III-lea P.M.R. prevăd mărirea producției de cărbune de la cca. 8 mil. t/an în 1959, la cca. 11,5—12,5 mil. t/an, din care mai mult de jumătate va fi consumată în centrale termoelectrice amplasate în apropierea bazinelor carbonifere. Totodată, cu dezvoltarea rapidă a industriei grele și implicit a celei cocso-chimice, cantități importante de combustibili solizi superiori vor fi susetrase consumului energetic, fiind dirijate spre utilizări tehnologice mai adecvate (cocsificare, semicarbonizare, chimizare, etc.). Lemnul, produsele petroliere, gazele naturale, huilele, capătă utilizări mult mai raționale în noile combinate. Dirijarea acestor materiale către alte sectoare industriale pentru care ele constituie materii prime prețioase, impică însă înlocuirea lor în consumul energetic cu alți combustibili, în general combustibili inferiori, ligniți sau deșeuri de cărbune cu conținut ridicat de steril, rezultate din prepararea combustibililor superiori.

Creșterea de cca. 10 ori a extracției de lignit și cărbune brun în 1958, față de 1938, reflectă tendința justă *de lărgire continuă a sferei de utilizare a lignitilor și de folosire* mai rațională a combustibililor superiori.

Utilizarea ligniților pune însă serioase probleme de ameliorare, datorită calității lor nesatisfăcătoare, aceasta fiind determinată atît de parti-

cularitățile chimice constituționale ale cărbunelui cît și, în special de conținutul radicat de balast, specific ligniților noștri.

Directivele Congresului III prevăd efectuarea de cercetări privind posibilitățile de înobilare și valorificare complexă a ligniților prin deshidratare, brichetare, gazificare sub presiune, precum și alte metode înaintate care să asigure utilizarea cea mai economică a acestui combustibil (1).

Actualmente, sorturile de lignit cu conținut ridicat de cenușă precum și mixtele rezultate din spălarea huilelor se utilizează curent la ardere în stare pulverizată în termocentrale, sau pe grătare special construite pentru astfel de combustibili.

Utilizarea acestor combustibili, în viitor, în focarele casnice și chiar în unele focare industriale cu grătar, implică în primul rînd, o reducere a conținutului de cenușă, și o calibrare în bucăți de granulație uniformă, acceptabile pentru aceste focare, respectiv brichetarea lor.

Brichetarea cu liant bituminos constituie, totodată, și una din principalele căi de ameliorare a acestor cărbuni, deoarece în afară de omogenizarea granulometrică aduce și o ridicare a puterii calorice a combustibilului, ceea ce îmbunătățește condițiile de ardere și face posibilă utilizarea brichetelor ca substituent nu numai al lemnelor, dar mai ales a altor combustibili superiori.

Asupra posibilităților de înobilare și brichetare cu sau fără liant a cărbunilor bruni lemnoși din R.P.R. s-au publicat numeroase lucrări executate la noi în țară, lucrări ce prezintă condițiile de descenușare și brichetare a ligniților [2, 3, 4, 5], s-au analizat aspectele tehnico-economice ale epurării [6] și brichetării lor cu sau fără liant [7, 8].

Deși din punct de vedere tehnic, brichetarea fără liant poate fi aplicată în anumite condiții și ligniților noștri, aspecte economice ale valorificării ligniților pe această cale sînt mai puțin favorabile ca în cazul brichetării cu lianți bituminoși, disponibili în cantități mari în R.P.R.

Brichetarea cu bitum petrolier ca liant aplicată industrial, în țară pentru mărunți de huilă și de cărbune brun a fost încercată în repetate rînduri și la lignit.

Studiul relațiilor dintre principalii factori tehnologici ce condiționează procesul de brichetare cu liant a ligniților — presiune, temperatură și granulație — a fost prezentat în unele lucrări anterioare [9, 10]. Influența unora dintre factorii constituționali (umiditate, cenușă, etc.) asupra condițiilor de brichetare cu liant a unor tipuri de cărbuni superiori indigeni (antraciți, huile, semicocs de huilă) este deasemeni menționată în literatura de specialitate (11, 12, 13). Realizarea pe scară largă industrială, a brichetării cu liant a cărbunilor tineri cu conținut diferit de cenușă ridică în mod acut problema studierii influenței conținutului de cenușă asupra condițiilor de brichetare. Această problemă se pune de asemeni și la brichetarea cu liant a diferitelor sorturi de cărbune, rezutlate la spălarea huilelor tinere neaglutinante din Valea Jiului și mai ales al mixtelor.

În această lucrare se cercetează variația parametrilor de brichetare în funcție de conținutul de cenușă, al cărbunilor, atît pentru huile neaglutinate din Valea Jiului, cît și pentru ligniți, încercînd a se stabili condițiile optime prin care cărbunii de PALV *), cu diverse conținuturi de cenușă și cîteva sorturi din lignitul de Rovinari, pot fi ameliorate prin brichetare și transformate în combustibili utilizabili curent în focarele industriale și casnice.

B — Partea experimentală

În cercetările efectuate s-a considerat util de a se folosi în general, sorturile obținute în spălătoriile de huilă din țară, iar pentru ligniți, diverse clase ce rezultă din sortarea granulometrică. Pentru a avea o gamă mai largă de cărbuni cu conținut de cenușă diferit, s-au preparat și sorturi intermediare prin amestecul sorturilor curent obținute la preparația mecanică.

Astfel, pentru cărbunii de PALV s-au studiat:

— sorturi avînd sub 10% cenușă (cărbuni special spălați)
— sorturi cu cca. 20% cenușă (cărbuni spălați)
— corturi cu peste 40% cenușă (mixte)
— sorturile cu cca. 30% cenușă (amestec de mixte și cărbuni spălați)

În cazul lignitului de Rovinari s-au studiat:

— sorturi cu cca. 20% cenușă (lignit spălat)
— sorturi cu cca. 30% cenușă (blocuri alese)
— sorturi cu peste 35% cenușă (5—80 mm)
— soturi cu peste 45% cenușă 0—5 mm).

În tabela nr. 1, se prezintă caarcteristicile chimico-tehnice ale sorturilor utilizate din cărbuni PALV și Rovinari.

Pentru brichetare s-a folosit granulația sub 10 mm; sorturile de cărbune cu granulație peste 10 mm au fost măcinate astfel ca să avem 85% sub 5 mm și 35% sub 1 mm. Cantitatea de mărunt sub 0,25 mm a fost sub 20%. Astfel de rețete granulometrice au rezultat ca favorabile din cercetări anterioare (10).

Drept liant pentru obținerea brichetelor cercetate s-a utilizat bitumul petrolier neparafinos tip D ale cărui caracteristici sînt prezentate în tabela nr. 2.

Brichetarea sorturilor de cărbune mai sus menționate s-a realizat la presiune de 300 kg/cm², presiune similară celei utilizate în industrie pentru obținerea brichetelor de cărbune cu liant. Temperatura de malaxare a amestecului cărbune + liant a fost de 120°C.

La brichetele obținute s-a urmărit variația rezistenței la rupere prin încovoiere sau compresiune precum și variația rezistenței la apă, prezen-

* PALV — amestec de cărbuni de Petrila, Aninoasa, Lonea și Vulcan așa cum rezultă la IPC-Petrila.

Tabela nr. 1 Caracteristicile sorturilor utilizate din cărbunii PALV și lignitul de Rovinari

Nr. curent	Cărbunele		Analiza tehnică *)					Observații
	Exploatarea	Sortul	A^{anh}	A^a	W_h^a	Masa combustibilă	Q_s^a	
			%	%	%	%	kcal/kg.	
1	PALV	0—10 mm special spălat	8,80	8,65	3,14	88,21	6615	
2	PALV	0—10 mm spălat	18,20	17,65	3,72	78,63	5912	
3	PALV	0—10 mm amestec	35,20	34,98	3,78	61,24	4693	spălat + mixte
4	PALV	0—10 mm mixte	45,50	43,20	3,96	52 84	3963	
5	Rovinari	ocnă	37.30	32,40	13,22**)	54,38	2990	
6	Rovinari	spălat	21,00	18,40	13,20	68,40	3752	spălat în laborator în meoii dense ($Zn\ Cl_2$)
7	Rovinari	bloc. alese	28,60	25,90	12,40	61.70	3393	
8	Rovinari	5—80 mm	33,30	33,00	13,20	53,80	2959	
8	Rovinari	0—5 mm	49,20	43,28	11,60	45,18	2485	

* Simboluri Conf. STAS 398-58.
** Toate probele de Rovinari au fost uscate în laborator.

Tabel nr. 2 Caracteristicile bitumului petrolier neparafinos tip D.

	Specificații	Unități	Valori
1	Punct de înmuiere Inel și bilă (STAS 60—49)	°C	89,5
2	Inflamabilitate (STAS 32—49)	°C	320
3	Apă (STAS 24—49)	%	lipsă
4	Carbon liber	%	0,8
6	Parafină	%	1,7

tîndu-se aceste variații în diagrame, în funcție de conținutul de cenușă a cărbunelui inițial și de cantitatea de liant.

S-a urmărit deasemenea și comportarea la ardere a brichetelor.

Rezistența la rupere prin încovoiere s-a determinat la aparatul Hentze, iar rezistența la compresiune la o presă hidraulică de laborator.

Rezistența la apă a brichetelor obținute a fost determinată prin cantitatea de apă absorbită de brichete, prin menținerea sub apă timp de 24 de ore, raportată la greutatea brichetei.

În diagrama nr. 1 se prezintă variația rezistenței la rupere prin încovoiere a brichetelor de cărbune PALV, cu diverse procente de liant, funcție de conținutul de cenușă al brichetelor, iar în diagrama nr. 2 variația acelorași parametri pentru lignitul de Rovinari.

Variația rezistenței la compresiune a brichetelor funcție de procentul de cenușă este prezentată în diagrama nr. 3 pentru cărbunii de PALV și în diagrama nr. 4 pentru cele din cărbunii de Rovinari.

Rezultatele obținute privind variația rezistenței la apă funcție de conținutul de cenușă al brichetei sînt prezentate în diagrama nr. 5 pentru brichetele obținute din cărbuni de PALV și în diagrama nr. 6 pentru cărbunii de Rovinari.

Din analiza datelor experimentale prezentate în diagramele de mai sus rezultă următoarele:

a. — Rezistența mecanică (încovoiere, compresiune) a brichetelor obținute din toate sorturile de lignit și de cărbuni de PALV crește continuu cu creșterea procentului de liant în intervalul studiat: 4—14% liant, dar scade cu creșterea conținutului de cenușă pînă la cca. 30%. Scăderea rezistenței este mai puternică la sorturile de lignit și mai mică în cazul cărbunilor de PALV.

Scăderea rezistenței la rupere s-ar putea explica prin caracterele diferite de aderență ale granulelor de cărbune și de steril față de liant. Această heterogenitate a amestecului crește continuu cu creșterea conținutului de steril pînă la o anumită limită (25—35%), cauzînd înrăutățirea caracteristicilor mecanice ale brichetelor; dincolo de această limită, la procente ridicate de cenușă, aproape fiecare granulă de cărbune ajunge să fie învăluită într-o peliculă de steril anorganic. În acest caz diferențele proprietăților de umectare și tensio-active ale suprafețelor diferitelor granule atenuîndu-se, se obține din nou o creștere simțitoare a rezistenței mecanice a brichetelor cu conținut ridicat de cenușă [35—45%]. În acest fel, alura acestor curbe se poate reprezenta aproximativ prin relația:

$$y = a + bx + cx^2 \qquad (1)$$

în care

$$y = \varphi(Ri) \quad \text{și} \qquad (2)$$

$$x = \psi(A) \qquad (3)$$

fiind funcții liniare ale parametrilor considrați: rezistența la încovoiere R și cenușa brichetei A. Constantele a, b și c depind de cărbune și de caracteristicile sale chimico-structurale.

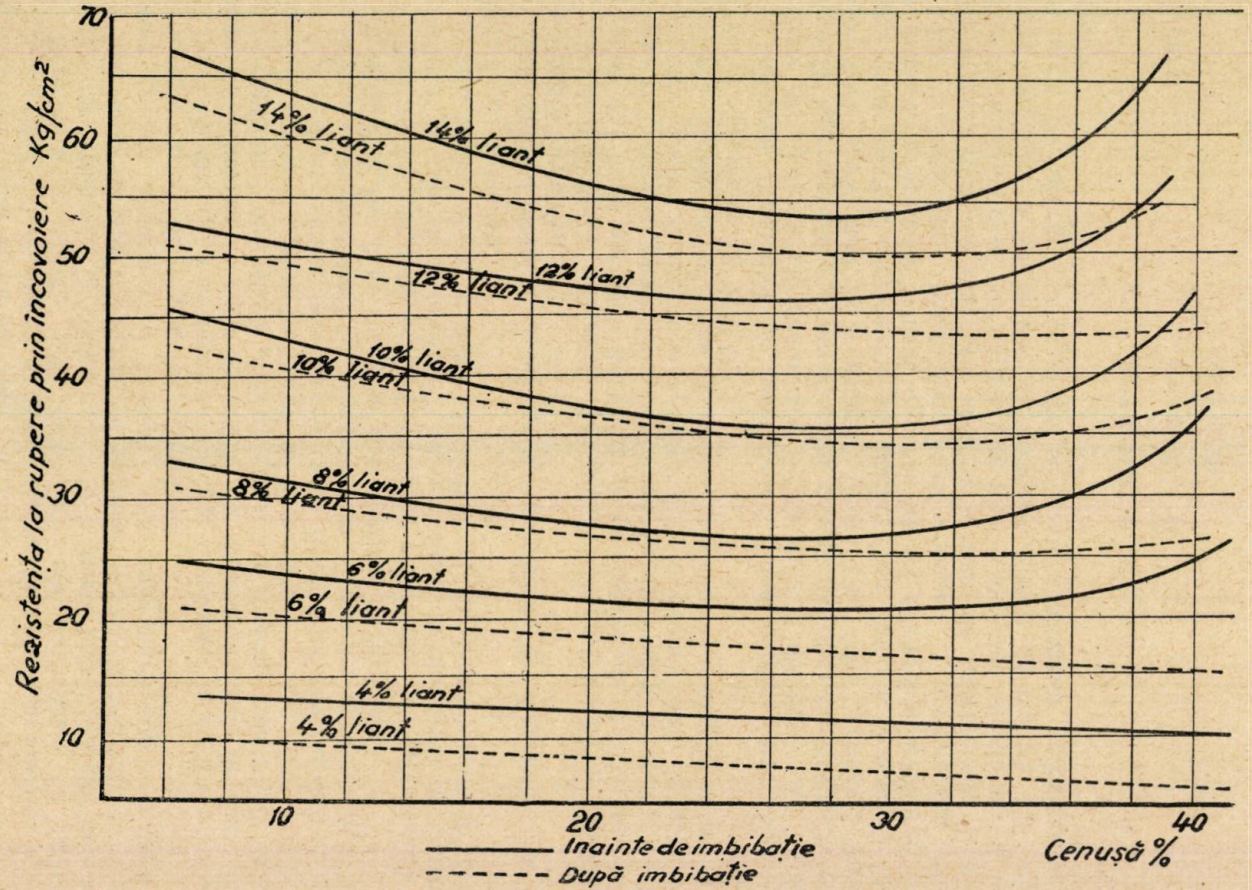


Diagrama 1. Variația rezistenței la rupere prin încovoiere, înainte și după îmbibație cu apă a brichetelor obținute din cărbuni de PALV cu diverse procente de liant, funcție de conținutul de cenușă.

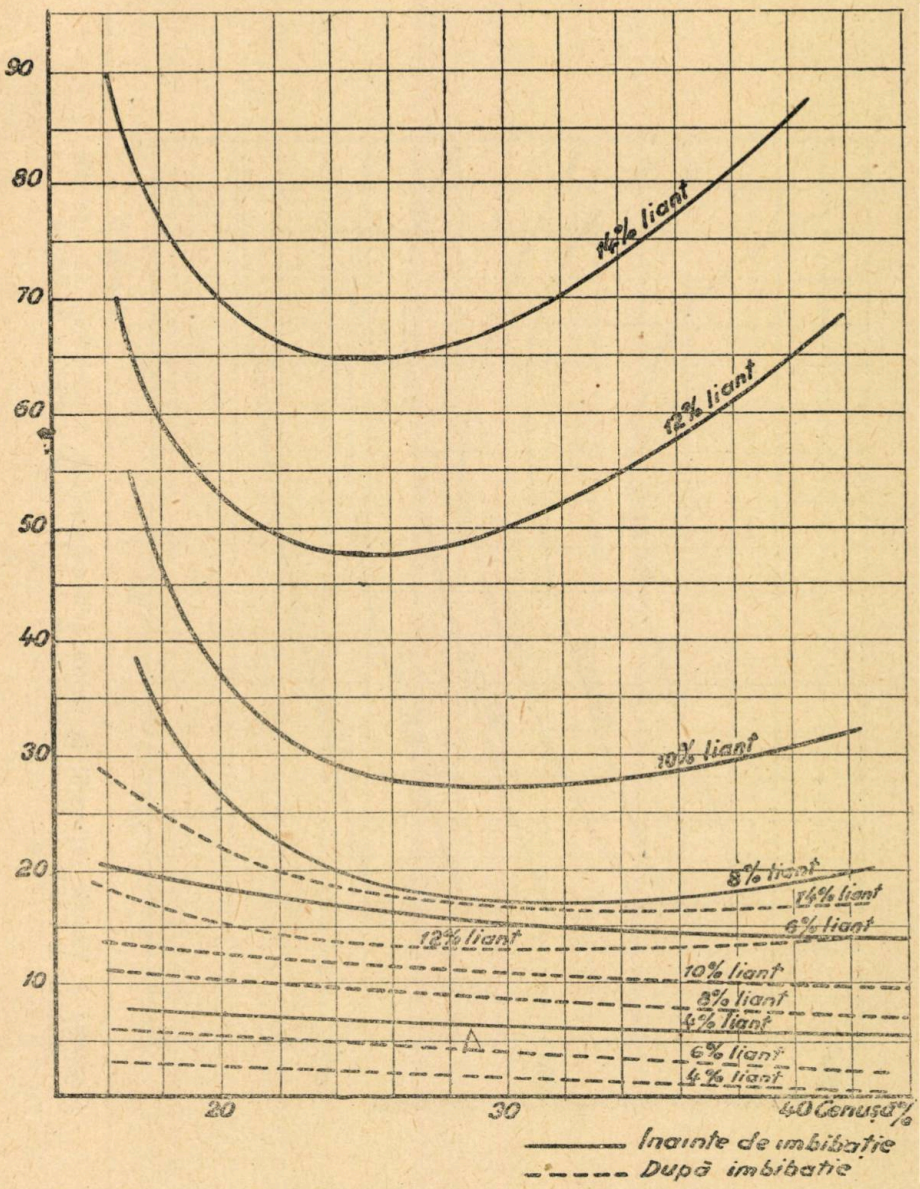


Diagrama 2. Variația rezistenței la rupere prin încovoiere înainte și după îmbibație cu apă a brichetelor obținute din cărbunii de Rovinari funcție de conținutul de cenușă.

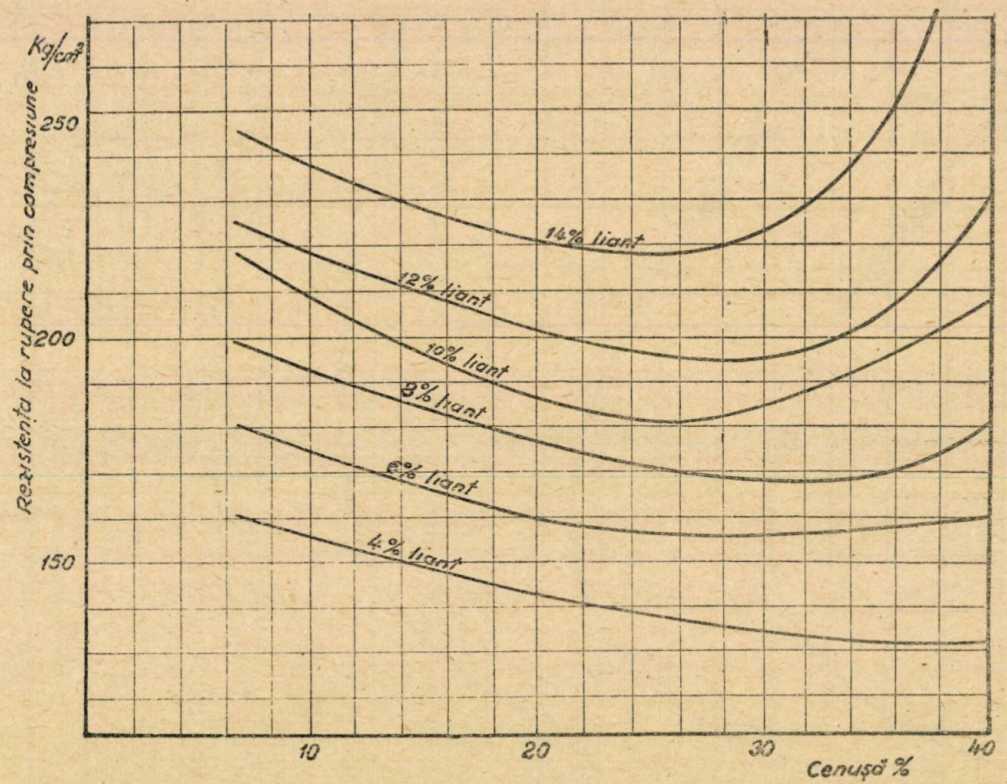


Diagrama 3. Variația rezistenței la rupere prin compresiune a brichetelor obținute din cărbunii de PALV cu diverse procente de liant funcție de conținutul de cenușă.

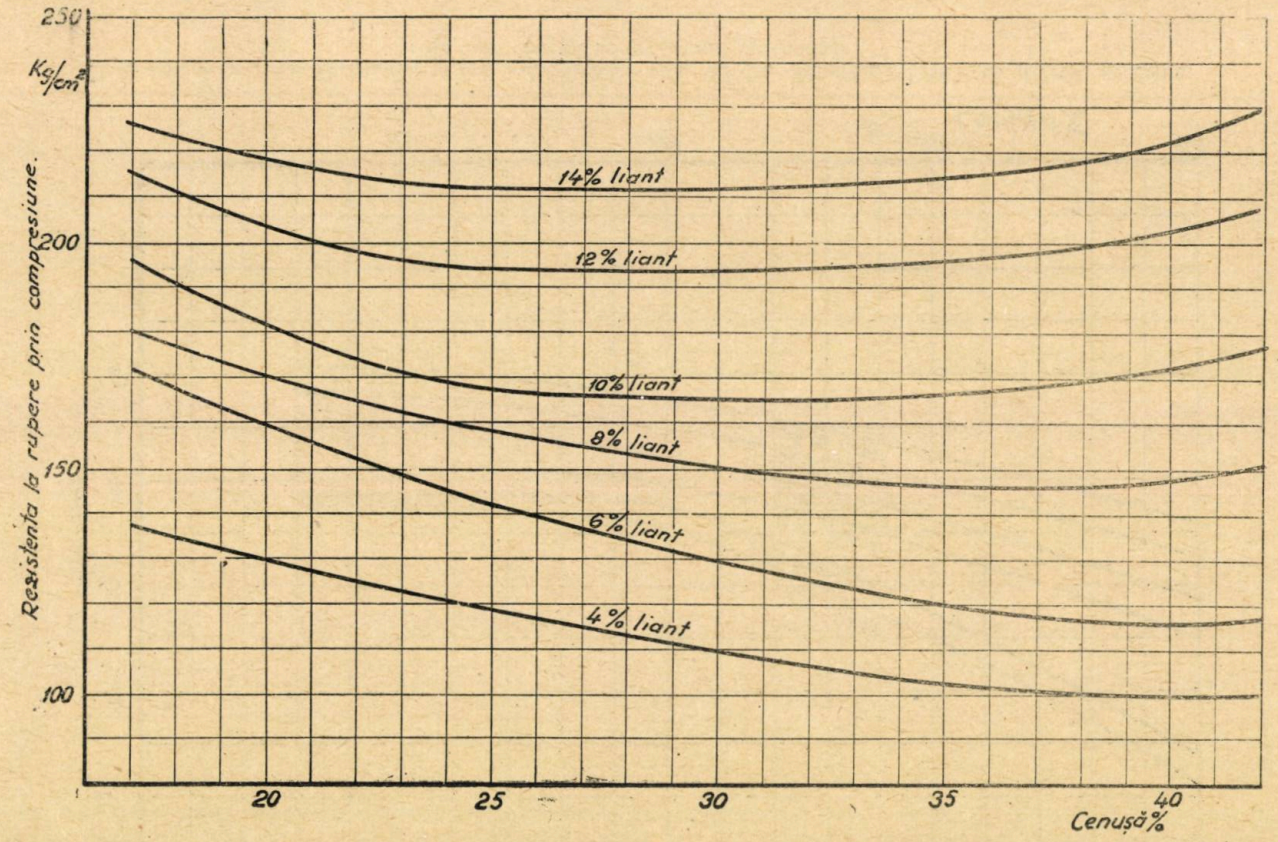


Diagrama 4. Variația rezistenții la rupere prin compresiune a brichetelor obținute din cărbuni de Rovinari cu diverse procente de liant funcție de conținutul de cenușă.

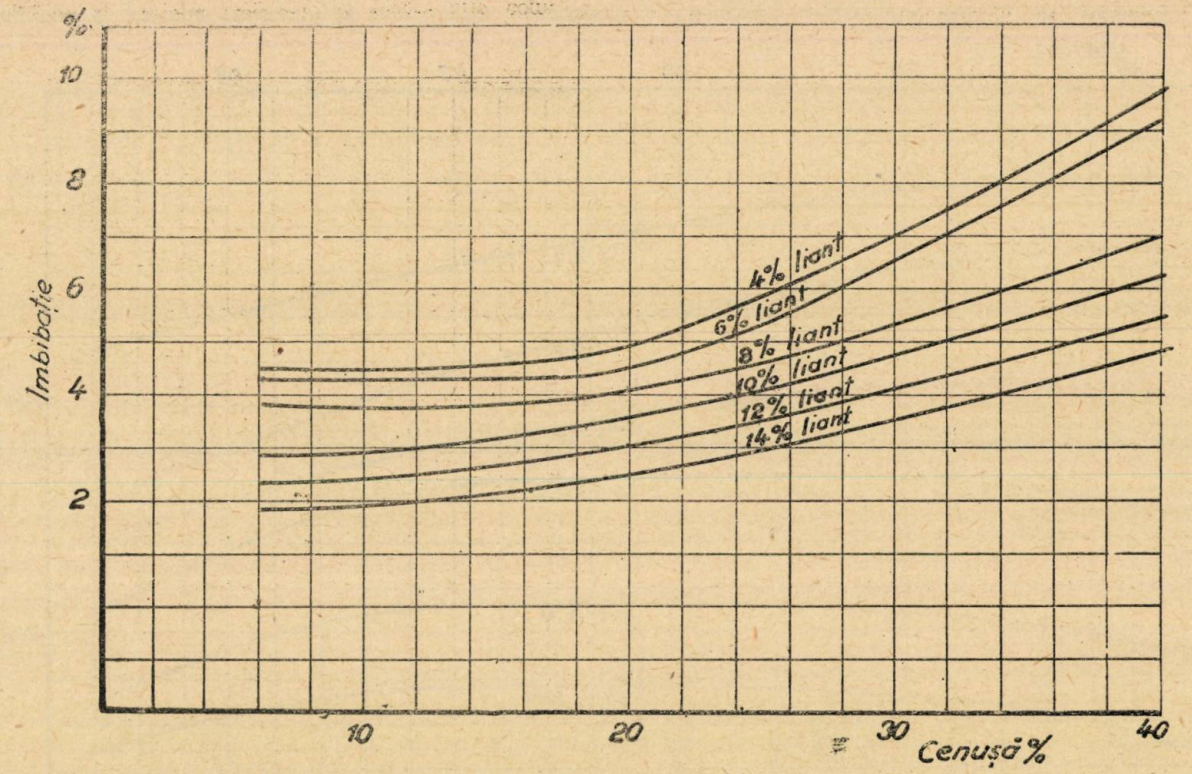


Diagrama 5. Variația rezistenței la apă a brichetelor obținute din cărbuni de PALV cu diverse procente de liant funcție de conținutul de cenușă.

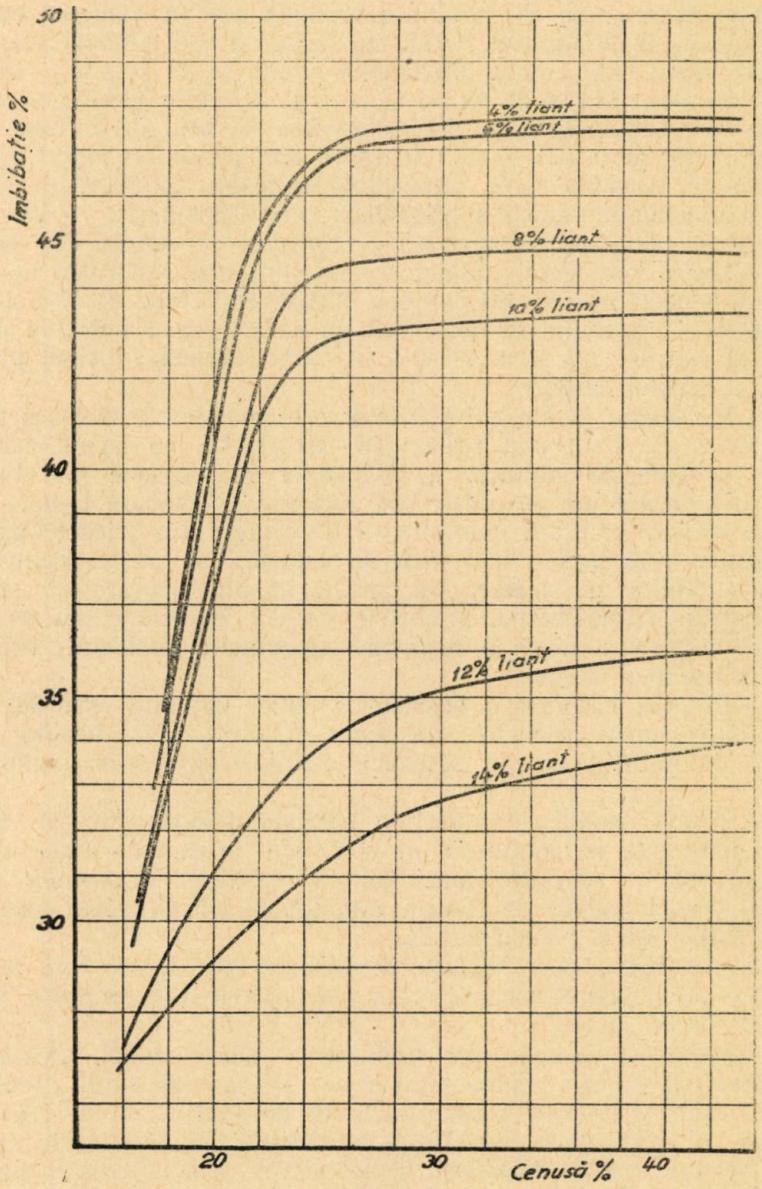


Diagrama 6. Variația rezistenții la apă a brichetelor obținute din cărbunii de Rovinari cu diverse procente de liant funcție de conținutul de cenușă.

Rezistenţa la apă a brichetelor scade continuu, în toate cazurile, la creşterea conţinutului de steril din brichetă sau la scăderea cantităţii de liant folosite în brichetare. Astfel îmbibaţia cu apă a brichetelor creşte cu cca. 60—80% cînd cenuşa brichetelor creşte de la 0—40%, sau cînd procentul de liant scade de la 14% la 6%. Valorile îmbibaţiei cu apă se menţin la nivele acceptabile, 4—9%, pentru brichete din cărbuni PALV, dar devin foarte mari (25—34%) în cazul brichetelor din lignit de Rovinari, chiar la folosirea unor importante cantităţi de liant (14%). De asemeni rezistenţa mecanică a brichetelor, după îmbibaţie, — vezi fig. 1 şi 2 — scade coninuu cu creşterea procentului de cenuşă din brichetă. Şi aici scăderea rezistenţei mecanice este mult mai puternică la brichetele de lignit decît la cele din cărbune PALV. Structura de cărbune brun semipămîntos a lignitului de Rovinari, cu caracteristici hidrofile pronunţate atît la cărbune cît şi la sterilul însoţitor, explică suficient puternica îmbibaţie a acestui cărbune.

c. — Rezistenţa la foc a brichetelor este mai bună în cazul folosirii unor procente de liant mai reduse (6—10%). La un adaos mai mare de liant perioada de înmuiere a brichetelor în foc este mai lungă şi pericolul deteriorării lor pe grătar este mai mare. Totodată trebuie remarcat că pe măsura creşterii conţinutului de cenuşă din brichete pierderile de randament prin ardere mecanică incompletă vor creşte. Pentru ameliorarea condiţiilor de ardere, s-a arătat în altă lucrare că printr-un post tratament termo-chiimc, brichetele capătă însuşiri calitative excepţionale, de natură a aduce o rezolvare elegantă a problemei brichetării cu liant a ligniţilor noştri.

d. — Puterea calorică a brichetelor astfel obţinute este de 3000—4500 kcal/kg pentru brichetele de lignit şi 4000—6500 kcal/kg pentru brichetele de huilă, deci pot satisface cerinţele diverselor instalaţii de ardere.

e. — Ţinînd seama de variaţiile caracteristicilor calitative ale brichetelor, în funcţie de conţinutul de steril din brichetă, — aşa cum s-a arătat mai sus — se poate considera că realizarea brichetelor de cărbuni, din sorturi bogate de cenuşă este tehnic posibilă atît pentru cărbunii de PALV cît şi pentru ligniţi.

Pentru obţinerea unor brichete de calitate este de dorit să se aplice ligniţilor o prealabilă descenuşare, în cazul cînd considerentele tehnico-economice permit aceasta.

f. — Pentru obţinerea unor brichete cu caracteristici satisfăcătoare în intervalul de cenuşă studiat procentele minime de liant necesare în brichetare sînt de 5—6% pentru cărbunii de PALV, de 6—7% pentru mixtele de PALV şi de 10—12% la cărbunii de Rovinari, cu menţiunea pentru brichetele Rovinari, a necesităţii unei depozitări menajate, ţinînd seama de rezistenţa redusă la îmbibaţie.

g. — În acest fel, brichetarea mărunţilor de lignit şi a mixtelor aduce, în circuitul economic — în deosebi pentru consum casnic — cantităţi importante de combustibili inferiori ameliorati şi degrevează cantităţi importante de lemne şi combustibili superiori, utilizabili mai raţional în alte sectoare.

BIBLIOGRAFIE

1. Directivele Congresului al III-lea P.M.R. cu privire la planul de dezvoltare a economiei naționale pe anii 1960—1965 și la schița planului economic de perspectivă pe 15 ani. Editura Politică, București, 1960, p. 15.
2. *I. Blum, Fr. Bolchi, G. Muscă:* Forschungen über die bindemittellöse Brkettierung der holziger Braunkolhen (Lignite). Freiberg. Forsch. 90 Iunie 1958, p. 97—112.
3. *I. Blum, Fr. Bolchi, G. Muscă:* Versuche sur Verbesserung der Qualität der aus holzigen Braunkohlen (Ligniten) erhaltenen bindemittellösen Briketts durch thermische Behaudlung. Freiberg, Forsch. A. 98 Aug. 1958 p. 168—167.
4. *L. Blum, Al. Bădărău, B. Bercovici:* Studiu asupra posibilităților de reducere a conținutului de steril din ligniți prin spălare cu lichide grele. II — Încercări de descenușare a cărbunilor de Rovinari. Studii și cercetări de energetică Nr. 3, 1957.
5. *I. Blum, Al. Bădărău, B. Bercovici:* Studiu asupra posibilităților de reducere a conținutului de steril din ligniți prin spălare cu lichide grele. III. — Cercetări privind descenușarea mărunților de lignit din bazinul carbonifer Sărmășag. Studii și cercetări de Energetică nr. 1, 1961.
6. *I. Blum, M. Rosenberg, Al. Bădărău:* Cu privire la unele aspecte tehnico-economice ale prelucrării și valorificării cărbunilor bruni lemnoș (ligniți) din R.P.R. II. Epurarea pe cale umedă a ligniților. Revista Minelor nr. 4 (1957).
7. *I. Blum* și *M. Rosemberg:* Idem Rev. Minelor 10 (1957) nota IV, p. 462—466.
8. *I. Blum* și *M. Rosemberg:* Idem Rev. Minelor 11 (1957) Nota V, p. 525—531.
9. *I. Blum, M. Rosemberg* și *S. Kell:* Brichetarea ligniților xiloizi cu smoală — Proces tehnologic ICECHIM, 1951 — nepublicat.
10. *I. Blum, M. Rosemberg* și *Opriș Maria:* Studiul relației dintre presiunea de brichetare — și granulometria cărbunelui, la brichetare cu liant a cărbunelui. Rev. Minelor ASIT, nr. 4, 1959.
11. *Colev E.:* „Brichetarea cărbunilor romînești" IRE, 1935.
12. *I. Ștefănescu:* În problema bricheturii fără liant a unor huile din R.P.R., Rev. Minelor — ASIT, nr. 8, 1955.
13. *I. Blum, M. Rosemberg* și *M. Calotă:* Studiul variației procentului de liant în funcție de creșterea procentului de cenușă din semicocs la brichetarea semicocsului de lignit cu liant Rev. Minelor. ASIT, nr. 12, 1957.

ВЛИЯНИЕ ЗОЛЬНОСТИ, ИМЕЮЩЕЙСЯ В УГЛЕ НА КАЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УГОЛЬНЫХ БРИКЕТОВ СО СВЯЗУЮЩЕМ

(Резюме)

В работе рассматривается зависиность химических и физико-механических характеристик уголвных брикетов со связующим от роста зольности, имеющейся в угле.

Опыты, произведенные углеи долины жиу и ровинарские лигнитом доказывают возможность получения топлива для домашного и промышленого потребления с харошими качественныци характеристиками даже прй относительно высокой зольности ($A^1 = 10 - 50\ \%$) брикетирующего угля.

INFLUENCE OF THE CONTENTS OF ASHES IN COAL OF THE CHARACTERISTICS OF BRIQUETTES USING A BINDER

(Summary)

This paper shows the variation of chemical, physical and mechanical characteristics of briquettes using a binder, in function of growing contents of ashes, A , in the coal within the range of A $= 10 \ldots 50\%$.

The experimental tests on mineral coal from the valley of the Jiu and on lignites from Rovinari demonstrate the possibility of obtaining a household and industrial fuel owning satisfactory qualities even if the initial contents of ashes in the coal are high.

INFLUENCES DU CONTENU EN CENDRES DU CHARBON SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES BRIQUETTES A LIANT

(Résumé)

Le travail présente la variation des carcatéristiques physico-chimiques et mécaniques des briquettes de charbon à liant, en fonction de la teneur en cendres, A , du charbon dans l'intervalle A $= 10 \ldots 50\%$.

Les essais expérimentaux avec des houilles de la vallée du Jiu et des lignites de Rovinari démontrent qu'il est possible d'obtenir un combustible ménager et industriel aux caractéristiques satisfaisantes, même si le charbon soumis au briquettage a une teneur initiale élevée de cendres.

EINFLÜSS DES ASCHENGENHALTS DER KOHLE AUF DIE EIGENSCHAFTEN DER BINDEMITTELBRIKETTS

(Zusammenfassung)

In vorliegender Arbetit wird der Einfluss des wachsenden Aschengehalts der Brikettierungskohle — im Anchenbereich A = 10...50% — auf die chemischen und physikalischen der Kohlen-Bindemittelbriketts erörtert.

Die mit Seinkohlen aus dem Jiu-Tal und Ligniten von Rovinari erzielten Versuchsergebnisse zeigen die Möglichkeit der Herstellung einen für Hausbrand = und Industriezwecke geeigneten Brennstoffes mit entsprechenden Eigenschaften auch im Fall einer Ausgangskohle mit hohem Aschengehalt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

OBȚINEREA ELECTROCHIMICĂ A NAFTENATULUI DE COBALT

LYA BLUM LAZĂR

Metodele de preparare ale sărurilor de Co, Mn, Pb, Zn ale acizilor naftenici au format obiectul a numeroase patente. Importanța acordată acestor procedee este justificată de întrebuințările acestor naftenați, izolați sau sub formă de combinații a două-trei metale, ca sicativi deosebit de eficace în industria lacurilor, vopselelor, cernelurilor de imprimerie, etc.

E cunoscut faptul că sicativii cei mai activi sînt cei care prezintă un conținut ridicat în metal, cu condiția ca metalul să se afle într-o formă solubilă. În comparație cu resinații și linoleații, sărurile acizilor naftenici — la cantități echivalente de sicativ — prezintă un conținut mai ridicat în metal, datorită greutății moleculare mici a compusului organic, deci și o putere sicativă superioară. În afară de aceasta, naftenații se mai caracterizează printr-o serie de proprietăți remarcabile ca regularitate a compoziției, stabilitate în timp, bună solubilitate în solvenți volatili, în ulei de in, etc.

În lucrarea de față ne-am propus să studiem în primul rînd problema obținerii naftenatului de cobalt, deoarece este sicativul cel mai activ dintre naftenații mai sus enumerați (de regulă singurul întrebuințat izolat și acela care se adaugă în mod curent în combinațiile a două-trei metale pentru a ridica puterea de sicativare a celorlalți naftenați), prezintă largi utilizări în calitate de catalizator la o serie de sinteze organice, e utilizat ca dispersant pentru a reduce formarea depunerilor la motoarele cu ardere internă.

Tabelul 1

Denumirea sicativului	Conținutul în Co, %
Resinat de cobalt topit	2,2 — 2,5
Resinat de cobalt precipitat	6,2 — 6,5
Linoleat de cobalt precipitat	9,2 — 9,5
Naftenat de cobalt	12 — 12,5

Din tabelul 1 rezultă conținutul ridicat în metal al naftenatului de cobalt față de resinații și linoleații de cobalt.

Procedeele cunoscute pînă în prezent pentru obținerea naftenaților pe cale chimică se bazau, în principiu, pe *două* metode de lucru :

a. *Obținerea naftenatului pe cale topită* prin încălzirea pulberilor metalice, oxizilor, hidroxizilor sau carbonaților cu acizi naftenici [1—6]. Unele procedee indică desfășurarea reacției în prezența unui solvent convenabil (white-spirit, toluen) naftenatului format, dar inert pentru metalul sau oxidul care intră în reacție.

b. *Obținerea naftenatului prin precipitare din naftenatul alcalin* cu o soluție a sării metalului sicativ [6—20]. Acizii naftenici se saponifică, conform indicelui de aciditate, cu o sluție de NaOH, la temperatura de fierbere, sub agitare. Soluției de naftenat de sodiu i se adaugă o soluție a sării metalului sicativ ; printr-o reacție de dublă descompunere precipită naftenatul respectiv. Precipitatul este spălat cu apă și uscat. Reacția poate avea loc și în prezența unui solvent nemiscibil cu apa, dar în care se dizolvă sicativul obținut ; se obține astfel o soluție concentrată a naftenatului respectiv într-un solvent adecuat.

Metoda de obținere a naftenaților pe cale topită este mai puțin indicată comparativ cu metoda prin precipitare, deoarece nu permite obținerea unui produs perfect omogen ; acesta conține urme de metal neintrat în reacție.

Procedeul curent pentru obținerea naftenatului de cobalt constă în precipitarea naftenatului alcalin cu soluția unei sări de cobalt (sulfat, clorură, acetat, etc.).

În această lucrare am căutat să stabilim o metodă directă, *pe cale electrochimică,* de obținere într-o singură fază a naftenatului de cobalt, eliminîndu-se astfel o serie de etape intermediare de lucru, necesare în metoda chimică prin precipitare.

Pentru aceasta, am efectuat electroliza unei soluții de NaCl, în care s-au emulsionat acizii naftenici, cu anozi solubili de Co. La electroliza unei soluții de NaCl cu anozi de Co au loc următoarele procese de electrod :

La anod: $Co - 2e \rightarrow Co^{2+}$

În soluție: $Co^{2+} + 2Cl^- \rightleftharpoons CoCl_2$

La catod: $2H_2O + 2e \rightarrow H_2 + 2OH^-$

În soluție: $2OH^- + 2Na^+ \rightleftharpoons 2NaOH$

Dacă electroliza are loc în prezența acizilor naftenici aceștia reacționează cu NaOH și $CoCl_2$, obținîndu-se naftenatul de cobalt :

$$2\,RCOOH + 2\,NaOH \rightarrow 2\,RCOONa + 2\,H_2O$$

$$2\,RCOONa + CoCl_2 \rightarrow (RCOO)_2Co + 2\,NaCl$$

Ca reacție secundară ar putea să se formeze $Co(OH)_2$ care la rîndul său reacționează cu acizii naftenici formînd naftenatul de cobalt după schema :

$$CoCl_2 + 2\,NaOH \rightarrow Co(OH)_2 + 2\,NaCl$$

$$2\,RCOOH + Co(OH)_2 \rightarrow (RCOO)_2Co + 2\,H_2O$$

Procesul de formare al naftenatului de Co este deci un proces chimic de precipitare a acizilor naftenici cu ionii de cobalt obținuți prin dizolvare anodică.

Procesul total din celulă este:

$$Co + 2\,RCOOH + 2f \rightarrow (RCOO)_2Co + H_2$$

Drept catozi am folosit tot plăci de cobalt, deoarece supratensiunea hidrogenului pe cobalt este mică, iar în cazul cînd precipitatul ar adera la anod, fenomenul se poate înlătura prin inversarea polilor. Pentru a evita orice acțiune a hidrogenului s-a utilizat o densitate de curent catodică cu mult superioară celei anodice.

Partea experimentală.

Pentru stabilirea condițiilor optime de electroliză la prepararea naftenatului de cobalt, am folosit un montaj obișnuit de electroliză. Curentul continuu era furnizat de un redresor cu plăci de seleniu; în circuit s-a introdus un reostat, un ampermetru și un voltmetru. Drept electrolizor s-a folosit un bac de sticlă, electrozi formați din plăci de cobalt obținute electrolitic, iar ca electrolit o soluție de NaCl în care s-au emulsionat acizi naftenici distilați cu indice de aciditate 240. Celula de electroliză a fost introdusă într-un termostat pentru a se menține o temperatură de lucru constantă.

Pentru a obține o emulsie fină de acizi naftenici în electrolit s-a utilizat un agitator cu o turație de circa 1000 rot/min.

Din determinările experimentale efectuate, variind diferiți parametri fizico-chimici: densitatea de curent, temperatura, concentrația soluției de NaCl, raportul acizi natfenici/soluție NaCl, s-au sintetizat condițiile optime de electroliză, care sînt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2

Electrozi Co				Agitare energică				
D_A A/dm²	Uv	Temp. °C	Acizi naftenici $I_A = 240$ g	Electrolit NaCl g %	Acizi naftenici / sol. NaCl	Q_{Ah}	η_c%	kWh/kg
3	4	90	15	3	1g/10 cc	1,8	94	0,5

Rezultatele experimentale conduc la concluzia că procesul decurge cu un randament de curent bun și un consum specific de energie redus.

După electroliză, naftenatul de cobalt este filtrat și spălat la trompă pînă ce apa de spălare nu mai prezintă reacția ionului clor cu $AgNO_3$. După spălare are loc uscarea produsului care se poate face:

a. la etuvă la 130°—140° timp de 20—30 ore, sau

b. distilarea în vid pe baie de ulei. Baia trebuie să aibă temperatura de 130°—140°. Operația de uscare durează în acest caz 2—3 ore. Prin distilarea în vid se îndepărtează și eventualele urme de ulei pe care le-ar mai păstra naftenatul de cobalt.

Materiile prime care intră în procesul de fabricație sînt: cobaltul, acizii naftenici, clorura de sodiu și apa. Clorura de sodiu și apa se consumă inițial la prepararea electrolitului de concentrație determinată și după aceea la reciclarea electrolitului pentru compensarea pierderilor provenite din spălarea produsului. Deci în final se consumă numai cobalt,

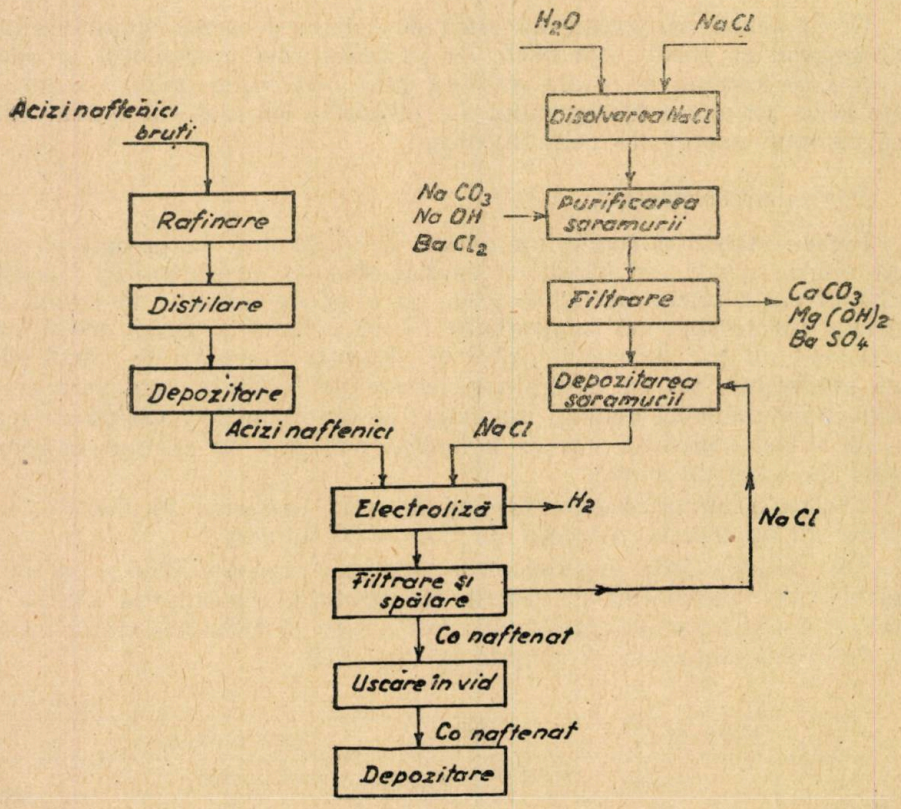


Fig. 1

acizi naftenici și energie electrică. Rezultă naftenatul de cobalt și hidrogen electrolitic.

Mersul operațiilor la obținerea naftenatului de cobalt pe cale electrolitică se poate vedea în fig. 1.

Produsul obținut este de culoare violetă, de duritate mare, casant, cu un conținut de 12% Co. Este solubil în toluen, white-spirit (100 g naftenat de Co la 100 g solvent), ulei de in (5 g naftenat de Co la 100 g solvent).

Pentru determinarea puterii de uscare s-a dizolvat 0,5 g% naftenat de cobalt în ulei de in încălzit la 120—150° și s-au întins 5 picături pe o placă de sticlă de 100×150 mm. Pelicula s-a uscat complet după 6 ore.

Produsul corespunde indicațiunilor STAS și este analog naftenatului de cobalt obținut pe cale chimică.

Concluzii.

1. S-a studiat obținerea naftenatului de cobalt pe cale electrolitică, utilizînd drept electrolit acizii naftenici emulsionați într-o soluție de NaCl și anod solubil de cobalt.

2. Condițiile optime de electroliză sînt următoarele: electrozi de Co, electrolit soluție de NaCl 3%, raportul acizi naftenici/soluție NaCl 3% 1 g/10 cc, densitatea de curent anodică 3 A/dm^2, temperatura 90°C. În aceste condiții se atinge un randament de curent $\eta_c = 94\%$ și un consum specific de energie W =0,5 kWh/kg.

3. Procedeul este economic din următoarele considerente:

a. procesul decurge cu un randament de curent bun și un consum specific redus de energie electrică.

b. clorura de sodiu consumată inițial este o materie primă ieftină.

c. se poate lucra în sistem continuu prin reciclarea electrolitului.

d. instalația este simplă.

4. În comunicările viitoare se vor prezenta datele obținute atît prin extinderea metodei în vederea preparării naftenaților, cu anozi solubili din alte metale, precum și cele realizate în prezența unor solvenți specifici nemiscibili cu apa.

Laboratorul de Electrochimie
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Ruth E. Asser:* D.R.P. 327 374, 8.X.1920; C. II, 130, 1921.
2. *G. M. Fischer:* A. P. 2 071 862, 23.II. 1937; C. II, 145, 1937.
3. *Kenneth E. Long:* A. P. 2 157 768, 9.V.1939; C. II, 1390, 1939.
4. *M. Nowak, A. Fischer:* U. S. 2 584 041, 29.I.1952; C. A. 4256i, 1952.
5. *G. Marwedel:* D. A. S. 1 018 409, 31.X.1957; C. A. 7743h, 1958.
6. *C. Jäger:* D. R. P. 352 356, 25.IV.1922; C. IV, 167, 1922.
7. E. P. 335 863, 23.X.1930; C. I. 721, 1931.
8. Oe. P. 123 670, 10.VII.1931; E. P. 339 865, 8.I.1931; C. II, 3552, 1931.
9. E. P. 367 666, 17.III.1932; C. II, 1569, 1932.
10. E. P. 380 360, 6.X.1932; C. I. 683, 1933.
11. *F. Meidert, H. Schatz:* A.P. 1 916 805, 4. VII.1933; C. I., 617, 1934.
12. *F. Pahl, B. Isenbeck:* A. P. 1 974 507, 25.IX.1934; C. I. 1780, 1935.
13. E. P. 426 643, 2.V.1935; C. I., 3584, 1936.
14. *F. Meidert:* D.R.P. 647 913, 16.VII.1937; C. II, 4115, 1937.

15. *F. Meidert:* D.R.P. 648 511, 11.VIII.1937; C. II, 4115, 1937.
16. *V. Shipp:* A. P. 2 091 020, 24.VIII. 1937; C. I, 1921, 1938.
17. *A. Drinberg, A. Parfenowa:* Masloboino-jirovoe Delo 15, nr. 3, 29—32, 1939; C. I, 633, 1940.
18. *F. Nelson:* A. P. 2 206 002, 25.VI.1940; C. I, 581, 1941.
19. *W. Warlamow, S. Bodjashina, N. Tichomirowa:* Masloboino-jirovoe Delo 16, nr. 5, 42—45, 1940; C. II, 540, 1941.
20. *H. Schiller:* U. S. 2 389 873, 27.XI.1945; C. A. 1335³, 1946.

ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЕ ПОЛУЧЕНИЕ НАФТЕНАТА КОБАЛЬТА

(Резюме)

В настоящей работе представляе-тся новый метод прямого получения нафтената кобальта электрохимическим путём, при электролизе раствора NaCl в присутствии эмульсии нафтеновых кислот, с растворимыми кобальтовыми анодами.

Устанавливаются оптимальные условия электролиза; процесс протекает с хорошим выходом тока и с небольшим удельным потреблением электроэнергии.

THE ELECTROCHEMICAL OBTAINMENT OF COBALT NAPHTHENATE

(Summary)

The paper presents a new direct method for obtaining cobalt naphthenate, electrochemically, by the electrolysis of a solution of NaCl in the presence of an emulsion of naphthenic acids with soluble cobalt anodes.

The best conditions of electrolysis have been established; the process has been carried out with a good current yield and a low specific energy consumption.

L'OBTENTION ÉLECTROCHIMIQUE DU NAPHTHENATE DE COBALT

(Résumé)

Au cours de cet exposé on présente une nouvelle méthode d'obtention du naphthenate de cobalt, à voie électrochimique, par l'électrolyse d'une solution d'acides naphthéniques avec des anodes solubles de cobalt.

On établit les conditions optima d'électrolyse; le processus se déroule avec un bon rendement de courant et une consommation spécifique réduite d'énergie.

ELEKTROCHEMISCHE GEWINNUNG VON KOBALTNAPHTHENAT

(Zusammenfassung)

In der Arbeit wird eine neue direkte Methode zur Gewinnung von Kobaltnaphthenat auf elektrochemischem Wege gezeigt und nämlich durch Elektrolyse einer Lösung von NaCl in Gegenwart einer Emulsion von Naphthensäuren, mit löslichen Kobaltanoden.

Die optimalen Elektrolysebedingungen werden festgelegt. Der Prozess verläuft mit einer guten Stromausbeute und einem verminderten spezifischen Verbrauch an Elektroenergie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

ON THE THERMAL THEORY OF MASS TRANSFER IN RECTIFICATION OF MIXTURES

by E. RUCKENSTEIN, O. SMIGELSCHI,

The mass transfer process occuring in a rectification column is usually represented by means of a diffusion model, on wich basis the following equations result :

$$V\frac{dy}{dz} = L\frac{dx}{dz} = a\,k_V\,(y_i - y) = a\,k_L\,(x - x_i), \tag{1}$$

where the mass transfer coefficients k_V and k_L are independent of the mole fractions.

The experimental results obtained by H. Sawistowski and W. Smith [1] in packed columns, have pointed out a discrepancy between the classical rectification theory and experiment, in the case of mixtures formed from components of rather different boiling temperatures.

The mass transfer coeficients defined by equations (1) are, in these cases, not independent on concentrations, curves with a maximum being obtained for them, or for quantities directly derived thereof.

Along this same line, Hasselden and Sutherland [2] studying in a plate columm the rectification of ammonia-water mixture have pointed out a marked dependance of the plate efficiency on concentration. They obtained curves with a maximum for efficiency, although, in compliance with classical theories, efficiency does not depend on mole fractions (supposing that contact surface area does not depend on concentrations).

In [3], one of the authors, starting from a new representation of the rectification process, obtains quantitative relation for mass transfer, wich can explain the experimental results from [1] and [2].

This last representation relies on the observation that, for mixtures made up by components with rather different boiling temperatures, the amount of heat transferred by thermal conductivity from interface to the bulk of the liquid is of the same order of magnitude as the amount of heat provided by the condensation at the interface of the less volatile

component. The amount of heat transferred by thermal conductivity in the liquid being larger then that required to maintain the temperature of liquid at the saturation, vaporization occurs in the bulk of the liquid phase.

In other words, a part of the amount of heat provided by condensation at the interface is used in the vaporization process taking place at the interface, while another part is transferred to the bulk of the liquid phase (because of the difference of temperature between the interface and the bulk of the liquid) where a vaporization process occurs.

The asymmetry in the behavior of the two phases (on the one hand vaporization both at the interface and in the bluk of the liquid phase and on the other hand condensation at the interface alone) is a consequence of the fact that the Lewis number is close to unity for vapours and very large for liquids.

In the above case the mass transfer process is a consequnce both of a diffusional process and a thermal process. The aim of this paper is to examine the problem of rectification in an extreme case, characterized, among others, by the fact that from the two effects, diffusional and thermal, the latter is prevailing.

In this way, as shown hereafter, curves for the height of a transfer unit or for the plate efficiency are obtained, wich agree with those found experimentally by Sawistowsky and Smith and by Hasselden and Sutherland.

In the extreme case under examination, we neglect the mass transfer through diffusion and we consider the temperature and the vapour concentration at the interface to be equal to those in the bulk of the vapour phase.

If N_C and N_V represent the mole mixture number condensing from the vapour phase, respectively vaporizing from the liquid phase, on the unit surface and in the unit time, the variation of the mole number of the more volatile component in the vapour phase will be:

$$d\,V\,y = (N_V\,y^* - N_C\,x^*)\,a\,dz, \tag{2}$$

where y^* and x^* are the compositions of the vapours vapourised from the bulk of the liquid, respectively the liquid condensed from the vapours (x and y^* like y and x^* being the co-ordinates of certain points on the equilibrium curve).

If l_1 and l_2 are the vaporization heats of the two components, a thermal balace leads to:

$$N_C\,[x^*\,l_1 + (1 - x^*)\,l_2] + q_V = N_V\,[y^*\,l_1 + (1 - y^*)\,l_2] + q' = q_L, \tag{3}$$

where q_L and q_V are the amounts of heat transferred by thermal conductivity in the liquid, respectively in the vapours, while q' is the amount of heat necessary to keep the liquid to the saturation point.

$$q' = -\frac{Lc}{a}\frac{d\,t_L}{dz}, \tag{4}$$

t_L being the temperature of the liquid considered equal to the saturation one.

Since

$$q_L = \alpha_L (t_i - t_L), \tag{5}$$

where t_i is the temperature at the interface (considered equal to the saturation temperature t_V of vapours in the extreme case we are examining), the equations (2) and (3) lead, if $q' - q_V$ is neglected, to

$$\frac{d\,V\,y}{d\,z} = \frac{\alpha_L (t_V - t_L)\,a}{l_1}\left[\frac{y^*}{y^* + (1-y^*)\,r} - \frac{x^*}{x^* + (1-x^*)\,r}\right], \tag{6}$$

r being the ratio of the vaporization heats.

This same equation written for the less volatile component

$$\frac{d\,(V\,(1-y))}{d\,z} = \frac{\alpha_L (t_V - t_L)\,a}{l_1}\left[\frac{1-y^*}{y^* + (1-y^*)\,r} - \frac{1-x^*}{x^* + (1-x^*)\,r}\right] \tag{7}$$

leads, together with equation (6), to

$$\frac{d\,V}{dz} = \frac{\alpha_L (t_V - t_L)\,a}{l_1}\left[\frac{1}{y^* + (1-y^*)\,r} - \frac{1}{x^* + (1-x^*)\,r}\right]. \tag{8}$$

Since

$$\frac{d\,V\,y}{d\,z} = y\,\frac{d\,V}{d\,z} + V\,\frac{d\,y}{d\,z},$$

$$V\,\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{\alpha_L (t_V - t_L)\,a}{l_1}\left[\frac{y^* - y}{y^* + (1-y^*)\,r} - \frac{y - x^*}{x^* + (1-x^*)\,r}\right]. \tag{9}$$

By dividing equations (9) by (8), we obtain

$$\frac{V\,dy}{dV} = \frac{d\,y}{d\ln V} = \frac{(y^* - y)\,[x^* + (1-x^*)\,r] - (y - x^*)\,[y^* + (1-y^*)\,r]}{x^* + (1-x^*)\,r - y^* - (1-y^*)\,r}. \tag{10}$$

As both y^* and x^* are at total reflux function of the vapour composition y, and the vaporization heat ratio may be considered constant, it results that for total reflux.

$$\frac{d\,y}{d\ln V} = \varphi\,(y), \tag{11}$$

whence by integration

$$V = V_o\,e^{b(y)}, \tag{12}$$

where

$$b\,(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\,y}{\varphi\,(y)}. \tag{13}$$

Integration may be made graphically, using the equilibrium curve. The relation between V and y, allows the determination of the relation between composition and height by integration of equation (6). In case

the heat transfer coefficient and the contact surface do not depend on concentration, it is sufficient to know only the boiling curve of the mixture for the integration.

In the simple case in wich the vaporization heats of the two components have almost the same value, $r \approx 1$, and the equation (6) becomes.

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\alpha_L a}{l_1 V} (t_V - t_L) (y^* - x^*) \tag{14}$$

In order to illustrate the above equations, we have plotted, fig. 2, for total reflux, the quantity ε, defined by equation (15), vs. y for a

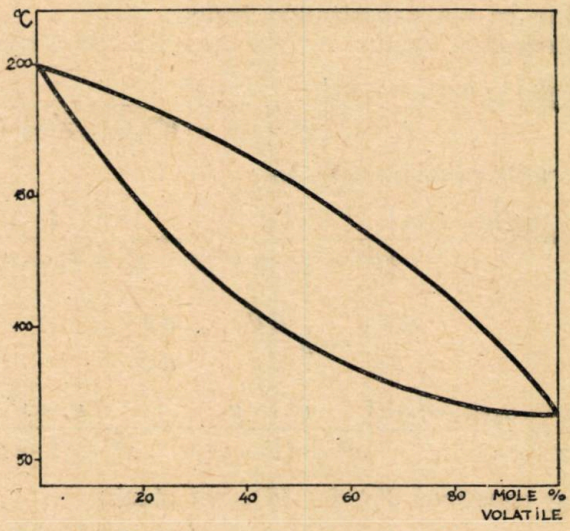


Fig. 1 — Boiling curve of a hypothetical mixture.

hypothetical binary mixture with the boiling curve being given in fig. 1.

$$\varepsilon \equiv \frac{K \frac{dy}{dz}}{y^* - y}, \tag{15}$$

where

$$K = \frac{V l_1}{a \alpha_L}$$

The curve obtained by plotting equation

$$\varepsilon \equiv \frac{K \frac{dy}{dz}}{y^* - y} = \frac{(t_V - t_L)(y^* - x^*)}{y^* - y} \tag{16}$$

shows a maximum, similar to the curves rezulting from the experimental determinations of Sawistowsky and Smith.

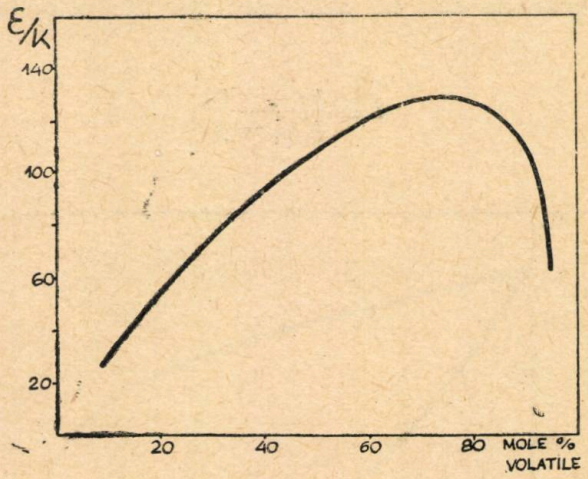


Fig. 2

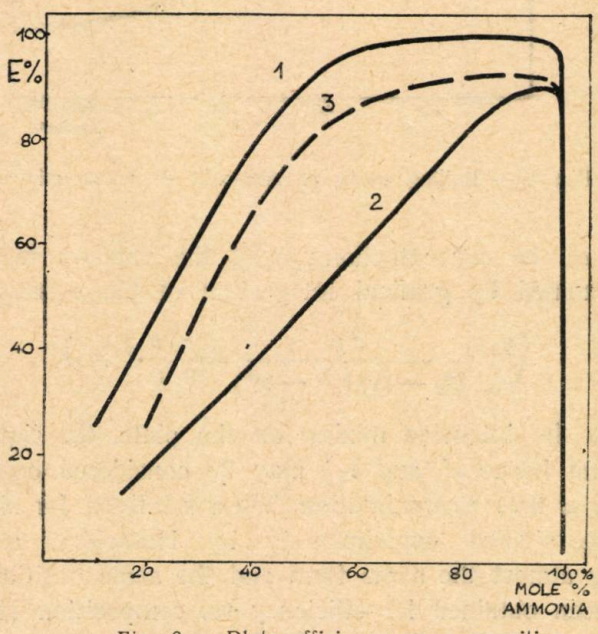


Fig. 3 — Plate efficiency vs. composition

1 — eq. (17) with $K' = 0{,}009\ ^{\circ}C^{-1}$

2 — eq. (17) with $K' = 0{,}003\ ^{\circ}C^{-1}$

3 — experimental data of Hasselden and Sutherland.

Similar equations can be also used for the computation of plate efficiency,

$$E \equiv \frac{y_{n+1} - y_n}{y^*_{n+1} - y_n},$$

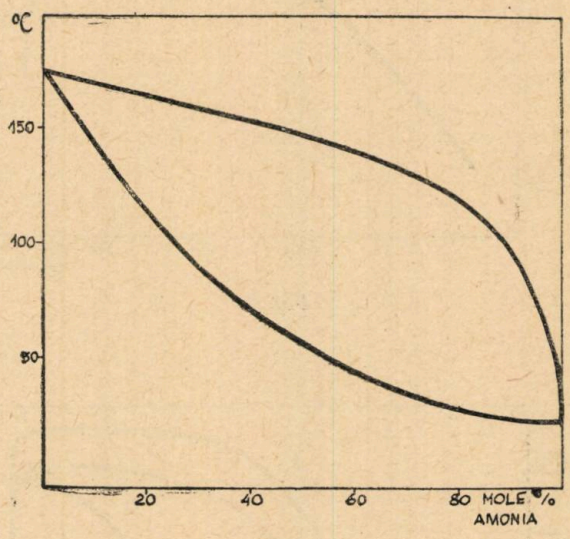


Fig. 4 — Boiling curve of ammonia — water mixture

if the value of the concentration y_{n+1} of the vapours leaving the plate n+1 is determined by grafical integration of the equation.

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{dy}{(t_V - t_L)(y^* - x^*)} = \frac{\alpha_L a}{l_1 V} Z' \equiv K' \qquad (17)$$

Owing to the intensive mixing on the plate, the liquid phase concentration (and hence y^* and t_L) may be considered constant.

Using in a first approximation *these relations for the ammonia — water mixture, studied experimentaly by Hasselden and Sutherland, curves having almost the same form and the same position of the maximum, have been obtained for efficiency vs. composition (fig. 3).

* For ammonia — water mixture the ratior has the value 1.8 whereas equation (17) is valid for $r \approx 1$.

NOTATIONS

a — contact surface per unit height
c — specific heat of the liquid
E — plate efficiency
k_L — mass transfer coeficient in the liquid phase
k_V — mass transfer coeffiicent in the vapour phase
K, K' — constants
L — molar flow rate of the liquid
l_1 l_2 — vaporization heats of the two components
q_L — heat quantity transferred by thermal conductivity in the liquid phase per unit surface
q_V — heat quantity transferred by thermal conductivity in the vapour phase per unit surface
q' — heat quantity necessary to maintain the liquid at the saturation
V — molar flow rate of the vapours
t_L — temperature of the liquid
t_V — temperature of the vapours
z — distance from the column basis
z' — liquid height on the plate
x — mole fraction of the more volatile component in the bulk of liquid phase
y — mole fraction of the more volatile component in the vapour phase
α_L — heat transfer coefficient in the liquid phase.

REFERENCES

[1] *H. Sawistowsky, W. Smith*: Ind. Eng. Chem. 51,915, 1959.
[2] *E. Hasselden, R. Sutherland*: The Proceedings of the International Symposium on Distillation, Brigton, 1960, p. 85.
[3] *E. Ruckenstein*: Bul. Inst. politehnic Bucureşti, *23*, nr. 4, 129 (1961).

К ВОПРОСУ О ТЕРМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МАССОПЕРЕДАЧИ ПРИ РЕКТИФИКАЦИИ СМЕСЕЙ

(Резюме)

В настаящей работе анализируется вопрос ректификаций бинарных смесей состоящих из двух компонентов имеющих очень различные точки кипения.

Предпологается что в этом случае, всё количество тепла происходящее из межфазной конденсации переданно жидкости термической кондуктивностью, водникая испарение в массе жидкой фазе.

Полученные количественные управления, могут обяснить зависимость от состава коэфициентов массовой передачи или производных величин, так как они хорошо совпадают с экспериментальными резуль татами Савистовского и Смиса а также Хасселдена и Сутерленда.

ON THE THERMAL THEORY OF MASS TRANSFER IN RECTIFICATION OF MIXTURES

(Summary)

This paper analyses the problem of the rectification of binary mixtures made ub by components with very different boiling temperatures. It considers, in this case, the entire amount of heat provided by interface condensation as transmitted by thermal conductivity to the liquid and producing vaporization in the bulk of the liquid phase.

The quantitative equation obtained may explain the dependence on composition of mass transfer coefficients or of the quantities derived, being in concordance with Samistowsky and Smith's and Hasselden and Sutherland's experimental determinations.

SUR LA THEORIE THERMIQUE DU TRANSFERT DE MASSE DANS LA RECTIFICATION DES MÉLANGES

(Résumé)

Dans ce travail on analyse le problème de la rectification des mélanges binairs formés par des composants ayant les points d'ébullition trés éloignés.

On considère dans ce cas, que l'entière quantité de chaleur provenue par la condensation à l'interface est transmise, par conductibilité thermique au liquide, produisant vaporisation dans la masse de la phase liquide.

Les équations quantitatives obtenues peuvent expliquer la dependence des coefficients de transfert de masse ou des grandeurs derivées vis à vis de la concentration, étant en concordance avec les déterminations expérimentales de Sawistowsky et Smith et de Hasselden et Sutherland.

UBER DIE THERMISCHE THEORIE DES STOFFAUSTAUSCHES IN REKTIFIZIERUNG VON MISCHUNGEN

In dieser Arbeit wind dass Problem der Rektifizierung binärer gemische die aus Komponenten mit sehr verschiedenen Siedetemperaturen bestehen analysiert.

Es wird angenommen dass in diesem Falle die ganze, durch Kondensation an der Grenzfläche entstandene, Wärmemenge durch thermische Leitfähigkeit in der Flüssigkeit übertragen wird, wobei die Verdampfung in der masse der Flüssigkeit statt findet.

Die erhaltenen quantitativen Gleichungen können die Abbhängigkeit der Massenaustauschkoeffizienten oder der daraus abgeleiteten Grossen von der Zusammensetzung erklären wobei sie mit den experimentällen Ergebnissen von Sawistowski und Smith und Hasselden und Sutherland übereinstimmen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

UNELE CONSIDERAȚII CU PRIVIRE LA STRUCTURA STRATULUI FLUDIZAT

I. TEOREANU

In studierea dinamicii stratului fluidizat, unii cercetători [1, 2] au menționat caracterul diferit al legilor de curgere într-un strat fluidizat, față de un strat fix.

Această idee a constituit, deigur, un pas înainte, în direcția îmbunătățirii concepției de cercetare a stratului fluidizat. Ea se bazează, de fapt, pe diferența de structură dintre stratul fix și stratul fluidizat.

Din descrierile existente în literatură [2, 3], reiese că structura stratului fluidizat, ea însăși, poate fi diferită, în primul rînd în funcție de natura și viteza agentului de fluidizare, în al doilea rînd în funcție de natura, forma și dimensiunile particulelor. Prin urmare dinamica stratului fluidizat trebuie studiată în raport cu structura sa.

Procesele de transfer de căldură și de substanță, cum și reacțiile chimice, care au loc într-un strat fluidizat, sînt determinate în mod esențial de dinamica stratului și deci de structura acestuia.

Apare deci explicabil dece, în ultimul timp, se acordă o atenție sporită studiului structurii stratului fluidizat [4—12].

I. Observații generale cu privire la structura stratului fluidizat

Într-o lucrare anterioară [2] se punea în evidență faptul că, în cazul fluidizării cu lichide, stratul are o structură mai omogenă, în timp ce la fluidizarea cu gaze acesta are o structură neomogenă. Cu alte cuvinte înseamnă că, în acest din urmă caz, o parte din gaz străbate stratul sub formă de bule, iar particulele solide formează pachete de particule. Gazul care curge sub formă de bule constituie o fază distinctă, puțin miscibilă cu gazul care trece prin pachetele de particule.

În momentul în care presiunea hidrostatică din bule are o valoare suficient de mare încît să poată învinge forțele care frînează expandarea pachetelor de particule (le-am numit forțe interparticule), bulele se „dizolvă" în faza continuă — pachetele de particule se distrug. Bulele își

pierd caracterul lor stabil de pînă acum, ele „se dizolvă" pe măsură ce se formează, realizînd pe această cale o intensificare a amestecării gaz-particule indiivduale. Stratul capătă o structură mai omogenă. Am numit acest domeniu — existent la viteze mai mari ale gazului — *cvasiomogen.*

În concluzie:

1. În cazul fluidizării cu lichide se vorbește de o structură omogenă a stratului fludizat, iar

2. în cazul fluidizării cu gaze se disting:

a) un domeniu caracterizat prin existența neomogeneităților stabile și

b) un domeniu, la viteze mai mari ale gazului, în care neomogeneitățile sînt instabile, stratul prezentînd o structură mai omogenă (domeniul cvasiomogen).

II. Criterii de apreciere a structurii stratului fluidizat

1. Din punct de vedere practic prezintă desigur mai mult interes acel strat fluidizat, care are o structură mai omogenă și în care se realizează un bun contact fluid-particule individuale.

Pentru a aprecia calitatea structurii unui strat fluidizat este necesar să se găsească asemenea mărimi, care să reprezinte o măsură a acesteia.

Întrucît observațiile făcute asupra stratului fluidizat au arătat că, în cazul în care agentul de fluidizare este un lichid, structura stratului este mai omogenă, cercetările, care au avut drept obiectiv structura stratului fluidizat, s-au referit numai la fluidizarea cu gaze. Studiile existente în literatură abordează această problemă în mod diferit; o analiză atentă a lor conduce însă la concluzia că în general ele pot fi grupate în jurul a trei puncte de vedere deosebite. Astfel:

a. în unele lucrări [4, 5, 6] se caută să se caracterizeze structura stratului prin distribuția în strat a fracției de goluri, fără a se introduce niciun fel de criterii cantitative de apreciere a calității structurii;

b. în alte lucrări [7—11], ca urmare a măsurătorilor indirecte privind distribuția fracției de goluri în timp și spațiu *, se introduc coeficienți de neuniformitate definiți în general prin:

$$i_u = \frac{F_i}{n}, \tag{1}$$

În care F este fracția din suprafața unei oscilograme, care reprezintă fluctuațiile mărimii măsurate și

n — numărul de intersecții a oscilogramei cu orizontala, care reprezintă valoarea medie a mărimii măsurate;

c. un mod mai complet de apreciere a structurii stratului fluidizat, se bazează pe conisderații cinetice; astfel — pornind de la un asemenea punct de vedere E. Ruckenstein [12] introduce, pentru caracterizarea calității structurii, mărimile:

$$e_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_m \tag{2}$$

* Măsurătorile experimentale constau din determinări dielectrometrice [7, 8, 9], de absorbție de raze gama [10] sau de cădere de presiune [11].

(unde ε_m este fracția medie de goluri a stratului și ε_0 — fracția de goluri a unui strat fluidizat omogen), care reprezintă o măsură a uniformității de dispersare a particulelor solide în mediul fluid și

$$\sigma_\varepsilon^2 = \overline{(\varepsilon - \varepsilon_m)^2} \tag{3}$$

care caracterizează amestecarea fluid — particule individuale (ε este valoarea locală și instantanee a fracției de goluri).

2.1. Într-o lucrare anterioară [13], efectuată împreună cu E. Ruckenstein, am făcut — pornind de la datele obținute despre abaterea patratică medie a fracției de goluri σ_ε^2 — unele constatări privind structura stratului fluidizat.

În lucrarea de față, folosind noi date experimentale, se obțin informații atît în ceea ce privește mărimea σ_ε^2, cît și e_0. Pe baza acestor rezultate, se încearcă o discutare mai amplă, dintr-un anumit punct de vedere, a proceselor dinamice dintr-un strat fluidizat, procese ce determină structura acestuia.

Pentru a determina valoarea fracției de goluri și fluctuațiile sale, în timp și în întreg stratul fluidizat, am efectuat măsurători privind fluctuațiile căderii de presiune în timp și la diferite înălțimi ale stratului. Experiențele au fost conduse pe straturi constituite din particule de marmoră și sticlă, de dimensiuni cuprinse între 0,15—0,392 mm, pentru care se verifică experimental egalitatea:

$$\Delta P_s \approx \Delta P_g \tag{4}$$

în care ΔP_s este căderea de presiune într-un strat fluidizat;

ΔP_g — căderea de presiune dată de greutatea aparentă a particulelor solide*).

Coloana în care s-au făcut experiențele a fost prevăzută cu prize de presiune la diferite înălțimi ale stratului — fig. 1.

Condițiile de lucru sînt redate în tabela 1.

Tabela nr. 1

Nr. crt.	Natura particulelor	Diametrul particulelor d (mm)	Viteza gazului w (m/s)	Diametrul coloanei D (m)	Greutatea portfculelor fluidizate G (g)
1	Particule de marmoră (formă neregulată)	0,15 0,35	0,1585— 0,506	$3{,}55 \cdot 10^{-2}$	60— 120
2	Sfere de sticlă	0,392	0,254— 0,415	$3{,}55 \cdot 10^{-2}$	115

* Pentru ΔP_g se poate scrie: $\Delta P_g \approx L\,(\gamma_s - \gamma_f)\,(1 - \varepsilon)$ (5)

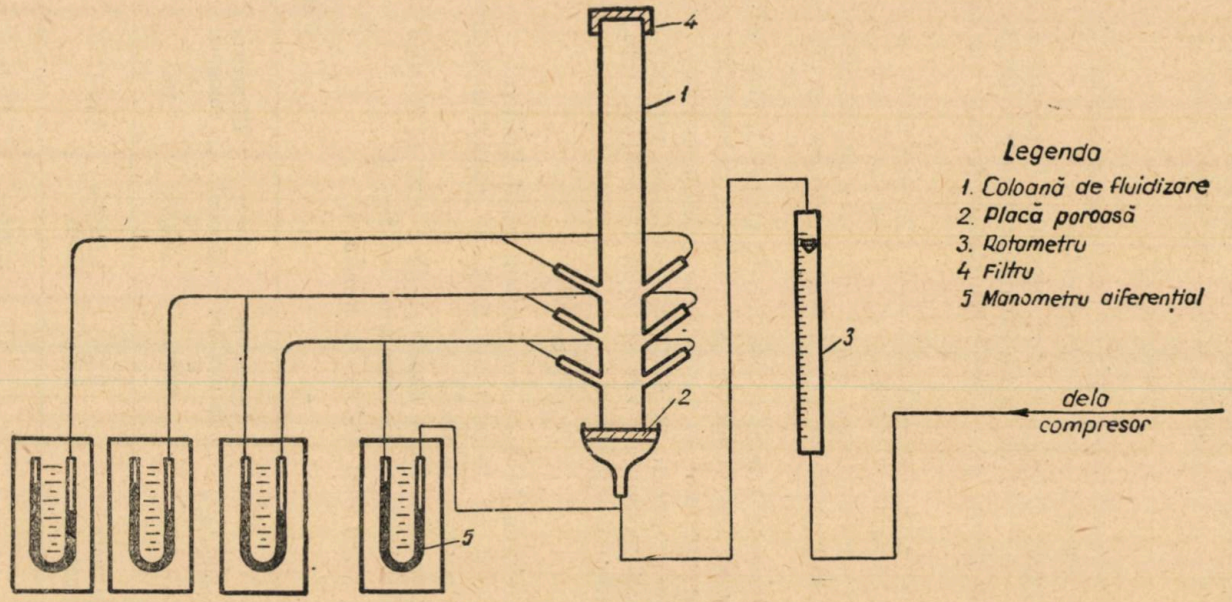


Fig. 1 — Instalație de fluidizare.

2.2. Rezultatele experimentale obținute cu privire la căderea de presiune în strat, au fost reprezentate în oscilograme de genul celor din fig. 2. Ele arată că amplitudinea și frecvența fluctuațiilor fracției de goluri

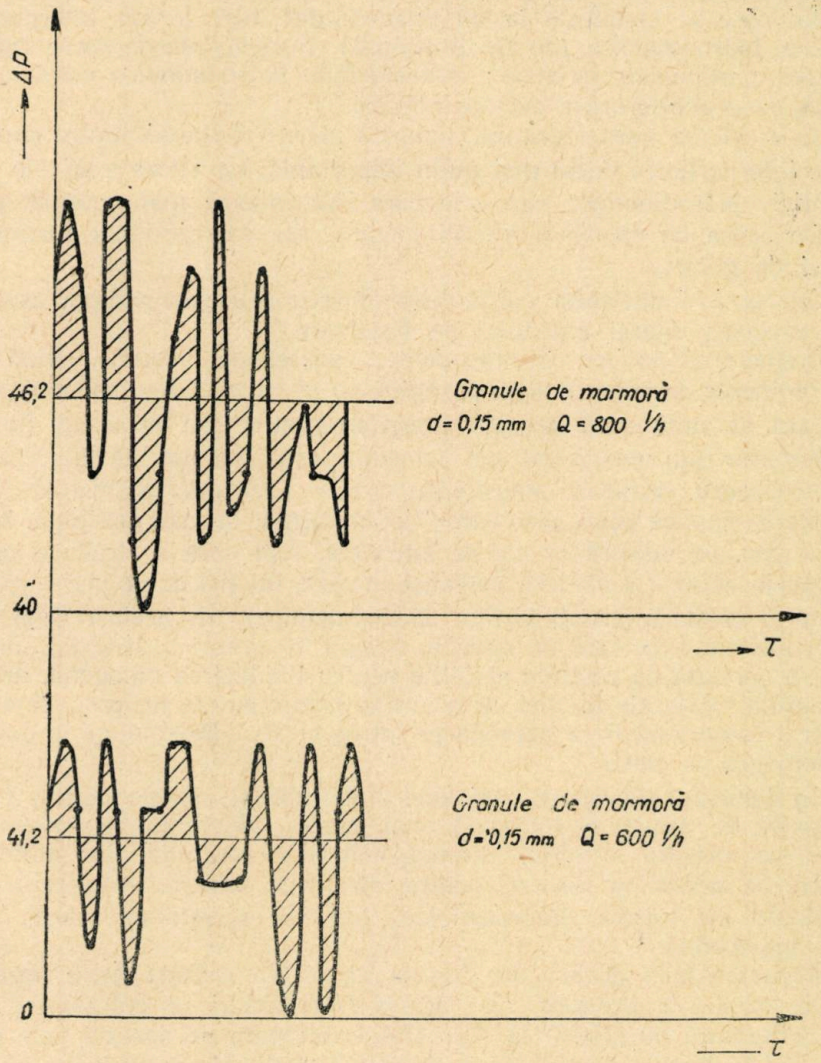


Fig. 2 — Variația pierderii de presiune în timp.

cresc cu viteza gazului. O influiență similară o are și diametrul particulelor solide *.

* Rezultatele obținute cu privire la dependența amplitudinei și frecvenței fluctuațiilor fracției de goluri de înălțimea stratului nu ne pot conduce la concluzii sigure. Se pare că la viteze mai mari ale gazului aceste fluctuații sînt mai importante la partea superioară a stratului.

In cele ce urmează vom încerca să explicăm aceste rezultate.

Imaginea pe care ne-am format-o despre structura stratului fluidizat cu gaze, conduce la concluzia că aceasta din urmă este determinată de raportul care se stabilește la un moment dat între forțele interparticule și forțele hidrodinamice (de tip Bernoulli). Forțele interparticule frînează mișcarea particulelor în strat; instabilitățile hidrodinamice conduc, dimpotrivă, la o accelerare a acestor mișcări.

Cu creșterea vitezei gazului, datorită măririi distanței dintre particule, forțele interparticule devin mai puțin importante. La viteze mari ale gazului forțele hidrodinamice sînt cele care influențează mai puternic procesul. De aceea cu creșterea vitezei gazului are loc creșterea fluctuațiilor fracției de goluri.

Creșterea diametrului particulelor fluidizate are consecințe asemănătoare creșterii vitezei agentului de fluidizare.

Prelucrarea datelor obținute pentru căderea de presiune, avînd drept scop obținerea de informații în legătură cu σ_ε^2 și e_0 a condus la concluzii, care vin să întărească această imagine a structurii stratului fluidizat.

Anterior am menționat că domeniul cvasiomogen de fluidizare se cararcterizează printr-o amestecare gaz — particule individuale bună. Aceasta se explică prin „dizolvarea" permanentă, în faza continuă, a bulelor de gaz, pe măsură ce ele se formează, fapt care se traduce printr-o creștere însemnată a abaterii patratice medii a fracției de goluri — σ_ε^2 (consecință a creșterii instabilităților hidrodinamice). În același timp faptul că, în domeniul la care ne referim, fracția de goluri a stratului fluidizat poate fi corelată cu relațiile stabilite pentru fluidizarea omogenă, arată că fluctuațiile locale ale fracției de goluri se compensează reciproc, cînd considerăm o valoare medie a acesteia pe întreg stratul. Rezultă, că în domeniul cvasiomogen $e_0 \approx 0$.

În domeniul neomogen, dat fiind stabilitatea neomogenităților (forțele interparticule avînd o influență mai mare), diferența $e_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_m$ va crește pe măsura creșterii neomogeneităților stratului, iar fluctuațiile fracției de goluri și deci σ_ε^2, pentru straturile caracterizate prin valori însemnate ale forțelor interparticule, deși vor screște cu viteza, vor fi puțin importante.

Reprezentările grafice din figura 3 a și 3 b reflectă întru totul concluziile subliniate anterior. Din aceste reprezentări se pot obține deasemeni informații cu privire la W_{cr}. Datele obținute pe această cale pentru W_{cr}, sînt în bună concordanță cu relația stabilită, în acest sens, în lucrarea [2]. Acest fapt pune de asemeni în evidență justețea reprezentărilor noastre cu privire la structura stratului fluidizat.

3. Nevoia de a lua în considerație neomogeneitatea stratului, prin mărimi care să reprezinte o măsură directă a acesteia și care să poată fi folosite nemijlocit în calcul, ne-a condus la introducerea unor criterii de apreciere a calității structurii stratului, care răspund acestor cerințe, ele fiind expresia directă a cantității de gaz existentă în strat sub formă

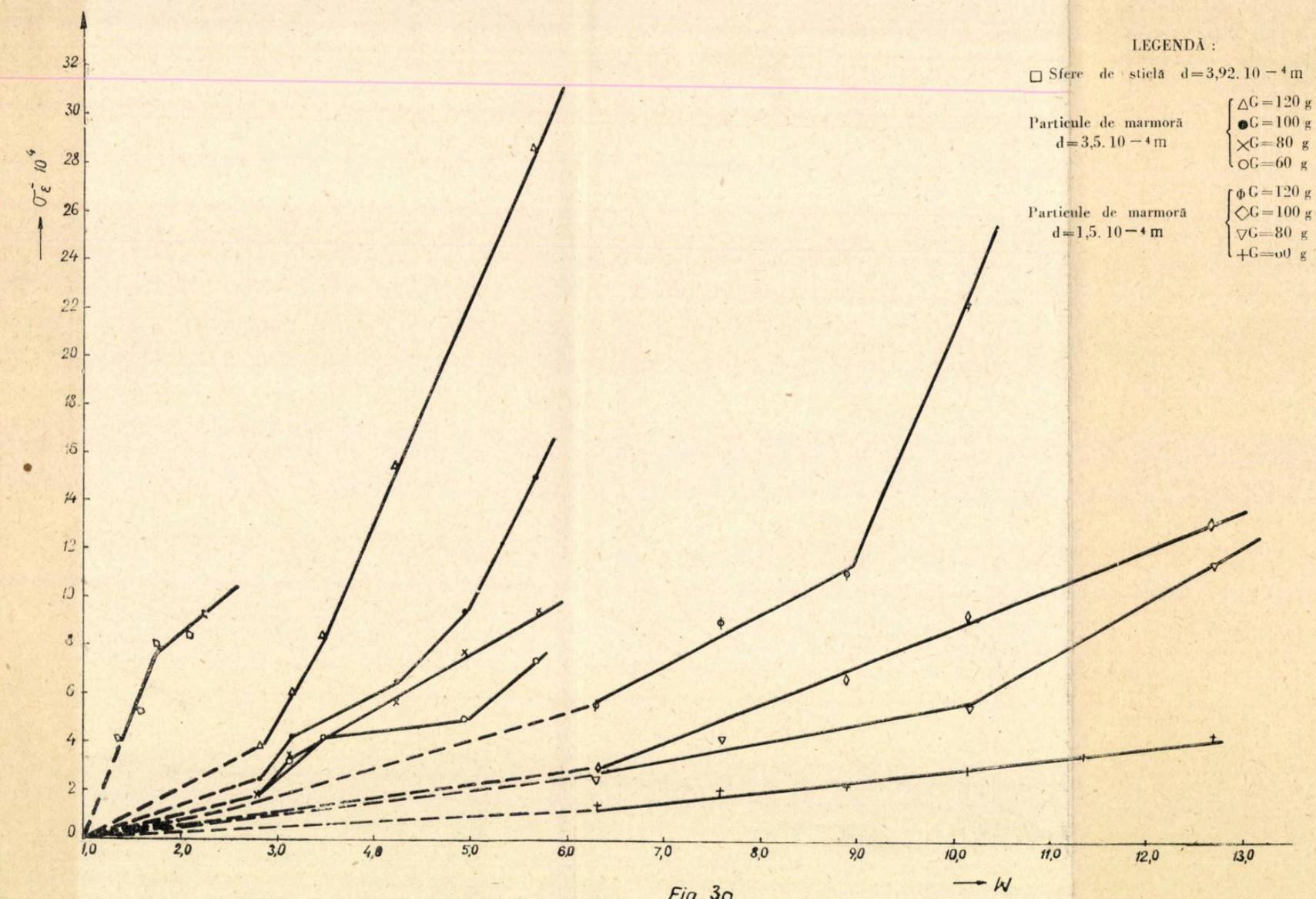


Fig. 30

Variaţia mărimii σ_ε^2 cu gradul de fluidizare.

de bule de gaz, care nu ia parte efectiv la procesele fizico-chimice din strat. Aceste criterii sînt date de mărimile:

$\eta = \frac{V_b}{\varepsilon_m V}$ — criteriu static — indică fracția de gaz, care se află în strat sub formă de bule (gradul de neomogeneitate).

și

ξ — criteriu dinamic — reprezintă fracția din debitul de gaz care ia parte efectiv la procesele fizico-chimice, care au loc într-un strat fluidizat *.

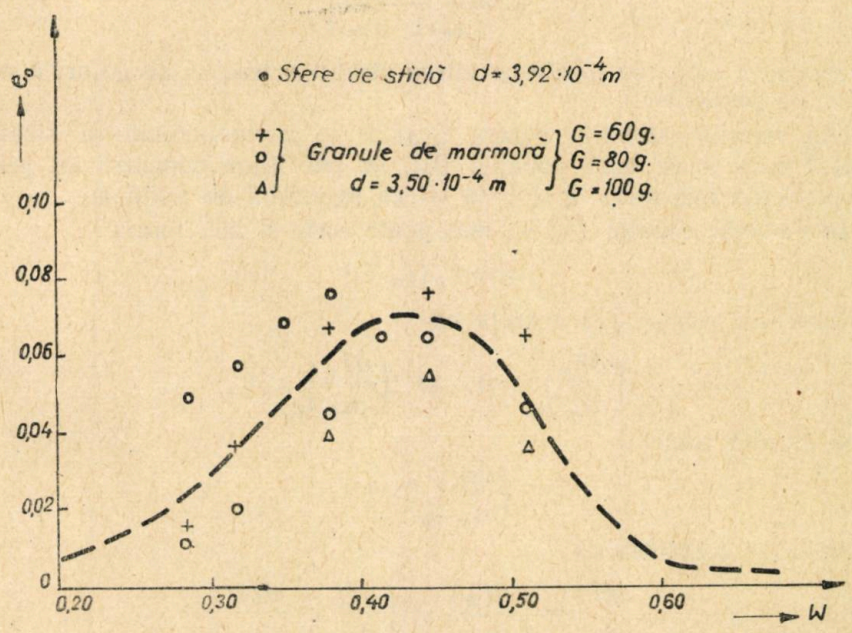


Fig. 3 b — Variația mărimii e_0 cu viteza gazului.

Considerăm de fapt că — din punct de vedere al intensității proceselor care au loc în strat — calitatea structurii stratului poate fi caracterizată pe deplin numai cu ajutorul criteriului dinamic însoțit de condițiile de viteză a agentului de fluidizare ($w > w_{cr}$ sau $w < w_{cr}$). De altfel gradul de neomogeneitate a stratului η nu are semnificație fizică decît în acel domeniu de fluidizare, în care neomogeneitățile sînt stabile **.

Ușurința cu care se pot obține însă informații despre gradul de neomogeneitate η ne-a determinat să-l luăm în considerație în vederea caracte-

* V_b reprezintă volumul de gaz, care se găsește în strat sub formă de bule, iar V — volumul stratului fluidizat.

** In acest caz se stabilește între criteriul static și cel dinamic expresia:

$$\eta = W^*(1 - \xi) \qquad (6)$$

rizării structurii unui strat fluidizat în domeniul neomogen (în locul mărimi ξ).

Într-o lucrare precedentă [14] am stabilit pentru mărimea η relația

$$\eta = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_p}{\varepsilon_m (1 - \varepsilon_p)}, \tag{7}$$

care, pentru straturile formate din particule suficiente de mici, în care agregatele de particule rămîn practic neexpandate, devine:

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_m (1 - \varepsilon_{min})} \tag{8}$$

(ε_p reprezintă valoarea medie pe întreg stratul a fracției de goluri a agregatelor de particule).

Din relațiile stabilite pentru gradul de neomogenitate a stratului fluidizat cum și pe bază ecuației (6), se pot trage concluzii cu privire la dependența mărimilor η și ξ de viteza agentului de fluidizare.

Într-adevăr ecuația (7) se mai poate scrie și sub forma:

$$\eta = F_0 (\varepsilon_m, \varepsilon_p) \tag{8'}$$

Cum din relația (7) rezultă că

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_m}\right)_{\varepsilon_p} > 0 \quad \text{și} \quad \left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_p}\right)_{\varepsilon_m} < 0,$$

iar pe de altă parte

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varepsilon_m}\right)_{Ar} > 0$$

se ajunge la concluzia că

$$\frac{dF_0}{d\varepsilon_m} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_m}\right)_{\varepsilon_p} + \left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_p}\right)_{\varepsilon_m} \frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon_m}$$

se poate anula pentru o anumită valoare a lui ε_m.

Ca urmare, deoarece

$$\varepsilon_m = f(Re,\ Ar,\ k_a,\ k_p) \tag{9}$$

rezultă că, pentru un anumit sistem fluidizat, pe curba $\eta = f(w)$ este posibil să apară un maxim corespunzător unei anumite valori a vitezei agentului de fluidizare.

Existența unui maxim pe curba $\eta = f(w)$ presupune în același timp un minim corespunzător pe curba $\xi = f_1(w)$.

Rezultatele experimentale redate pentru un caz particular în fig. 4, (făină brută de clincher de ciment) confirmă concluziile la care am ajuns.

Domeniul, în care se poate vorbi într-adevăr de un grad de neomogeneitate η așa cum a fost el definit mai sus, fiind liimtat, se constată o

valoare maximă pentru η, în zona de trecere către domeniul cvasiomogen, adică în zona în care

$$w \approx w_{cr}$$

Această constatare este în concordanță deplină cu imaginea pe care ne-am format-o în legătură cu structura stratului fluidizat; în domeniul

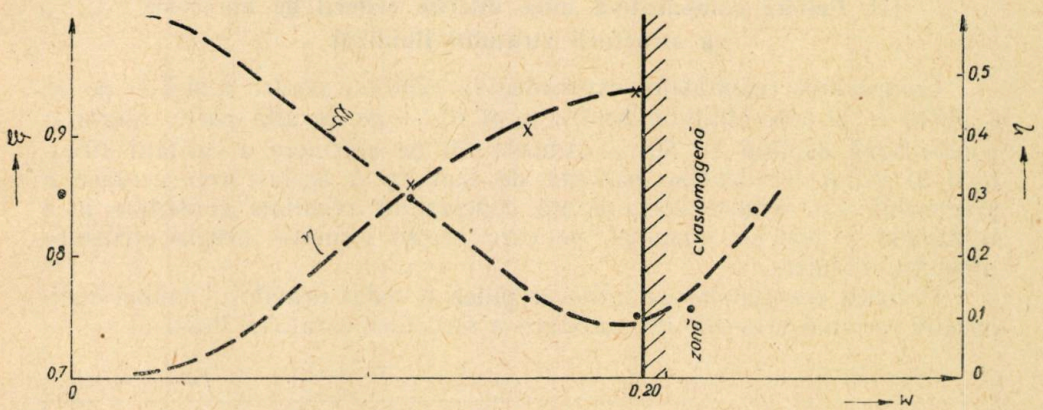


Fig. 4. — Variația mărimii ξ cu viteza gazului

în care neomogeneitățile sînt stabile, odată cu viteza gazului crește și canitatea de gaz, care trece prin strat sub forma de bule, într-o asemenea măsură încît determină o creștere a gradului de neomogeneitate a stratului.

Datele obținute pentru criteriul ξ, într-un domeniu mai larg de viteze ale gazului, pun în evidență în mod clar minimul de care vorbeam anterior. Acest minim — așa cum era și de așteptat — corespunde zonei de trecere către domeniul cvasiomogen de fluidizare ($w \approx w_{cr}$). Creșterea relativ accentuată a mărimii ξ, la valori ale vitezei gazului imediat superioare vitezei critice de tranziție, se explică prin creșterea importantă a intensității de amestecare gaz-particule individuale, ca urmare a instabilității neomogeneităților.

În concluzie rezultă că:

— pentru un strat omogen

$$\eta = 0$$

și deci

$$\xi = 1$$

— pentru un strat fluidizat, în care neomogeneitățile sînt stabile, gradul de neomogeitate crește de la zero la o valoare maximă caracteristică η_{max}

$$0 < \eta_{max} < 1$$

iar fracția de gaz ξ scade de la $\xi = 1$ la o valoare minimă caracteristică ξ_{min}

$$1 > \xi_{min} > 0$$

În domeniul cvasiomogen, mărimea η își pierde semnificația fizică, iar ξ crește aproximativ repede pînă la o valoare egală cu unitatea.

III. Privire comparativă între diferite criterii de apreciere a structurii stratului fluidizat

Compararea rezultatelor experimentale obținute pentru η și ξ — pe de o parte — și cele obținute pentru e_0 și σ_ε^2 — pe de altă parte, relevă o concordanță deplină — fig. 5. Ambele căi de apreciere a calității structurii stratului fluidizat se bazează de fapt pe o aceiași reprezentare a procesului. Ca urmare concordanța concluziilor rezultate constituie încă o dovadă a justeței imaginei, pe care ne-am format-o despre structura stratului fluidizat.

Pe baza rezultatelor amintite ar putea fi redat următorul tablou comparativ, privind criteriile de apreciere a structurii stratului fluidizat:

Tabela nr. 2

Fluidizarea cu lichide		Fluidizarea cu gaze			
		Domeniul în care neomogeneitățile sînt stabile		Domeniul cvasiomogen	
valori pentru e_0 și σ_ε^2	valori pentru η și ζ	valori pentru e_0 și σ_ε^2	valori pentru η și ζ	valori pentru e_0 și σ_ε^2	valori pentru η și ζ
$e_0 = 0$ $\sigma_\varepsilon^2 \approx 0$	$\eta = 0$ și deci $\zeta = 1$	$w < w_{cr}$ $e_0 > 0$ (crește cu viteza) σ_ε^2 mic (crește cu viteza)	$w < w_{cr}$ $0 < \eta < \eta_{max}$ $\eta_{max} < 1$ (η crește cu viteza) $1 > \zeta > \zeta_{min}$ $\zeta_{min} > 0$ (ζ scade cu vtteza)	$w > w_{cr}$ $e_0 \approx 0$ σ_ε^2 mare (crește cu viteza)	$w > w_{cr}$ $\zeta_{min} < \zeta < 1$ $_{min} > 0$ (ξ crește cu viteza) (η își pierde semnificația fizică)

Din punct de vedere practic este important să se poată delimita domeniile, în care stratul fluidizat cu gaze prezintă o structură mai omogenă. Această posibilitate există și ca urmare, în fig. 5, au fost reprezentate haşurat, domeniile, în care structura stratului fluidizat cu gaze este mai omogenă.

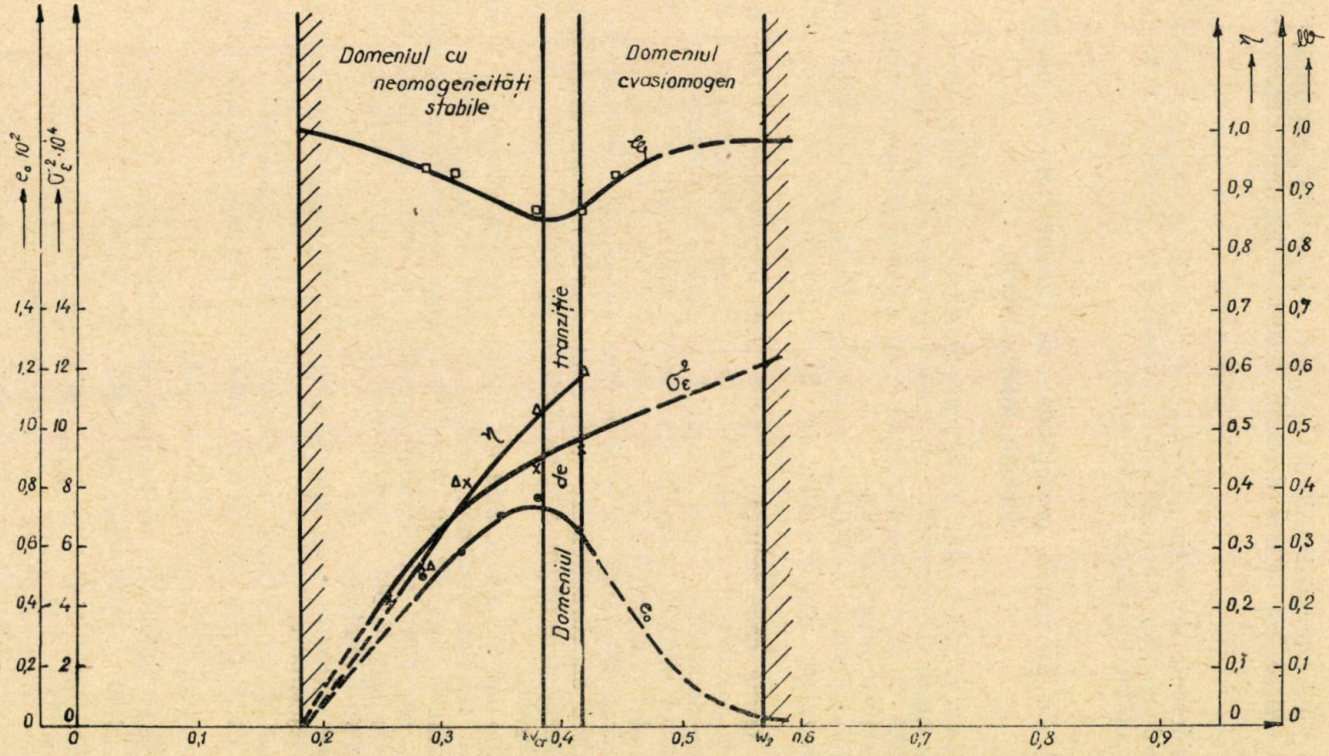


Fig. 5 — Variația mărimilor e_o, σ_ξ^2, η și ξ cu viteza gazului

Dată fiind intensitatea de desfășurare a proceselor, prezintă, din acest punct de vedere, un interes deosebit domeniul hașurat, caracterizat prin

$$w > w_{cr}$$

Considerente de ordin economic impun să se lucreze însă la viteze ale gazului nu prea mari ; se poate conchide deci că valoarea w_2 ar reprezenta un optim tehnologic și economic.

IV. Cu privire la posibilitatea de caracterizare a mărimii forțelor interparticule

1. Așa cum s-a arătat, forțele interparticule constituie un factor esențial în procesul de formare a structurii stratului fluidizat cu gaze, care influențează în mod hotărîtor gradul de neomogeneitate a acestuia, tendințele sale de omogeneizare.

Studiind posibilitatea de a caracteriza forțele interparticule prin mărimi măsurabile experimental, am făcut determinări urmînd două căi diferite :

a. o primă cale rezultă — după cum vom vedea — din dinamica expandării agregatelor de particule, în domeniul neomogen de fluidizare ;

b. o a doua cale — tot dinamică — constă în compararea unghiurilor de frecare internă (acestea sînt cu atît mai mari cu cît forțele interparticule sînt mai mari).

Folosirea în paralel a mai multor metode de determinare a unor mărimi care să caracterizeze forțele interparticule, are drept scop compararea rezultatele obținute și verificarea, pe această cale, a justeții metodelor utilizate.

Menționăm că prima cale de determinare experimentală a mărimilor la care ne referim, este mai dificilă, ea fiind de fapt o metodă indirectă de determinare. Întrucît, urmărind în special expandarea agregatelor de particule, am putut să obținem simultan și unele informații cu privire la forțele interparticule — am considerat aceste date ca fiind utile în studiul pe care-l efectuăm.

Datele obținute — pe ambele căi — au deocamdată un caracter preliminar, informativ.

2. S-a văzut anterior că pentru straturile constituite din particule suficient de mici (la care forțele interparticule sînt importante)

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{min}$$

Pe baza datelor experimentale obținute pentru fracția de goluri a stratului, cum și pentru ε_{min} se poate calcula deci

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_m(1-\varepsilon_{min})} \tag{8}$$

Expresia (8) satisface un caz limită. În toate celelalte cazuri, întrucît

$$\varepsilon_p > \varepsilon_{min}$$

gradul de neomogeneitate a stratului va fi diferit de valoarea obținută pe baza relației (8)

$$\eta \neq \eta_1$$

Experimental se poate determina valoarea gradului de neomogeneitate a unui strat fluidizat cu gaze — în cazul general — din măsurătorile efectuate pentru fracția de gaz ξ, folosind ecuația (6) *.

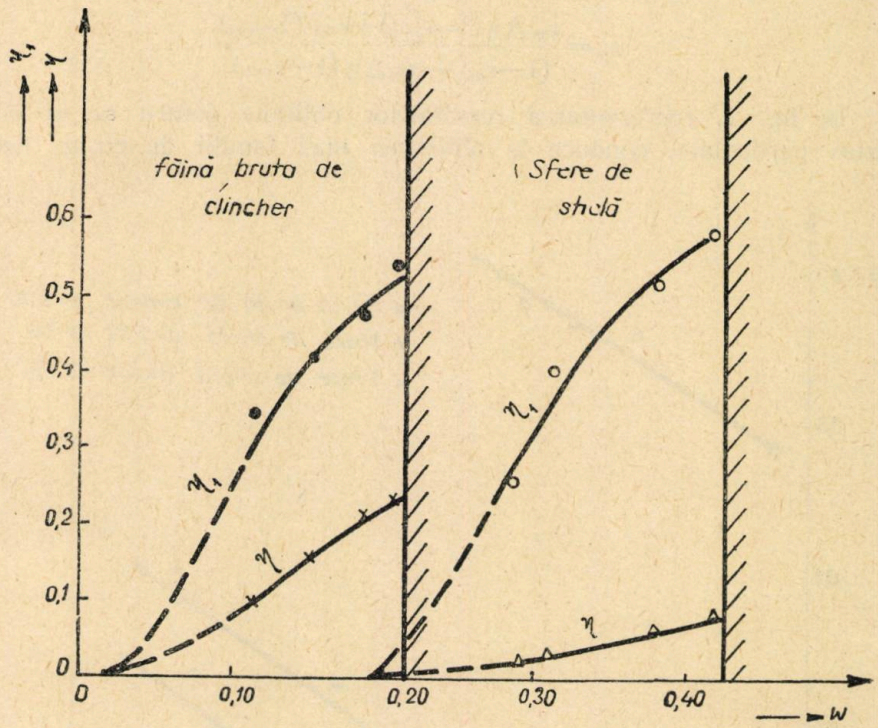


Fig. 6 — Variația mărimilor η_1 și η cu viteza gazului.

Ca urmare,

$$\eta = W^* (1-\xi) = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_p}{\varepsilon_m(1-\varepsilon_p)} \tag{9}$$

Reprezentînd grafic η_1 respectiv η funcție de viteza agentului de fluidizare se poate determina variația diferenței $\Delta\eta$ cu viteză — fig. 6 ; pe această bază se obțin informații privind ε_p. Dar dependența fracției de goluri a pachetelor de particule de viteza gazului, este direct influențată de valoarea forțelor interparticule. De aici rezultă posibilitatea introducerii și determinării experimentale a unei mărimi, care să caracteri-

* Aceste măsurători, se pot efectua, de exemplu, pe cale termică (anexa).

zeze forțele de frînare a expandării agregatelor de particule — forțele interparticule.

Într-adevăr din egalitățile (8) și (9) rezultă :

$$\Delta\eta = \eta_1 - \eta = \frac{(1-\varepsilon_m)\,(\varepsilon_p-\varepsilon_{min})}{\varepsilon_m(1-\varepsilon_{min})\,(1-\varepsilon_p)} \tag{10}$$

și mai departe se obține

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_m \Delta\eta\,(1-\varepsilon_{min})+\varepsilon_{min}(1-\varepsilon_m)}{(1-\varepsilon_m)+\varepsilon_m\Delta\eta\,(1-\varepsilon_{min})} \tag{11}$$

În fig. 7, reprezentarea rezultatelor obținute pentru ε_p, în cîteva cazuri particulare, conduce la obținerea unei familii de curbe, fiecare

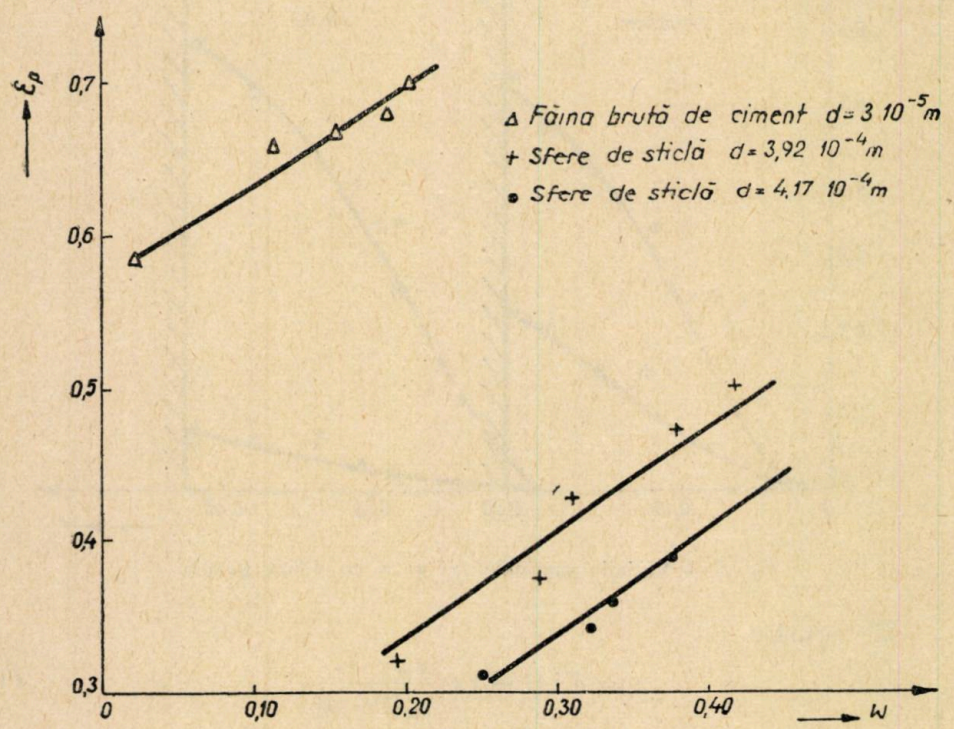


Fig. 7 — Variația fracției de goluri în agregatele de particule cu viteza gazului.

curbă fiind caracteristică unui anumit strat, în care forțele interparticule au o anumită valoare.

Pentru a aprecia, fără dificultate, valoarea forțelor interparticule, prin mărimi relative, se introduce ca măsură a acestora, inversul pantei

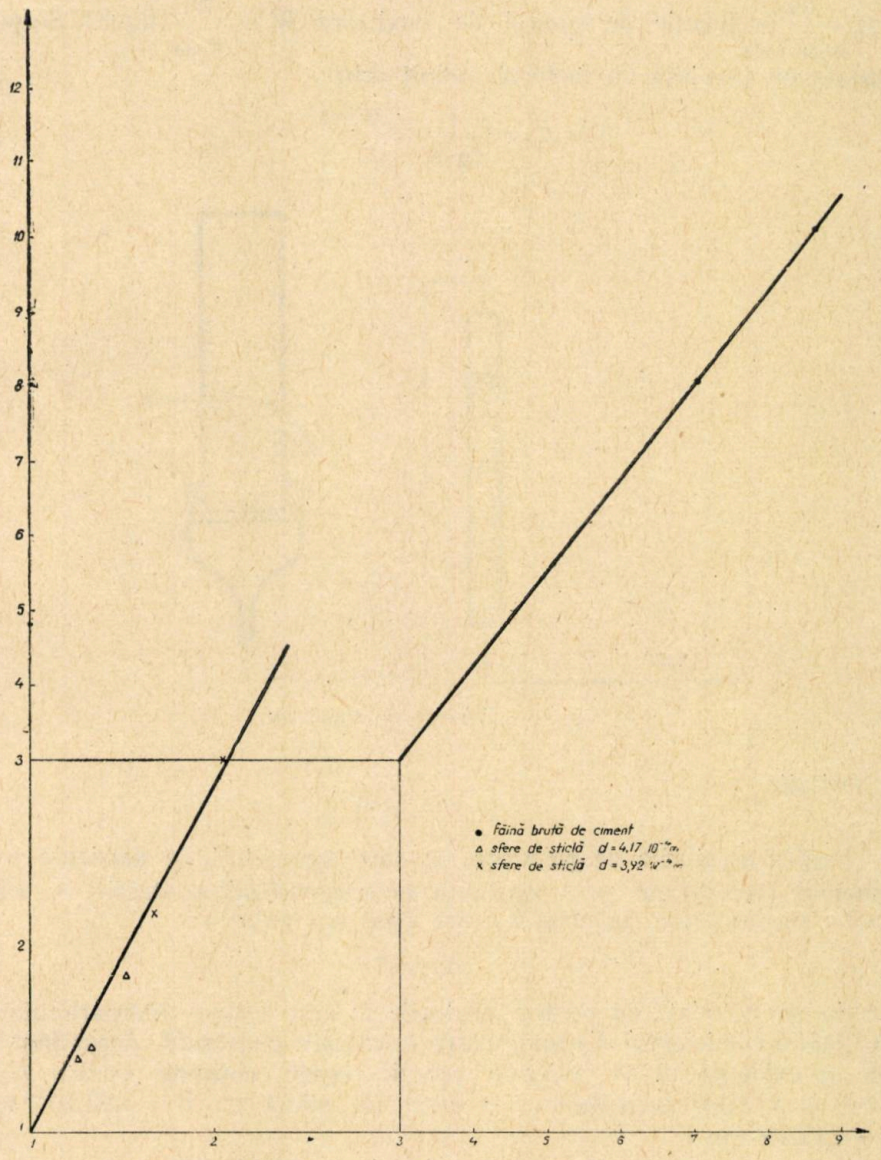


Fig. 8 — Variația grupului T_ε cu gradul de fluidizare.

dreptelor obținute prin reprezentarea grafică a grupului fără dimensiuni $T_\varepsilon \equiv \frac{w\varepsilon_p}{w_{min}\varepsilon_{min}}$ funcție de gradul de fluidizare $W = \frac{w}{w_{min}}$ (fig. 8). Se poate constata cu ușurință că factorul definit prin

$$K_f = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0} = \frac{W-1}{T_\varepsilon - 1} \tag{12}$$

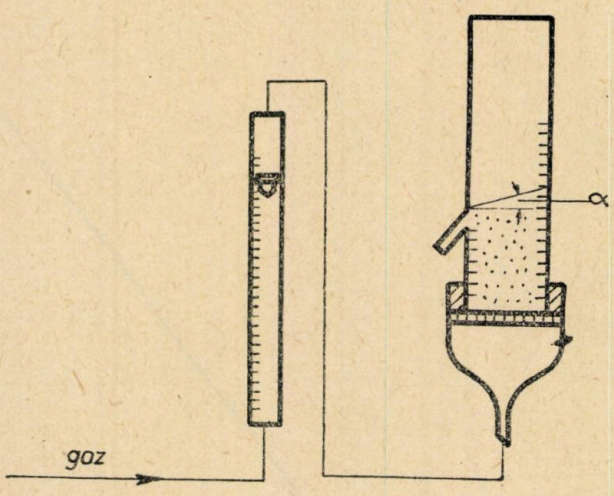


Fig. 9 — Coloană de fluidizare.

iar valorile

$$0 < K_f \leqslant 1$$

Pentru straturile de referință, în care agregatele de particule — în domeniul caracterizat prin existența neomogenităților stabile — rămîn practic neexpandate, factorul K_f este egal cu unitatea

$$K_f = 1$$

Menționăm totodată că pentru straturile în care forțele interparticule sînt neglijabile coeficientul K_f tinde către o valoare constantă. Acest fapt este pus în evidență și de valorile practic egale obținute pentru K_f, în cazul straturilor constituite din sfere de sticlă cu $d = 3{,}92.10^{-4}$ m și $d = 4{,}17.10^{-4}$ m.

În concluzie rezultă că folosind calea arătată anterior:

a. Se poate aprecia valoarea forțelor interparticule dintr-un strat fluidizat, prin introducerea coeficientului:

$$K_f = \frac{W-1}{T_\varepsilon - 1}$$

b. Se pot obține informații cu privire la fracția de goluri a agregatelor de particule; aceasta prezintă un deosebit interes practic atît din punctul de vedere al studiului structurii stratului, cît și ca urmare a posibilității de a calcula valoarea reală a gradului de neomogeneitate a unui strat fluidizat oarecare.

3. Forțele interparticule pot fi puse în evidență și la curgerea unui strat fluidizat pirntr-un prea plin prevăzut la o coloană de fluidizare. Într-adevăr, urmărind suprafața liberă a unui strat, care se scurge printr-un preaplin, se constată că aceasta formează cu orizontala un unghiu α (fig. 9) cu atît mai mare cu cît aptitudinea de aglutinare a particulelor este mai mare, cu cît particulele sînt mai rugoase și mai mici. Acest unghiu caracterizează valoarea forțelor interparticule.

Reprezentînd grafic unghiul α în funcție de diametrul particulelor, se constată că de la o anumită valoare a acestuia din urmă, unghiul susmenționat rămîne constant, valoarea sa α_1 din acest moment, fiind caracteristică pentru un anumit material.

Bazați pe aceste considerente am introdus pentru caracterizarea forțelor interparticule coeficientul

$$k_f = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_1} \qquad (13)$$

Este ușor să ne dăm seama că:

$$k_f > 1;$$

pentru straturile limită

$$k_f = 1$$

Unele rezultate experimentale, obținute pe straturi diferite, sînt redate în tab. 3 *.

Tabela nr. 3

Nr. crt.	Material fluidizat	d (mm)	K_f	tg α_1	tg α	k_f	Observații
1	Sfera de sticlă	0,392	0,538	—	—	—	
2	Sfere de sticlă	0,417	0,538	—	—	—	
3	Făină brută	$5{,}10^{-3}$	0,820	—	—	—	
4	Particule de marmoră	0,25	—	0,021	0,133	6,32	
5	Particule de marmoră	0,35	—		0,1005	4.78	
6	Particule de marmoră	0,45	—		0,0468	2,23	
7	Particule de marmoră	0,6675	—		0,023	1,09	
8	Particule de nisip	1,10	—	0,026	0,031	1,19	
9	Particule de nisip	0,6675	—		0,0747	2.86	
10	Particule de nisip	0,55	—		0,1106	4,25	
11	Particule de nisip	0,45	—		0,1245	4,80	
12	Particule de nisip	0,35	—		0,1383	5,32	

* Experiențele au fost conduse în coloane cu diametrul suficient de mare pentru ca frecarea strat-coloană să nu influențeze asupra unghiului de frecare internă. Valoarea acestui diametru a fost determinată experimental.

V. Concluzii

1. În prezenta lucrare au fost examinate diferite criterii de apreciere a structurii stratului fluidizat. Se consideră că structura stratului fluidizat poate fi pe deplin caracterizată cu ajutorul a două criterii:

a. un criteriu static — gradul de neomogeneitate a stratului fluidizat;

b. un criteriu dinamic reprezentat de fracțiunea de gaz care ia parte efectiv la procesele fizico-chimice, care au loc în strat.

2. Se face o privire comparativă între concluziile prezentate pe baza criteriilor introduse de noi și alte criterii examinate experimental în lucrarea de față.

3. Se propune o cale pentru obținerea de informații privind expandarea agregatelor de particule. Aceste informații prezintă importanță practică atît în ceea ce privește studiul structurii stratului fluidizat, cît și pentru determinarea gradului de neomogeneitate a unui strat fluidizat oarecare.

4. Se propun metode și se introduc mărimi — determinabile experimental — pentru aprecierea valorii forțelor interparticule. Se obțin date experimentale cu caracter preliminar, informativ.

ANEXA

Considerînd o încălzire nestaționară a unui strat de particule fluidizate, se poate scrie: *

$$k_c G_2 c_2 (t_i - t)\, d\theta = \alpha A (t' - T)\, d\theta = c_1 G_1 dT \qquad (14)$$

în care

k_c este fracțiunea de căldură cedată de gaze, care a fost preluată de particulele solide; *

G_2 — debitul gravimetric al agentului de fluidizare;

c_2 — căldura specifică a gazului;

t_i — temperatura de intrare în strat a gazului;

t — temperatura medie la ieșirea din strat a gazului;

θ — timp;

α — coeficient de transfer caloric;

A — suprafața particulelor solide;

t' — temperatura gazului care circulă prin agregatele de particule, la ieșirea din strat;

T — teperatura particulelor solide;

G_1 — greutatea particulelor solide;

c_1 — căldura specifică a particulelor solide.

* Se neglijează căldura reținută de gazul, care se află în strat.

Cum pentru temperatura t' se stabilește o relație de forma

$$t' = \frac{1}{\zeta} t - \frac{1-\zeta}{\zeta} t_i \tag{15}$$

se obține după cîteva operații * :

$$ln \frac{(t_i - t)}{t_i - t)_0} = -\left(\frac{G_1 c_1}{A\alpha} + \frac{G_1 c_1}{k_c G_2 c_2} \frac{1}{\zeta}\right)^{-1} \theta = -\beta\theta \tag{16}$$

Deoarece **

$$\alpha_p (t' - T) = \alpha' (t - T) \tag{17}$$

rezultă că

$$\frac{G_1 c_1}{A\alpha} + \frac{G_1 c_1}{k_c G_2 c_2} \frac{1}{\zeta} = \frac{G_1 c_1}{A\alpha'} + \frac{G_1 c_1}{k_c G_2 c_2} \tag{18}$$

De aci se obține ușor că :

$$\alpha' = \alpha \frac{k_c c_2 G_2 / \alpha A}{k_c c_2 G_2 / \alpha A + \frac{1-\zeta}{\zeta}} \tag{19}$$

Remarcăm că de cele mai multe ori $\frac{C_2 G_2}{\alpha_p A} \ll \frac{1-\xi}{\xi}$ și deci ecuația (19) se poate transcrie sub forma :

$$\alpha' \approx \frac{k_c c_2 G_2}{A} \cdot \frac{\zeta}{1-\xi} \tag{20}$$

Pe baza celor de mai sus se ajunge la concluzia că din reprezentarea grafică a mărimii $ln \frac{t_i - t}{(t_i - t)_0}$ în raport cu timpul θ — vezi lucrările [15, 16] — se pot obține informații despre coeficientul α' și de aci cu ajutorul relației (20) se poate calcula valoarea corespunzătoare a fracțiunii de gaz care trece prin agregatele de particule ξ.

NOTAȚII

ε_o — fracția de goluri a unui strat fluidizat omogen ;
ε_m — fracția medie de goluri a unui strat fluidizat neomogen;
ε — valoarea locală și instantanee a fracției de goluri ;
ΔP_s — căderea de presiune într-un strat fluidizat ;
ΔP_g — căderea de presiune dată de greutatea aparentă a particulelor solide ;

---

* Se constată — în condiții obișnuite de experimentare — că mărimea k_c nu variază în timp.

** Coeficientul α' este definit prin

$$q = \alpha' (t - T)$$

w_{cr} — viteza critică de tranziție către domeniul cvasiomogen;

η — gradul de neomogeneitate a unui strat fluidizat neomogen;

V_b — volumul de gaz, care se găsește în strat sub formă de bule;

V — volumul stratului fluidizat;

ξ — fracția din debitul de gaz, care ia parte efectiv la procesele fizico-chimice dintr-un strat fluidizat;

$W^* \equiv \frac{w}{u}$ — raport de viteze;

w — viteza agentului de fluidizare;

u — viteza bulelor de gaz;

ε_p — fracția de goluri a pachetelor de particule;

ε_{min} — fracția minimă de goluri;

$Re \equiv \frac{wd}{\varepsilon_m}$ — numărul lui Reynolds;

$Ar \equiv \frac{d^3 g}{\nu^2} \cdot \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_f}$ — numărul lui Arhimede;

d — diametrul particulelor fluidizate;

ν — viscozitate cinematică;

g — accelerația gravitației;

γ_s — greutatea specifică a particulelor solide;

γ_f — greutatea specifică a agentului de fluidizare;

k_a — coeficient care caracterizează, pentru un strat fluidizat oarecare, anizometria de expandare a acestuia;

k_p — coeficient care ține seama de valoarea forțelor interparticule.

K_f — factor prin care se apreciază valoarea forțelor interparticule, definit prin relația (12);

$W \equiv \frac{w}{w_{min}}$ — grad de fluidizare;

w_{min} — viteza maximă de fluidizare;

$T_\varepsilon \equiv \frac{w\,\varepsilon_p}{w_{min}\,\varepsilon_{min}}$ — raport fără dimensiuni;

k_f — factor prin care se apreciază valoarea forțelor interparticule, definit prin relația (13);

k_c — fracțiunea din căldura cedată de gaze care este preluată de particulele solide;

G_2 — debitul gravimetric al agentului de fluidizare;

c_2 — căldura specifică a gazului;

t_i — temperatura de intrare în strat a gazului;

t — temperatura medie la ieșirea din strat a gazului;
t' — temperatura la ieșirea din strat a gazului, care circulă prin pachetele de particule;
T — temperatura particulelor solide;
θ — timp;
α — coeficient de transfer caloric;
A — suprafața particulelor solide;
c_1 — căldura specifică a particulelor solide;
q — căldura transmisă;
G_1 — greutatea particulelor solide.

BIBLIOGRAFIE

1. *Todes O.:* Metode și procese în tehnologia chimică. Ed. Tehnică, Buc. (1957).
2. *Ruckenstein E.* și *Teoreanu I.:* Buletin Inst. Politehnic. Buc. XXI, 4, p. 125 (1959).
3. *Wilhelm R.H.* și *Kwauk K.M.:* Chem. Eng. Progress *44*, p. 201, (1948).
4. *Siromeatnikov N.I.* și *Volkov F.V.:* „Procese în strat fluidizat" Sverdlovsk (1959).
5. *Backer P. J.* și *Heertjes P. M.:* Brit. Chem. Eng. *4*, p. 240 (1958);
6. *Schügerl K., Mertz M.* și *Fetting F.:* Chem. Eng. Sci. *15*, p. 39 (1961).
7. *Martin J.* și *Andreu B.:* Compte rendu, p. 54 (1956).
8. *Datson M. J.:* A. I. Cem. E. J. *5*, p. 169 (1959).
9. *Lanneau K.P.:* Trans. Inst. Chem. Engrs. *38*, p. 125 (1960).
10. *Baumgarten K.P.* și *Pigford L.R.:* A. I. Chem. E. J. *6*, p. 115 (1960).
11. *Tiurev I. I., Tailingoldt A. L.* și *Builov A. B.:* Him Prom. nr. 5, p. 356, (1961).
12. *Ruckenstein E:* Studii și cercetări de energetică, *11*, nr. 1 (1961).
13. *Ruckenstein E.* și *Teoreanu I.:* Comunicare la Congresul de fluidizare de la Praga, mai (1961).
14. *Teoreanu I.:* Revista de chimie *11*, p. 691 (1960).
15. *Ruckenstein E.* și *Teoreanu I.:* Revue de chimie. Acad. R.P.R. *V*, p. 259 (1960).
16. *Teoreanu I.:* Lucrarea de disertație prezentată pentru obținerea titlului de candidat în științe tehnice — I.P.B. (1961).

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СТРУКТУРЫ КИПЯЩЕГО СЛОЯ

В данной работе обсуждаются разные способы оценки структуры кипящего слоя, вводя в тоже время новые критерии.

Предлагаются методы и вводятся величинн-которые могут быть определены экспериментально-для охарактеризования междучастичных сил.

Также исследуется путь для получения сведений о расширении частичных агрегатов. Эти сведения имеют значение как для изучения структуры кипящего слоя, так и для определения степени его неоднородности.

CONSIDERATIONS ON THE STRUCTURE OF THE FLUIDIZED BED

(Summary)

The present paper discusses various criteria for estimating the structure of the fluidized bed and it introduces new ones too.

Methods are proposed and experimentally determinable sizes are introduced for characterzing the interparticles forces.

A way for obtaining data on the expansion of aggregates of particles is also investigated. These data are important both for the study of the structure of the fluidized bed and for determining its degree of nonhomogeneity.

CONSIDÉRATIONS SUR LA STRUCTURE DES COUCHES FLUIDISÉES

(Résumé)

Dans le présent travail on discute les divers critères d'appréciation de la structure des couches fluidisées, en introduisant aussi de nouveaux critères.

On propose des methodes et on introduit des grandeurs, déterminables par voie experimentale, pour caractériser les forces interparticules.

On examine aussi une voie pour obtenir des informations sur l'expansion des agrégats de particules. Ces informations présentent une certaine importance, tant pour l'étude de la structure des couches fluidisées, que pour la détermination du degré de inhomogénéité de celle ci.

ÜBER DEN ANFBAU DES WIRBELSCHICHTBETTES

(Zusammenfassung)

Es werden die verschiedenen grössen die den Aufbau des wirbelschichtbettes konnzeichnen, besprochen. Neue Konngrössen werden vorgeschlagen.

Methoden und Parameter-die experimentell ermittelt werden Können — zür Konnzeichnüng der zwischen den körnern des wirbelschichtbettes wirusamen kräfte, werden vorgeschlagen. Ferner wird die Höglichkeit unterscuht, Aufschlüsse über die Volumen zunahme der Partikelafgrogate zür gewinnen. Solche Aufsschlürse sind sowohl für die Untersuchung des Aufbanes der Wirbelschicht wichtig, wie auch für die Bestimmung ihres unhomofenitätisgrandes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

REMARKS ON THE MIXING IN A FIXED OR FLUIDISED BED

E. RUCKENSTEIN, I. TEOREANU

Introduction

The movement of a fluid between the solid particles of a fixed or fluidised bed is associated with its radial and axial mixing. Radial mixing makes possible the quick elimination, in radial direction, of the heat wich is evolved in the chemical reactors. Axial mixing has unfavourable consequences since it reduces the axial variations of the concentrations.

The radial mixing in a fixed bed has been examined in papers [1—4]. A random walk model has lead for the radial diffusion (mixing) coefficient E_r to the following equation, valid for large Reynolds numbers,

$$Pe_r \equiv \frac{v D_p}{\varepsilon E_r} = 12, \tag{1}$$

where v represents the velocity of the fluid in the empty tube, D_p the diameter of the particle, E_r the radial diffusion coefficient, Pe_r Peclet's number for mixing, and ε the fraction void.

Axial mixing in a fixed bed has been treated in papers [5—10]. By comparing the diffusional model with the cell model, Mc Henry and Wilhelm [8] as well as Aris and Amundson [10], have established for the axial diffusion coefficient E_a the equation

$$Pe_a \equiv \frac{v D_p}{\varepsilon E_a} = 2. \tag{2}$$

Equation (2) is valid for large values of Reynold's number. The experimental data show that, for usual conditions, $Pe_a \approx 2$ for gases, but it has smaller values, between 0.3—1, for liquids.

The problem of axial and radial mixing in a fluidised bed is far more complex. The experimental data obtained, for liquid fluidisation, by Hanratty, Latinen and Wilhelm [11] and confirmed by Cairns and Prausnitz [12] lead to the conclusion that Pe_r shows a minimum for a value

of the fraction void ε of about 0.7. The dependence between Pe_r and fraction void, experimentally obtained in papers [11] and [12], may be probably explained by means of equation (3) established in a previous paper by one of the authors [13]

$$Pe_r = \frac{1}{k_1(1-\varepsilon) + \frac{k_2}{(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2}\sigma_\varepsilon^2} \cdot \tag{3}$$

In equation (3), σ_ε^2 represents the variance of the fraction void, while k_1 and k_2 are constants. The first term of the denominator of the equation (3) is due to the movement of the fluid between the solid particles assumed to be fixed, and the second term to the movement of the solid particles. It is to be noted that if initially σ_ε^2 increases fast with the fractions void ε, goes through a maximum and in the vicinity of $\varepsilon = 1$ it tends fast enough toward zero, equation (3) leads to a Pe_r *vs.* ε curve, which has a minimum.

Equations (1), (2) and (3) have an extreme character; they are valid for large Reynold's numbers. In the present paper we shall establish equations for diffusion (mixing) coefficients valid for a somehow wider range of values for Reynold's number. The method we use to this end has been suggested to us by that proposed in a previous paper by one of the authors [14] for the turbulence viscosity in a fluid that flows through a tube. By extending to the case of the diffusion (mixing) coefficients the equation valid for the kinematic viscosity of turbulence, it becomes possible to explain some of the experimental results mentioned above.

Turbulent viscosity for a fluid flowing throug a tube

Before trying to establish an equation for the diffusion (mixing) coefficient let us establish an equation for the kinematic viscosity of turbulence ν' for a fluid flowing through a tube. Examination of this problem will allow us to draw some conclusions which by analogy will be extended to the more complex case of the mixing process in a fixed or fluidised bed.

The state of turbulence at a distance r from the tube axis may be characterised among others by the energy ξ locally dissipated per unit volume in unit time. By „locally" we mean actually a turbulent element which has a width „l" equal to the distance where an appreciable variation of velocity takes place.

In this element of width l the energy ξ is transformed into heat through a very complex mechanism. For the case of very large Reynold's numbers this mechanism has been studied by Kolmogoroff [15, 16, 17].

The mixing due to turbulence is the more intense, the larger ξ. It depends also on the lenght l, on the density ρ of the fluid as well as on

the kinematic viscosity ν. Hence ν' is a function of ξ, l, ρ and ν. Dimensional analysis leads to the following dependence:

$$\nu' = \nu f\left(\frac{\frac{\xi}{\rho} l^4}{\nu^3}\right). \tag{4}$$

For sufficiently large Reynolds numbers, the inertial forces are sufficiently large as compared to the viscuos (friction) ones, for most of the tube cross section (excepting the region in the imediate vicinity of the wall). Hence we shall assume that for Reynolds numbers sufficiently high, ν' (excepting the region in the imediate vicinitiy of the wall) does not depend directly on kinematic viscosity. We mention that the final equation (8) obtained in this way is of the same form as the one used by Reichardt [18] to represent the experimental results concerning ν'.

Under these conditions the function f may be written

$$f \sim \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^{1/3} l^{4/3} \nu^{-1}. \tag{5}$$

But if we denote by τ the shear stress and by τ_0 the value of τ at the wall, excepting the region in the imediate vicinity of the wall, we can write

$$\frac{\xi}{\rho} = \frac{1}{\nu'} \tau^2 = \frac{1}{\nu'} \tau_0^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2, \tag{6}$$

where R represents the radius of the tube.

On the other hand, dimensional considerations lead for the distance l, to the equation.

$$l = R \varphi\left(\frac{r}{R}\right). \tag{7}$$

Hence [14]

$$\nu' \sim \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} R \varphi\left(\frac{r}{R}\right). \tag{8}$$

We also point out, that $\bar{l}$ the average value over the tube cross-section of l is proportional to the radius R of the tube.

An equation for the diffussion (mixing) coefficient

As in the previous case we consider that the diffusion coefficient of a fluid moving between the solid particles of a fixed or fluidised bed depends on ξ, ρ, ν and l. Similar considerations with those already mentioned above lead, for sufficiently large Reynolds numbers, to the equation

$$E \sim \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^{1/3} l^{4/3}. \tag{9}$$

Equation (9) is of extreme character being valid only for those cases in which turbulence is sufficiently intensive.

Axial diffusion coefficient in a fixed bed

We shall use equation (9) for the average value E_a of the axial diffusion coefficient, averaged over the cross-section.

Two problems arise: a) Computation of the energy dissipated per unit volume in unit time; b) computation of the length l.

Since the energy dissipated in the fluid in unit time is given by the expression:

$$W = V \Delta p,$$

where V is the volumetric flow rate of the fluid and Δp the pressure drop in the bed, it results that:

$$\frac{\xi}{\varrho} = \frac{V \Delta p}{\varrho h S \varepsilon}, \tag{10}$$

where h is the height of the bed and S the tube cross-section.

Imagine a fixed bed, as usual, as a bundle of tubes of radius equal to the hidraulic one.

$$R_h = \frac{\varepsilon D_t}{6(1-\varepsilon) D_t + 4 D_p} D_p. \tag{11}$$

The fact that the average value of l over the cross-section for a fluid which flows turbulently through a tube is proportional with the radius R of the tube, suggests the assumption that l is proportional with the hydraulic radius R_h, in the case of a fixed bed.

The axial diffusion coefficiet E_a is therefore given by the equation

$$E_a \sim \left(\frac{v \Delta p}{\varrho h \varepsilon}\right)^{1/3} \left(\frac{\varepsilon D_t}{6(1-\varepsilon) D_t + 4 D_p} D_p\right)^{4/3}. \tag{12}$$

For the pressure drop Δp across a fixed bed equation (13) proposed by Ergun [19] is used, as well as equation (13′) given by Carman [20]

$$\frac{\Delta P}{h} = 4.17 \frac{\mu v}{R_h^2 \varepsilon} + 0.292 \frac{\varrho v^2}{R_h \varepsilon^2}, \tag{13}$$

$$\frac{\Delta P}{h} = 5 \frac{\mu v}{R_h^2 \varepsilon} + 0.4 \left(\frac{v R_h}{\varepsilon \nu}\right)^{-1/10} \frac{\varrho v^2}{R_h \varepsilon^2}, \tag{13′}$$

where μ is the dynamic viscosity.

Hence

$$E_a \sim \left[\frac{k \nu v^2 [6(1-\varepsilon) D_t + 4 D_p]}{\varepsilon^3 D_t D_p} + \psi \cdot \frac{v^3}{\varepsilon^3}\right]^{1/3} \frac{\varepsilon D_t}{6(1-\varepsilon) D_t + 4 D_p} D_p, \tag{14}$$

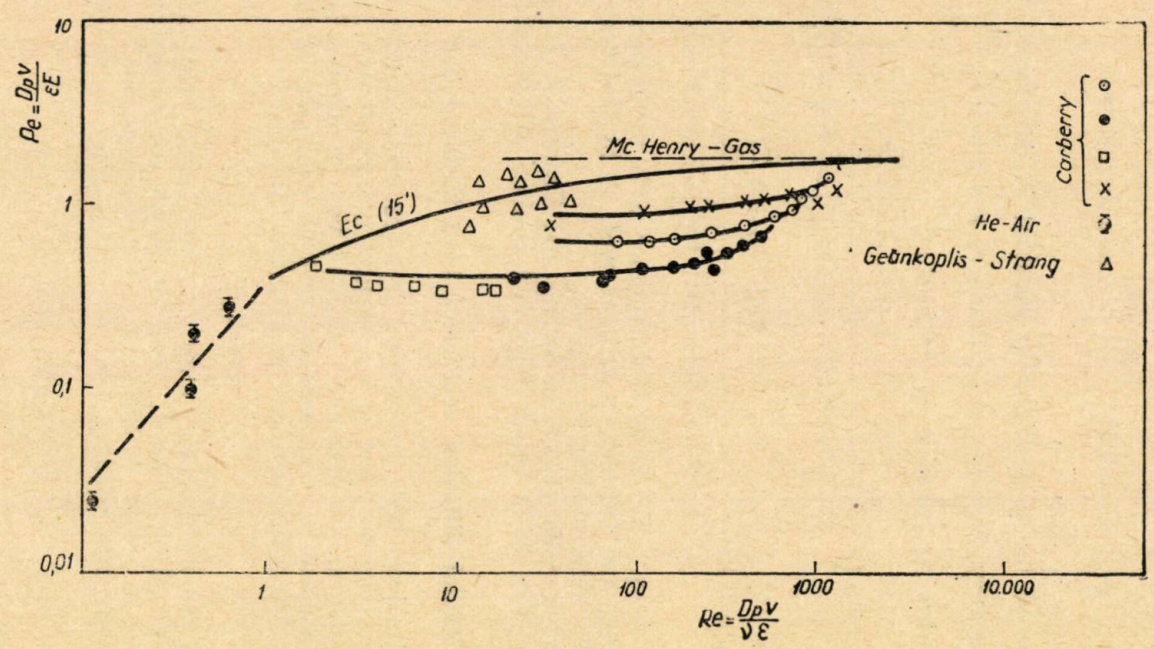

10
1
0,1
0,01
$Pe = \frac{Dpv}{\varepsilon E}$
Mc. Henry – Gas
Ec (15')
Corberry
He-Air
Gebnkoplis - Strang
1
10
100
1000
10.000
$Re = \frac{Dpv}{\nu \varepsilon}$

Fig. 1

where

$$\psi = 0.292 \text{ and } k = 4.17$$

if equation (13) is used, and

$$\psi \equiv \psi' = 0.15 \left(\frac{v R_h}{\varepsilon \nu}\right)^{-1/10} \text{ and } k \equiv k' = 5$$

if equation (13′) is used.

The value of the proportionality constant is determined taking into acount that for very large Reynold's numbers and $\varepsilon = 0.4$, $\frac{E_a \varepsilon}{v D_p} = \frac{1}{2}$.

Finally the following equation is obtained:

$$Pe_a = 0{,}15 \frac{v D_p}{\varepsilon} \frac{6(1-\varepsilon) + 4\frac{D_p}{D_t}}{\left\{k \nu v^2 \left[6(1-\varepsilon) + 4\frac{D_p}{D_t}\right] D_p^2 + \psi v^3 D_p^3\right\}^{1/3}}, \tag{15}$$

$$Pe_a = 0.13 \frac{v D_p}{\varepsilon} \frac{6(1-\varepsilon) + 4\frac{D_p}{D_t}}{\left\{k' \nu v^2 \left[6(1-\varepsilon) + 4\frac{D_p}{D_t}\right] D_p^2 + \psi' v^3 D_p^3\right\}^{1/3}}. \tag{15'}$$

In figure 1 eq. (15′) is plotted together with the experimental data given by Strang and Geankoplis [6], as well as by Carrbery and Bretton [7] on the axial mixing for liquids.

We remark that the results of Strang and Geankoplis fit well enough our curve, but that those of Carrbery and Bretton are placed lower.

Radial diffusion coefficient in a fluidised bed

As to a fluidised bed, the problem is more involved than for a fixed bed for several reasons. First at all because a fraction (which cannot be computed) of the energy dissipated per unit time in the bed is consumed by collisions between the particles as well as collisions of the particles with the wall. Secondly because an equation like

$$l \sim R_h \tag{16}$$

(the only one we imagine for l, for the time being) may be used only for those values of the fraction void for which the representation of a fluidised bed by a bundle of tubes of radius R_h is posible.

Dimensional considerations lead, for the average value of l to

$$\bar{l} = D_p \varphi \left(Re, \varepsilon, \frac{D_p}{D_t}\right).$$

As l represents the distance over which an appreciable variation of the velocity can be perceived, there follows easily that

$$\left(\frac{\partial l}{\partial Re}\right)_\varepsilon > 9, \left(\frac{\partial l}{\partial \varepsilon}\right)_{Re} < 0.$$

Hence

$$\frac{dl}{d\varepsilon}=\left(\frac{\partial l}{\partial Re}\right)_{\varepsilon}\frac{dRe}{d\varepsilon}+\left(\frac{\partial l}{\partial \varepsilon}\right)_{Re}$$

is nil for a certain value of ε and l has a maximum. For the time being it is still not possible to establish the shape of the fonction φ Neglecting the fraction of energy consumed in collisions, using for l eq. (16) and taking into acocunt the fact that, for a fluidised bed

$$\Delta p = h\,(1-\varepsilon)\,(\gamma_s-\gamma_f), \tag{17}$$

where γ_s represents the specific gravity of solid particles and γ_f the specific gravity of the fluid, it results that :

$$E_r \sim \left(\frac{g\,v\,(1-\varepsilon)\,(\gamma_s-\gamma_f)}{\varepsilon\,\gamma_f}\right)^{1/3}\left(\frac{\varepsilon\,D_t}{6\,(1-\varepsilon)\,D_t+4\,D_p}\right)^{4/3}. \tag{18}$$

The Peclet number Pe_r can be then computed by means of equation

$$Pe_r \sim \left[\frac{4\frac{D_p}{D_t}+6\,(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}(1-\varepsilon)^{1/4}}\right]^{4/3}\left(\frac{v^2}{D_p\,g}\,\frac{\gamma_f}{\gamma_s-\gamma_f}\right)^{1/3}. \tag{19}$$

The proportionality constant is determined from the fact that at the minimum fluidisation velocity $Pe_r = 12$.

$$Pe_r = 1.04\left[\frac{4\frac{D_p}{D_t}+6\,(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}(1-\varepsilon)^{1/4}}\right]^{4/3}\left(\frac{v^2}{D_p\,g}\,\frac{\gamma_f}{\gamma_s-\gamma_f}\right)^{1/3}. \tag{20}$$

Equation (20) together with Hanratty's experimental data are plotted in fig. 2.

As ought to be expected, there is satisfactory agreement with experiment up to an ε of about 0.7 ; thereafter the theorethical curve sensibly deviates from the experimental one. A minimum appears, displaced from the experimental one.

It is to be stressed the fact that this discrepancy beyond $\varepsilon = 0.7$, is due to the use of equation (16) outside ist range of validity. For large values of ε ($\varepsilon = 1$) the equation (16) may be used again. The infinite high value resulting in this case from (20) for Pe_r, is due to the fact that in the equation (17) the wall friction has been neglected as compared with the weight of solid particles, whereas for $\varepsilon = 1$ the pressure drop is the consequence of wall friction.

Eq. (18) may be used to establish an equation for the thermal conductivity in a fluidised bed.

One more observation in connection with the fluidised bed concerring the mixing of the solid particles. The energy $V\Delta p$ dissipated per unit time may be considered as the sum of two terms. One term rperesents the energy used for maintaining the suspension of solid particles and the other one represents the energy used to maintain the movement of the solid particles. The latter energy is partialy dissipated in the colli-

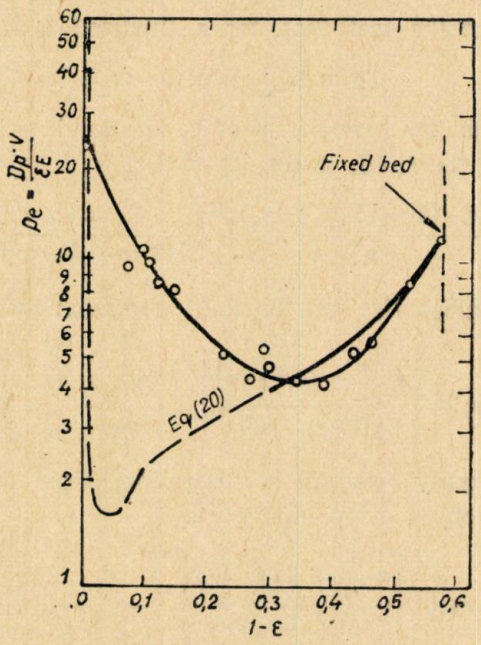


Fig. 2

sions taking place between the solid partioles, while the rest is transmitted to the fluid where lastly it is turned into heat. Following Fetting's [21] suggestion the term representing the energy required for maintaining the suspension of the particles will be estimated by means of the expression :

$$W_1 \approx V_{min} \Delta p ,$$

where V_{min} represents the minimum fluidisation volumetric flow-rate. The second term is therefore given by the expression

$$W_2 \approx (V - V_{min}) \Delta p$$

It is to be excepted that the mixing of solid particles in the fluidised bed should depend, among others, on the value of W_2.

In conclusion we should like to stress the fact that the main equation (9) used in this paper may cover both the field of a fixed bed and

of a fluidised one as well as the field of a fluid flowing turbulently through a tube and it may also give the explanation of a series of experimental known results.

NOTATIONS

ε — fraction void
v — velocity of the fluid in the empty tube
D_p — particle diameter
E_r, E_a — radial and axial diffusion coefficient
$Pe \equiv \frac{v D_p}{\varepsilon E}$ — Peclet mixing number
σ_ε^2 — the variance of the fraction void
k_1, k_2 — constants
ν' — turbulence viscosity
ν — kinematic viscosity
ξ — energy dissipated per unit volume of the fluid and in unit time
ϱ — fluid density
τ — shear stress
τ_0 — the shear stress at the wall
R — tube radius
r — distance from the tube axis
W — the energy dissipated in the fluid
V — volumetric flow rate of the fluid
Δp — pressure drop in the bed
S — cross-section of the tube
h — height of the bed
R_h — hydraulic radius
D_t — tube diameter
μ — dynamic viscosity
$Re \equiv \frac{v D_p}{\varepsilon \nu}$ — Reynolds number
g — acceleration of gravity
γ_s — specific gravity of solid particles
γ_f — specific gravity of the fluid
V_{min} — minimum fluidisation volumetric flow-rate
W_1 — energy used for the maintenance of particles suspension
W_2 — energy used for maintainig the solid particles movement.

REFERENCES

1. *Bernard R. A., Wilhelm R. H.:* Chem. Eng. Progress *46*, 233 (1950).
2. *Singer E., Wilhelm R. H.:* Chem. Eng. Progress *45*, 343 (1950).
3. *Baron T.:* Chem Eng. Progress, *48*, 118 (1952).
4. *Ranz W. E.:* Chem. Eng. Progress *48*, 247 (1952).
5. *Kramers H., Alberda G.:* Chem. Engng. Sci. *2*, 173 (1953).
6. *Strang D. A., Geankoplis C. J.:* Ind. Eng. Chem *50*, 1305 (1958).
7. *Carberry J. J., Bretton R. H.:* A. I. Chem. Eng. Journal *4*, 367 (1958).
8. Mc. *Henry K. W., Wilhelm R. H.:* A. I. Chem Eng. Journal *3*, 83 (1957).
9. *Ruckenstein E. Smigelschi O.:* C. r. *252*, 3574 (1961).
10. *Aris R., Amundson N. R.:* A. I. Ch. E. Journal *3*, 280 (1957).
11. *Hanratty T. J., G. Latinen, Wilhelm R. H.:* A. I. Chem. Eng. Journal *2*, 372 (1958).
12. *Cairns E. J., Prausnitz J. M.:* A. I. Ch. E. Journal *6*, 554 (1960).
13. *Ruckenstein E.:* Rev. de Chimie, Bucureşti *11*, 721 (1960).
14. *Ruckenstein E.:* I. A. N. SSSR nr. 5, 23 (1955).
15. *Kolmogoroff A. N.:* D. A. N. SSSR *31*, 538 (1941) ; *32*, 16 (1941).
16. *Obuhov A. M., Iaglon* A. M., PMM SSSR *15*, 1 (1951).
17. *Batchelor G. K.:* Proc. Camb. Phil. Soc. *43*, 533 (1947).
18. *Reichardt H.:* Z. A. M. M. *31*, 208 (1951).
19. *Ergun S.:* Chem. Eng. Progress *48*, 89 (1952).
20. *Carman P. C.:* Flow of gases through porous media, Butterworth Scientific Publications (1956).
21. *Schügerl K., Merz M., F. Fetting:* Chem Engng. Sci *15*, 39 (1961).

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В НЕПРОДВИЖНОМ ИЛИ В КИПЯЩЕМ СЛОЕ

(Резюме)

В настоящей работе устанавливается, для радиальонго или аксиального коэфициента перемеmивания в неподвижном или кипящем слое, уравнение (9).

В этом уравнении ξ представляет рассеяную энергию на единицу обчёма в единицу времни, ρ плотность жидкости или газа, R_h гидравлический радиус.

Уравнение соответствуст удовлетворительно, как для жидкостей так и для газов, экспериментальным данным, для коэффициента аксиального перемешивания в неподвижном слое ; удовлетворительные резюльтаты полуьаются и для радиального перемешивания в кипящем слое, ири знасениях ϵ до 0,7.

REMARKS ON THE MIXING IN A FIXED OR FLUIDISED BED

(Summary)

In this paper one establishe equation (9) for the radial or axial diffusion coeficient in a fixed or fluidised bed. In this equation ξ represents the energy dissipated per unit volum in unit time, ρ the fluid density and R_h the hydraulic radius.

The equation represents adequately for liquids a series of experimental data for the axial diffusion coefficient in a fixed bed. Satisfactory results have been also obtained for the radial mixing in a fluidised bed for values of ε up to 0,7.

OBSERVATIONS SUR LE MELANGEAGE DANS UNE COUCHE FIXE OU FLUIDISÉE

(Résumé)

Dans le présent travaill, on établit, pour le coéfficient radial ou axial de mélange dans une couche fixe ou fluidisée, l'équation (9). Dans cette équation ξ représente l'énergie dissipée dans l'unité de volume et dans l'unité de temps, ρ la densité du fluide et R_h le rayon hidraulique. L'équation représente d'une manière satisfaisante, pour les liquides une sèrie de résultats expérimentaux pour le coéfficient de mélange axial dans une couche fixe. On obtient de même de resultats satisfaisante pour le coéfficient de mélange radial dans une couche fludisée, pour des valeurs de ε au dessous de 0,7.

ÜBER DEN MISCHVORGANG IN SCHÜTTSCHICHTEN UND WIRBELSCHICHTEN

(Zusammenfassung)

In der vorliegender Arbeit wird Gleichung (9) aufgestellt, für Berechnung des radialen oder axialen Mischkoeffizienten, in einer Schüttschicht oder Wirbelschicht. In dieser Gleichung ist ξ die je Volumeneinheit und Zeiteinheit dissipierte Energie, ρ die Dichte der Flüssigkeit, R_h — der hydraulische Radius. Die Gleichung wiedergibt in befriedigender Weise die für Flüssigkeiten experimentell ermittelten Werte des axialen Mischkoeffizienten in einer Schüttschicht. Desgleichem, ist die Übereinstimmung befriedigend für den radialen Mischkoeffizienten in einer Wirbelschicht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

INFLUENȚA REACȚIEI CHIMICE ASUPRA VITEZEI DE DIFUZIE ÎN SCHIMBĂTORI DE IONI

V. PĂRĂUȘANU și F. DANEȘ

Mai mulți cercetători au considerat că etapa lentă a procesului de schimb ionic pe rășini organice e determinată de reacția chimică propriu zisă [1, 2, 3]. S-a arătat însă că această ipoteză poate fi valabilă numai în cazuri particulare [4] și că, în mod obișnuit, difuzia constituie fenomenul care determină viteza procesului de schimb. Confuzia se datora unei asemănări formale dintre ecuația cineticii de difuzie și ecuația cinetică a unei reacții de schimb bimolecular [5].

O serie de lucrări ale lui Holm, Boyd, Tovbin etc. Bauman, [6, 7, 8, 9, 10, 11] au adus noi argumente referitoare la etapa de control a procesului de schimb ionic. Autorii arată că etapa determinantă se realizează după împrejurări fie prin difuzia în film, fie prin difuzia în particole, în funcție de gradul de saturare al schimbătorului. La început are pondere mai mare difuzia în film, iar spre sfîrșitul procesului difuzia în granulă.

În cazul poliectroliților polistirensulfonici, Boyd și Bauman [12, 13] au arătat că în soluții apoase difuzia în granulă predomină la concentrații exterioare mai mari de 0,1 M și difuzia în film devine determinantă numai la concentrații mai mici de 0,001 M [12].

În solvenți neapoși difuzia internă predomină chiar la concentrații mai mici [11, 13, 14] datorită gradului de disociere foarte scăzut al ionitului în aceste soluții.

În majoritatea schimburilor care prezintă importanță practică s-a dovedit că etapa lentă a procesului o formează difuzia în granulă [15].

Difuzia în granulă ar putea decurge prin două mecanisme: fie prin schimbarea de poziție a ionilor fixați pe scheletul ionitului, similar difuziei în cristale ionice, fie prin difuzia ionilor prin gelul ionitic. Prezența în schimbătorii de ioni minerali și în unele rășini organice a unei rețele spațial constituite poate duce la concluzia că difuzia se produce într-adevăr prin schimbări de poziție ale ionilor din puncte fixe. Ținînd însă seama de structura amorfă a majorității ioniților organici, și de faptul că dimensiunile coefiicenților de difuzie în granulă sînt mult mai mari decît în cristale ionice, devine mai firească varianta de difuzie prin gel.

Difuzia ionului Na^+ în apă se face cu $D \cong 10^{-5}$ cm²/s, difuzia prin ioniți cu valori $D \cong 10^{-6}$—10^{-7} cm²/s, pe cînd valorile D pentru difuzia în cristale de $NaCl$ sînt de ordinul 10^{-11}—10^{-12} cm²/s [11].

Coeficienții de difuzie în granulă depind într-o foarte mare măsură de structura ionitului. Mărirea cantității de reticulant (divinil benzen) de la 1% la 24% în structura cationitului polistiren sulfuric, micșorează de 400 ori valoarea coeficientului de difuzie în granulă pentru ionul Zn^{2+} la 25°C [8].

Difuzia este determinată în mare măsură și de natura grupelor active ale ionitului. În schimbători cationici cu grupa activă carboxil, coeficienții de difuzie sînt cu 2 ordine de mărime mai mici decît în cazul cationiților sulfonici iar în cationiți cu grupa activă OH fenolic, coeficienții de difuzie sînt chiar și mai mici.

Rețeaua de bază fiind asemănătoare în toate cele trei tipuri de ioniți, nu poate fi vorba de o diferență propriu zisă a coeficienților de difuzie, ci de influența reacției chimice asupra difuziei, ce depinde de natura și structura ionitului întrebuințat.

Coeficientul de difuzie depinde de natura ionilor preexistenți în ionit și de a ionilor ce intră în granulă din soluția exterioară. S-a stabilit o dependență deosebit de pronunțată a valorii coeficientului de difuzie de valența ionului: pentru ionii bivalenți coeficienții de difuzie sînt de cca. 10 ori mai mici decît pentru cei monovalenți, pentru cei trivalenți de 100 ori, iar pentru cei tetravalenți coeficienții de difuzie sînt de cca. 1000 ori mai mici.

Coeficientul de difuzie în ionit depinde în mare măsură și de solvent. Studiile de schimb ionic în alcooli, cetone și hidrocarburi aromatice, arată variații pînă la 10.000 ori ale coeficienților de difuzie. Acest lucru confirmă părerea că nu este vorba de o difuzie prin salturi de la pozițiile active ocupate la cele libere, ci de un transfer al ionilor prin lichidul ambiant din interiorul ionitului.

În primă aproximație, coeficientul de difuzie internă nu trebuie să depindă de concentrația soluției exterioare. Nepotrivirile observate experimental se datorează fie alegerii necorespunzătoare ale condițiilor de lucru, (concentrații foarte mici ale soluției exterioare sau agitări prea slabe ceea ce fac ca difuzia în film să capete o pondere apreciabilă) sau a unor efecte Donnan cauzate de un raport prea mare între concentrația soluției exterioare și concentrația grupelor active din ionit.

Viteza sau starea de agitare a soluției exterioare ca și diametrul granulei nu trebuie să aibă influență asupra valorilor coeficientului de difuzie. Dacă se constată în determinările experimentale o mărire a coeficientului de difuzie odată cu intensificarea agitării, acest lucru indică valori apreciabile ale rezistenței peliculei de lichid, în timp ce o dependență a coeficientului de difuzie de diametrul granulei presupune neomogenități în repartiția grupelor active din ionit.

Se constată deasemeni o dependență a difuziei în granulă de raza ionilor și anume: cu cît raza ionică este mai mare, cu atît difuzia este mai lentă. S-a stabilit un paralelism între vitezele de difuzie ale ionilor alcalini și alcalino-pămîntoși și raza acestor ioni. Trebuie însă să se

ține seama la stabilirea unor astfel de paralelisme de starea propriu zisă a ionilor respectivi înăuntrul granulei, deși în general în interiorul ionitului speciile ionice au aproximativ același grad de hidratare sau solvatare ca și în soluție. În unele cazuri însă au loc separări parțiale sau totale ale moleculelor din anvelopa de solvent, ceea ce face ca ridicarea temperaturii sau întrebuințarea unui ionit mai reticulat să poată duce la inversarea ordinei valorilor coeficienților de difuzie. Așa de exemplu, în timp ce în cationiți polistiren sulfonici cu grad normal de reticulare (8—12% *DVB*) ionii alcalini au coeficienții de difuzie crescători în ordinea : $D_{Li} < D_{Na} < D_K < D_{Rb} < D_{Cs}$, în aceeași ioniți avînd o proporție de reticulant 24%, $D_{Cs} < D_{Na}$.

Valori bine definite ale coeficientului de difuzie se cunosc numai în cazul schimbului izotopic, în care compoziția mediului difuzant se păstrează constantă. Numeroasele măsurători făcute pentru a determina acești coeficienți cu ajutorul trasorilor radioactivi au dat indicații prețioase despre mecanismul proceselor interne de schimb ionic.

Deși există multiple încercări de a reda prin ecuații matematice aspectul cantitativ al fenomenelor cinetice de difuzie în granulă, nu se poate spune că s-a ajuns pînă în prezent la o opinie unitară în această privință.

Unii cercetători pornind de la ipoteza unui gradient linear de concentrație în procesul de difuzie au ajuns la unele ecuații cinetice de forma :

$$F = 1 - exp\left(-\frac{ADt}{n^2}\right) \tag{1}$$

în care : F = gradul de atingere al echilibrului, t = timpul, r_0 = raza granulei, D = coef. de difuzie ale perechii de ioni în solid și A un coeficient numeric egal după Gluechauf și Suyata cu π^2 [12, 16] după Gilliland cu 12 [17] iar după Klamer cu 15 [18]).

O rezolvare mai completă a acestei probleme a fost dată de Boyd [5] care pornind de la ecuația difuziei formulată de Barrer [19] :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{r} D \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rq) \tag{2}$$

conform căreia variația în timp a concentrației ionilor este determinată numai de fenomenele de difuzie, ajunge printr-o extindere și generalizare la o expresie ce redă gradul de saturare al granulei :

$$F = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} exp - \left[\frac{\pi^2 Dti^2}{r_0^2}\right] \tag{3}$$

Vermeulen [20] arată că formula lui Boyd se poate aproxima în mod satisfăcător printr-o relație mult mai simplă de forma :

$$F = \left[1 - exp\left(\frac{\pi^2 Dt}{r_0^2}\right)\right]^{1/2} \tag{4}$$

Aceste formule sînt aplicabile numai în cazul schimburilor izotopice unde concentrația externă a ionilor rămîne constantă și ele se pot extinde în general numai la acele cazuri în care concentrația soluției exterioare rămîne quasi-constantă, printr-o continuă reînoire, sau printr-un raport inițial mare între concentrația soluției exterioare și cea din schimbător.

Formula lui Boyd prezintă remarcabile avantaje față de celelalte formule deduse anterior, fapt care a dus la adoptarea ei în mod aproape general la studiul schimbului izotopic și al schimbului ionic de valență egală. Cu toate acestea ea reprezintă și unele neconcordanțe față de datele experimentale dintre care semnalăm:

a. Coeficienții de difuzie calculați după formula lui Boyd scad spre sfîrșitul procesului de schimb [8, 21, 22] Boyd presupune că aceste neregularități s-ar datora dispunerii neomogene a grupelor ancoră din interiorul granulei, consecință a unui proces incomplet de sulfonare. Această explicație nu poate fi însă valabilă întrucît se constată că valoarea coeficienților de difuzie astfel calculați nu depinde de diametrul particolei. (În cazul valabilității acestei ipoteze ar fi trebuit ca coeficienții de difuzie aparenți să crească atunci cînd scade diametrul granulei, ceea ce nu se observă).

b. Valorile coeficienților de difuzie calculați cu formula lui Boyd sînt de cca. 100 ori mai mici în cationiți carboxilici (și în ioniții cu grupe fenolice de schimb și mai mici) decît cei calculați pentru aceiași ioni în cationiți polistiren sulfonici [11, 13, 14, 23]. Acest lucru nu se poate explica prin teoria lui Boyd după caz care difuzia ar trebui să fie influențată numai de compactitatea rețelei ionitului și de raza ionului de schimb, nu și de natura grupelor de schimb.

c. Se constată că în solvenți neapoși valorile coeficienților de difuzie sînt mult mai mici decît în apă și se observă o dependență a coeficienților de difuzie astfel calculați de constanta dielectrică a mediului respectiv.

Aceste fapte au făcut ca unii cercetători [11, 13] să emită ipoteza că cinetica internă a schimbului de ioni n-ar fi determinată numai de difuzia ionilor ci și de reacția chimică propriu zisă a cărei viteză depinde de tăria ionitului, adică de gradul de disociere al grupelor ancoră, de natura solventului, de constanta dielectrică a mediului, etc.

Ne propunem să arătăm că introducerea adecvată în ecuație cinetice interne a unor parametrii referitori la gradul de disociere al ionitului și la viteza reacției chimice propriu zise, duce la ameliorarea neconcordanțelor semnalate între teorie și experiență cu privire la cinetica schimbului ionic în granulă.

Stabilirea ecuației cinetice chimico-difuzionale

Considerăm schimbul ionic ce are loc între ioni de aceeași valență după o ecuație bimoleculară de forma:

$$RA + B^{z+} \rightleftarrows RB + A^{z+}$$

în care A reprezintă ionii fixați în schimbătorul R, iar B ionii care se schimbă din soluție.

În locul ecuației cu derivate parțiale a difuziei după Barrer [19] vom considera un sistem de ecuații cu derivate parțiale în care variația în timp a concentrației ionilor nu este determinată numai de difuzie ci și de reacția chimică :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{r} D \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rq) - kq\ (Q_0 - Q) + k'Q\ (q_0 - q) \tag{5}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = kq\ (Q_0 - Q) - k'Q\ (q_0 - q) \tag{6}$$

unde :

r = distanța față de centrul sferei (cm),
D = coeficientul de difuzie (cm^2/s),
t = timpul (s),
q = concentrația ionilor liberi (mval/ml),
Q — concentrația ionilor fixați,
q_0 și Q_0, valorile maxime corespunzătoare lui q și Q,
k = constanta de viteză a reacției directe (ml/mval/s),
k' = constanta de viteză a reacției inverse (ml/mval/s),
k' este dat de relația :

$$k' = \frac{k}{K} \tag{7}$$

unde K reprezintă constanta de echilibru.

În cazul schimbului izotopic coeficientul de difuzie trebuie să fie constant în timp, iar valoarea constantei de echilibru egală cu unitatea. În consecință cele două constante de viteză sînt egale și sistemul (5, 6) devine :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} - by + az \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= by - az \end{aligned} \tag{8}$$

în care s-a notat :

$$\begin{aligned} y &= rq \\ Z &= rQ \\ a &= kq_0 \\ b &= kQ_0 \end{aligned} \tag{9}$$

În cazul unei soluții în continuă reînoire formată integral din componentul B și cînd în interiorul granulei există numai componentul A, funcțiile $y\ (r, t)$ și $z\ (r, t)$ satisfac condițiile inițiale:

$$y\ (r,0) = \frac{ar}{k}$$
$$z\ (r,0) = \frac{br}{k} \tag{10}$$

și condițiile finale:

$$y\ (0,t) = 0 \tag{11}$$
$$z\ (0,t) = 0$$
$$y(r_0, t) = 0 \tag{12}$$
$$z(r_0, t) = 0$$

Pentru rezolvarea sistemului (10) separăm variabilele sub forma:

$$y\ (r, t) = r\ (r)\ T(t)$$
$$z\ (r, t) = \varrho\ (r)\ \tau\ (t) \tag{13}$$

Introducem parametrii nedeterminați, L și m^2 și sistemul (10) devine:

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{\tau' + a\tau}{bT} = L$$
$$\frac{R''}{\varrho} = \frac{T' + bT - \frac{a}{L}\tau}{DT} = -m^2 \tag{14}$$

Dacă $m \neq O$, funcțiile R și p au soluțiile:

$$R = A \sin mr + B \cos mr$$
$$\varrho = \frac{1}{L}(A \sin m^2 r + B \cos mr) \tag{15}$$

iar dacă $m = O$:

$$R = A' r + B'$$
$$\varrho = \frac{s}{L}(A' r + B') \tag{16}$$

în care A, B, A', E' sînt coeficienții nedeterminanți.

În funcție de T și τ ecuațiile (14) duc la sistemul de ecuații diferențiale lineare:

$$\tau' + a\tau - bLT = 0$$
$$T' - \frac{a}{L}\tau + (b + m^2 D)\ T = 0 \tag{17}$$

a cărui ecuație caracteristică este:

$$\lambda^2 + \lambda\,(a + b + m^2 D) + am^2 D = 0 \tag{18}$$

Această ecuație admite două rădăcini negative:

$$\mu < \eta < 0$$

și soluția sistemului (17) va fi:

$$\tau = A_1\, e^{\mu t} + B_1\, e^{\eta t}$$

$$T = A_2\, e^{\mu t} + B_2\, e^{\eta t}$$

A_2 *și* B_2 se determină prin înlocuirea valorilor corespunzătoare pentru T și τ în una din ecuațiile sistemului (17).

Pentru $m \neq O$ avem:

$$A_2 = \frac{\mu + a}{bL} A_1 \quad \text{și} \quad B_2 = \frac{\eta + a}{bL} B_1$$

și soluția sistemului (17) ia forma:

$$\tau = A_1\, e^{\mu t} + B_1\, e^{\eta t}$$

$$T = A_1 \frac{\mu + a}{bL} e^{\mu t} + B_1 \frac{\eta + a}{bL} e^{\eta t} \tag{19}$$

Pentru $m = O$, se obțin pe aceeași cale pentru și η valorile: $\mu = -(a+b)$ și $\eta = O$ iar pentru τ și T expresiile:

$$\tau = A_1\, exp\ [-(a + b)\ t + B_1]$$

$$T = \frac{A}{L_1}\, exp \left[-(a + b)\ t + B_1 \frac{a}{bL} \right] \tag{20}$$

Sistemul (8) devine pentru $m \neq O$:

$$y = (A\ \sin\ mr + B\ \cos\ mr) \left(A_1 \frac{\mu + a}{bL} e^{\mu t} + B_1 \frac{\eta + a}{bL} e^{\eta t} \right)$$

$$z = \frac{1}{L} (A\ \sin\ mr + B\ \cos\ mr)\ (A_1\, e^{\mu t} + B_1\, e^{\eta t}) \tag{21}$$

Condițiile limită (11) duc la: $B = O$ iar (12) la: $\sin\ mr = O$, și

$$m = \frac{i\pi}{r_0} \tag{22}$$

unde i este un număr întreg.

Cu aproximația unei constante arbitrare ecuațiile (21) devin pentru $m \neq O$:

$$y_i = \sin\left(\frac{i\pi r}{r_0}\right)\left(A_1 \frac{\mu_i + a}{b} e^{\mu_i t} + B_1 \frac{\eta_i + a}{b} e^{\eta_i t}\right)$$
$$z_i = \sin\left(\frac{i\pi r}{r_0}\right)\left(A_1 e^{\mu_i t} + B_1 e^{\eta_i t}\right) \tag{23}$$

în care μ și η depind de i prin intermediul lui m, iar A_1 și B_1 sînt coeficienți nedeterminanți ce depind de i.

Pentru $m = O$, sistemul (8) ia forma:

$$y = \frac{1}{L}(A'r + B')\left(A_1 e^{-(a+b)t} + B_1 \frac{a}{b}\right)$$
$$z = \frac{1}{L}(A'r + B')\left(A_1 e^{-(a+b)t} + B_1\right) \tag{24}$$

Aplicarea condițiilor limită (11) și (12) duc la $A' = B' = O$, adică pentru cazul $m = O$, y și z sînt nule.

Soluția sistemului (8) poate fi prezentată sub forma unei combinații lineare a soluțiilor particulare y_i și z_i:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi r}{r_0}\right)\left(A_i \frac{\mu_i + a}{b} e^{\mu_i t} + B_i \frac{\eta_i + a}{b} e^{\eta_i t}\right) \tag{25a}$$

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi r}{r_0}\right)\left(A_i e^{\mu_i t} + B_i e^{\eta_i t}\right) \tag{25b}$$

Ținînd seama de (10) ecuația (25 a) devine:

$$\frac{br}{k} = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i) \sin i\frac{\pi r}{r_0}$$

și prin dezvoltare în serie Fourier se obține:

$$A_i + B_i = \frac{\int_0^{r_0} \frac{br}{k} \sin\left(\frac{i\pi r}{r_0}\right) dr}{\int_0^{r_0} \sin^2\left(\frac{i\pi r}{r_0}\right) dr} = (-1)^{(i+1)} \frac{2\, b\, r_0}{k_i\, \pi} \tag{26}$$

În mod analog din ecuația (25 b) rezultă:

$$\frac{ar}{k} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(A_i \frac{\mu_i + a}{b} + B_i \frac{\eta_i + a}{b}\right) \sin \frac{i\pi r}{r_0}$$

care prin dezvoltare devine:

$$A_i \frac{\mu_i + a}{b} + B_i \frac{\eta_i + a}{b} = (-1)^{i+1} \frac{2\, a\, r_0}{k_i \pi} \tag{27}$$

Din ecuațiile (26) și (27) se determină valorile coeficienților A_1 *si* B_1:

$$A_i = \frac{2b\, r_0\, \eta_i}{k_i\, \pi\, (\eta_i - \mu_i)} (-1)^{i+1}$$
$$B_i = -\frac{2\, b\, r_0\, \mu_i}{k_i\, \pi\, (\eta_i - \mu_i)} (-1)^{i+1} \tag{28}$$

înlocuind aceste valori în (25 a) și (25 b) obținem:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi r}{r_0} \left[\frac{2\, r_0\, \eta_i\, (\mu_i + a)\, (-1)^{i+1}}{k_i\, \pi\, (\eta_i - \mu)} e^{\mu_i t} - \frac{2 r_0 \mu_i (\eta_i + o)\, (-1)^{i+1}}{k_i\, \pi\, (\eta_i - \mu_i)} e^{\eta_i t} \right]$$

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi r}{r_0} \left[\frac{2b\, r_0\, \eta_i\, (-1)^{i+1}}{k_i\, \pi\, (\eta_i - \mu_i)} e^{\mu_i t} - \frac{2b r_0 \mu_i (-1)^{i+1}}{k_i\, \pi\, (\eta_i - \mu_i} e^{\eta_i t} \right]$$

Ținînd seama de (9) prin însumare obținem:

$$q_0 + Q_0 = \frac{a+b}{k}$$
$$q + Q = 2 \frac{b}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0}{i\pi r} \left(\sin \frac{i\pi r}{r_0} \right) \theta_i \tag{29}$$

unde

$$\theta_i = (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{\eta_i - \mu_i} \right) \left(\frac{\eta_i\, (\mu_i + a + b)}{b} e^{\mu_i t} - \frac{\mu_i (\eta_i + a + b}{b} e^{\eta_i t} \right)$$

Gradul de atingere al echilibrului este dat de relația:

$$F = 1 - \frac{\int_0^{r_0} 4\, \pi\, r^2\, (q + Q)\, dr}{\int_0^{r_0} 4\, \pi\, r^2\, (q_0 + Q_0)\, dr} \tag{30}$$

și integrînd în raport cu r rezultă:

$$F = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i\, (\mu_i + a + b)}{i^2\, (\eta_i - \mu_i)\, (a + b} e^{\mu_i t} - \frac{(\eta_i + a + b)}{i^2\, (\eta_i - \mu_i)\, (a + b)} \mu e^{\eta_i t} \tag{31}$$

în care η_i și μ_i sînt în ordine crescătoare, rădăcinile ecuației

$$\lambda^2 + \lambda \left(a + b \frac{i^2\, \pi^2}{r_0^2\, D} \right) + a \frac{i^2 \pi^2}{r_0^2} D = 0$$

Ecuația (31) reprezintă ecuația cinetică elaborată de noi pentru schimbul ionic în granulă la concentrația quasi constantă la interfață, în cazul difuziei însoțită de reacția chimică de schimb.

Discuția și verificarea ecuației finale (31).

1. În cazul unui ionit total disociat, $O_0 = Q$ și deci $b = O$; rădăcinile ecuației caracteristice vor fi:

$$\eta = -a; \quad \mu_i = -\frac{i^2 \pi^2}{r_0^2} D$$

În aceste condiții ecuația (31) devine:

$$F = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} e^{-\left[\frac{i^2 \pi^2 Dt}{r_0^2}\right]} \tag{32}$$

ceea ce arată că pentru o disociere totală a ionitului ecuația (31) trece în ecuația lui Boyd.

2. În cazul unui ionit puternic disociat, dar nu total, $q_0 \ll Q_0$ sau $a \gg b$. În acest caz ecuația generală (31) capătă forma:

$$F \cong 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i^2} \left(\frac{bc^2}{a(a-c)^2} \right) e^{-at} + \left(1 - \frac{bc^2}{a(a-c)^2} \right) e^{-ct} \right] \tag{33}$$

unde

$$c = \frac{i^2 \pi^2}{r_0^2} D$$

Ptentru $kq_0 r_0^2 \ll \pi^2 D$ formula (33) se poate scrie:

$$F = F^* \ (1 - \alpha) + \alpha (1 - e^{\beta t}) \tag{34}$$

unde α reprezintă concentrația ionilor fixați raportată la concentrația ionilor mobili, sau gradul de asociere al ionitului

$$\alpha = \frac{Q_0}{r_0} \ll 1 \quad \text{și} \quad \beta = k \ q_0$$

$F,^*$ reprezintă gradul de atingere al echilibrului dat de formula lui Boyd în aproximația lui Vermeulen (4).

Din ecuația propusă de noi (34) se obține pentru coeficientul de difuzie real valoarea:

$$D = -\left[2{,}303 \ \log \ (1 - F^2) + \frac{2 Q_0 F}{q_0 (1 + F)} \right] \frac{r_0^2}{\pi^2 t} \tag{35}$$

iar din ecuația lui Boyd în aproximația lui Vermeulen (4) se obține pentru coeficientul de difuzie aparent expresia:

$$D^* = -2{,}303 \ \log \ (1 - F^2) \frac{r_0^2}{\pi^2 t} \tag{36}$$

Din comparația relațiilor (35) și (36) rezultă:

$$\frac{D}{D^*} = \frac{2 \alpha F}{2{,}303 \ (1 + F) \ \log \ (1 - F^2)} + 1 \tag{37}$$

Analiza acestei relații arată că:

a) $D^* > D$

și eroarea ce se face înlocuind D cu D^* este pozitivă.

$$\varepsilon = \frac{D^* - D}{D} \cdot 100\% > 0$$

b) ε crește cînd crește α

c) ε scade cînd crește F ($F \cong 1$, $\varepsilon \cong O$)

d) Pentru valori relativ mici ale lui F, curba $\varepsilon(F)$ poate fi considerată lineară.

Pentru calcularea coeficienților de difuzie dispunem de obicei de curba $F(t)$ și de r_0.

— Dacă se cunoaște α, se aplică pentru a calcula coeficienții de difuzie formula completă dată de noi prin relația (33) sau formula aproximativă (35) ambele valabile pentru valori mici ale lui α.

— Cînd nu se poate determina α, coeficienții reali de difuzie se vor calcula din valoarea coeficienților aparenți de difuzie (D^*) aplicînd prin metoda erorii pătrate medii minime.

Pentru fiecare valoare a gradului de realizare a echilibrului F_i, se calculează corespunzător D_i^* și pentru fiecare pereche de valori F_i și D_i^* se calculează expresiile:

$$A_i = D_i^*$$

$$B_i = D_i^* - \frac{2F_i}{(1+F_i)\ 2{,}303\ \log \frac{1}{1-F_i^2}}$$

apoi valorile medii:

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n} \quad \text{și} \quad V = \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{n}$$

și diferențele: $a_i = A_i - U$

$$\beta_i = B_i - V$$

Din condiția de minim a erorii pătratice medii:

$$E = \left[\frac{1}{n(n-1)} \Sigma \left(\frac{D_i - D_m}{D_m}\right)^2\right]^{1/2} = \min \tag{39}$$

în care D_m este valoarea medie a coeficientului de difuzie real, rezultă pentru un grad de asociere x:

$$x = \frac{UN - VM}{UP - VN} \qquad \text{unde:} \qquad \begin{aligned} M &= \Sigma \alpha_i^2 \\ N &= \Sigma \alpha_i \beta_i \\ P &= \Sigma \beta_i \end{aligned}$$

Final valoarea reală a coeficienților de difuzie este dată de relația:

$$D_i = A_i - x\,\beta_i \qquad (40)$$

Pentru a arăta avantajele ecuției dedusă de noi față de formula lui Boyd-Vermeulen, prezentăm comparativ coefiicenții pentru difuzia izotopică a *Zn* calculați după datele lui Boyd și Soldano [8] cu formula propusă de Boyd și cu formula dedusă de noi.

Tabela 1

Ionit cu 24% reticulant, temperatura 25°C.

F_i%	25,4	36,95	48,4	57,0	89,4	media
$10^9 D_1^*$ cm^2/s	2,89	2,74	2,66	2,50	2,37	2,63
$10^9 D_1$ cm^2/s	2,34	2,42	2.45	2,36	2,36	2,38

Eroarea pătratică medie: formula lui Boyd 3,46%

formula (35) 0,98%

Gradul de asociere $\alpha = 3{,}15\%$

Tabela 2

Ionit cu 8% *DVB*, temperatura 0,3°C.

F_i%	27,0	36,0	43,0	67,5	71,5	media
$10^8 D_1^*$ cm^2/s	2,16	2,08	2,08	2,07	2,05	2,09
$10^8 D_i$ cm^2/s	2,01	1,99	2,04	2,04	2,03	2,02

Eroarea pătratică medie: formula lui Boyd. 0,90%

formula (35) 0,38%

Gradul de asociere $\alpha = 0{,}96\%$.

Tabela 3

Ionit cu 16% DVB, temperatura 50°C.

F_i%	36,6	49,0	68,4	81,0	media
$10^8 D_1^*$ cm^2/s	1,70	1,57	1,15	0,84	1,31
$10^8 D_1$ cm^2/s	0,87	1,08	1,96	0,75	0,92

Eroarea pătratică medie: dată de formula lui Boyd 15,1%

dată de formula (35) 7,5%

Gradul de asociere $\alpha = 12{,}9\%$.

Din analiza acestor trei serii de date se constată că folosind ecuația dedusă de noi se obțin valori mult mai constante pentru coeficienții de difuzie ai schimbului izotopic, ceea ce se poate vedea atît din compararea erorilor medii pătratice ca și din diagramele 1, 2, 3.

Se observă de asemeni că valorile reale ale coeficienților de difuzie sînt mai mici decît cele calculate după formula lui Boyd.

Valorile obținute pentru coeficienții de difuzie în cationiți slab acizi sau în medii cu constantă dielectrică mică sînt justificate dacă ținem seama că în aceste condiții concentrația grupelor active disociate este

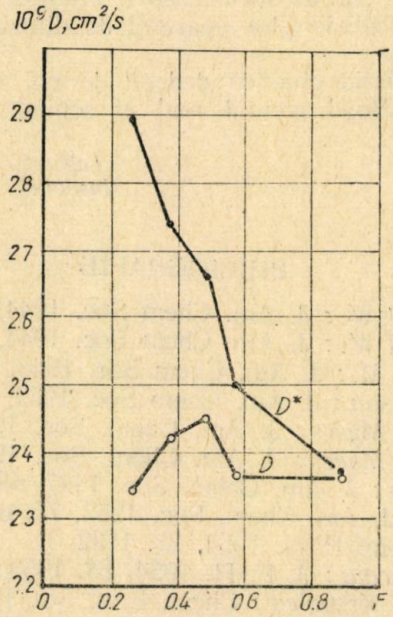


Fig. 1

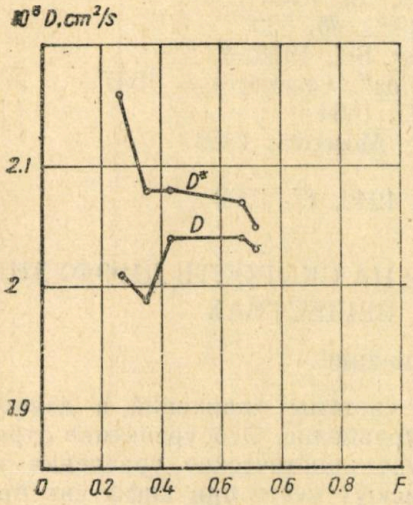


Fig. 2

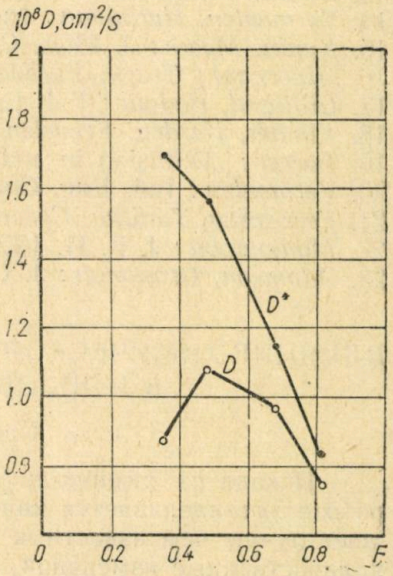


Fig. 3

destul de mică și reacția chimică se manifestă cu o viteză mai mică decît în cationiți puternic acizi sau în medii cu constantă dielectrică mare.

Dacă admitem că viteza procesului chimic scade în timp și deci și efectul de accelerare se atenuează spre sfîrșitul procesului de difuzie scăderea în timp a coeficienților aparenți de difuzie calculați după Boyd, ne apare ca firească.

În concluzie ecuația cinetică dedusă de noi reflectă mai bine decît ecuația propusă de Boyd mersul real al schimbului ionic în condițiile analizate.

Laboratorul de Chimie Fizică
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Nachod F., Wood W.:* J. Am. Chem Soc. 1944, *66*, 1380
2. *Nachod F., Wood W.:* J. Am. Chem Soc. 1944, *67*, 629
3. *Iudo W., Carron M.:* J. Am. Chem Soc. 1948, *70*, 3295
4. *Grossman, Adamson:* J. Am. Chem Soc. 1952, 56, 97
5. *Boyd, Adamson, Myers:* J. Am. Chem. Soc. 1947, *69*, 2818
6. *Boyd, Adamson, Myers:* J. Am. Chem. Soc. 1947, *69*, 2836
7. *Bauman, Eichorn:* J. Am. Chem. Soc. 1947, *69*, 2830
8. *Boyd, Soldano:* J. Am. Chem. Soc. 1953, *75*, 6091
9. *Holm R.:* J. Chem. Phys. 1954, *22*, 1132
10. *Tovbin, Diatlovițcaia:* J. F. H. 1954, *28*, 1953
11. *Klamer, Linssen, Krevelen:* Chem. Eng. Sci. 1958, *9*, 10
12. *Suyata, Benchers Withe:* Ind. Eng. Chem. 1955, *47*, 2193
13. *Kunin, Barry:* Ind. Eng. Chem. 1949, *41*, 1269
14. *Vermeulen, Huffmann:* Ind. Eng. Chem. 1953, *45*, 1658
15. *Kunin, Myers:* J. Phys. Coll. Chem. 1947, *51*, 1111
16. *Glueckauf:* Trans. Faraday Soc. 1955, *51*, 1540
17. *Gilliland, Badour:* Ind. Eng. Chem. 1953, *45*, 530
18. *Klamer, Herden, Krevelen:* Chem. Eng. Sci. 1958, *9*.
19. *Barrer:* „Diffusion in and trough solids". Chambridge, 1947
20. *Vermeulen:* Ind. Eng. Chem., 1953, *45*, 1664
21. *Fedoseeva, Tunițkii, Cerneva:* Sbornic, Moscova, 1959
22. *Mamontova:* J. F. H. 1959, *29*, 476
23. *Adamson, Grossman:* J. Chem. Phys. 1949, *17*, 1002

ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ НА СКОРОСТЬ ДИФФУЗИИ В ИОНООБМЕННЫХ ВЕЩЕСТВАХ

Краткое содержание

Исходя из химико-диффузионной системы уравнений в данной работе устанавливается кинетическое уравнение. Это уравнение отражает лучше чем известные в литературе кинетические уравнения те количественные изменения, которые имеют место при диффузии при ионном обмене.

THE INFLUENCE OF THE CHEMICAL REACTION UPON THE RATE OF DIFFUSION IN IONEXCHANGERS

(Summary)

There is established a kinetic equation based on a system of chemical-diffusion equations, wich reflects better than the equations known in the literature, the quantitative transformations which apear during the ionexchange-diffusion proceedings.

L'INFLUENCE DE LA RÉACTION CHIMIQUE SUR LA VITESSE DE DIFFUSION DANS LES ÉCHANGEURS D'IONS

(Rezumé)

On a établi une équation cinétique, en partant d'un systéme d'équations chimico-diffusionnelles. Cette équation décrit, mieux que les équations cinétiques connues dans la littérature, les transformations quantitatives qui interviennent dans les phenomènes de diffusion dans l'échange ionique.

DIE EINWIRKUNG DER CHEMISCHEN REAKTION AUF DIE DIFFUSIONSGESCHWINDIGWEIT IN IONENAUSTAUSCHEN

(Zusammenfassung)

Es wird eine kinetische Gleichung festgestellt, ausgehend von einem system chemisch-diffusionaler Gleichungen, die besser als alle kinetichen, aus der Fachliteratur bekannten Gleichungen, die quantitativen Verwandlungen wiedergibt, die in den Ionenaustausch-Diffusionsprozessen vorkommen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

STUDIU ASUPRA CAUZELOR RUPERII ȘI POSIBILITĂȚILOR DE REMEDIERE A UNOR PRĂJINI DE FORAJ

de GH. BUZDUGAN, ȘT. MANTEA, C. POPOVICI, M. BLUMENFELD, A. ALOMAN, E. DUMITRESCU

1. Scopul studiului

Constatîndu-se o serie de ruperi, în timpul forajului, la unele prăjini de foraj din import, s-a pus problema de a se examina cauzele ruperilor și eventual, să se stabilească măsurile de ameliorare pentru prăjinile rămase.

În acest scop, în cadrul catedrelor de Metalurgie fizică, Rezistența materialelor și Tehnologia construcției de mașini, s-a făcut un studiu amănunțit, care a constat din analize chimice, metalografice și încercări mecanice.

2. Analizele materialului

2.1. *Analiza chimică*

Pe baza a trei probe, laboratorul de cercetări și analize chimice și industriale al Institutului Politehnic București a stabilit următoarea compoziție chimică a materialului prăjinilor :

Tabela 1

C %	Si %	P %	Mn %	S %	Cr %	Ni %
0,370 — 0,400	0,310 — 0,340	0,025 — 0,028	1,340 — 1,400	0,022 — 0,023	0,020 — 0,050	0,030 — 0,040

2.2. *Analiza metalografică*

Ruperile prezentate spre examinare s-au produs în zona filetului de îmbinare din capătul prăjinilor. Nu s-a semnalt niciun caz de rupere în corpul prăjinii.

Examinarea macroscopică a secţiunii de rupere prezintă aspectul caracteristic al unei ruperi prin oboseală : baza filetului constituie zona de amorsare, după rupere rămînînd în mufă 6—8 pasuri de filet. (fig. 1). Totodată filetul prezintă o deteriorare accentuată, ca urmare a repetatelor operaţiuni de înşurubare şi deşurubare. Prin examinarea microscopică, s-a stabilit că există o deosebire între structura materialului din

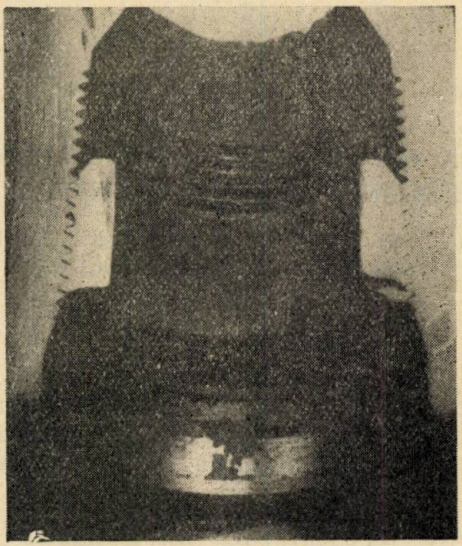


Fig. 1

capete şi corpul prăjinilor. Aşa cum reiese din fig. 2, care reprezintă structura capului unei prăjini avariate, grăuntele prezintă o creştere anormală, provocată de încălzirea la temperatură înaltă în vederea refulării, fără a mai fi urmată de un tratament de normalizare. Structura materialului din corpul prăjinii este arătată în figura 3, putînd fi considerată o structură fină, normală, de ferită şi perlită.

Materialul examinat după lustruire simplă prezintă un conţinut ridicat de incluziuni nemetalice (fig. 4), ceea ce influenţează defavorabil comportarea lui la oboseală.

2.3. *Încercările mecanice*

Au fost efectuate încercări de întindere pe 9 epruvete luate din prăjini diferite, stabilindu-se următoarele caracteristici ale materialului :

Tabela 2

σ_r kgf/mm²	σ_c kgf/mm²	δ %	ψ %
61,8 — 71.7	39,5 — 46,5	11,1 — 12,8	38,8

Fig. 2

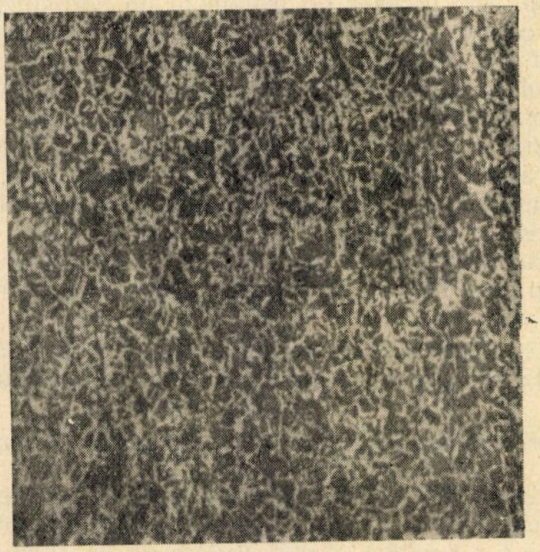


Fig. 3

Celelalte încercări (de încovoiere şi răsucire prin şoc) sînt prezentate la paragraful 4.2.

3. Cauzele posibile ale ruperii

Faţă de cele arătate la punctul 2.2, se poate afirma că la ruperea prăjinilor au contribuit mai multe cauze şi anume:

a. Structura grosolană a materialului, cu început de structură aciculară, caracterizată printr-o fragilitate înaintată;

b. Conţinutul foarte ridicat de incluziuni nemetalice, care influenţează defavorabil comportarea la oboseală a materialului;

c. Deteriorările exterioare ale filetului, produse în timpul exploatării, care conduc la apariţia de crestături suplimentare pe suprafaţa piesei, ce pot constitui amorse pentru ruperea prin oboseală a materialului.

4. Posibilităţi de remediere şi verificarea experimentală a rezultatelor

Deosebirile accentuate de structură între partea centrală a prăjinilor şi capătul refulat, arătate în fig. 2 şi 3, au condus la părerea că o ameliorare a structurii materialului trebuie căutată prin aducerea părţii din capăt la o structură normală, aşa cum există în corpul prăjinii.

4.1. *Tratamentul termic*

În acest scop, este necesar un tratament de normalizare, care pentru oţelul în cauză constă într-o încălzire la 850°C, urmată de o răcire în aer calm. Un alt tratament, ce poate fi aplicat, este acela al unei îmbunătăţiri, în scopul obţinerii unei structuri sorbitice. Acest tratament este însă mai complex, necesită o călire urmată de revenire şi este mai greu de aplicat în cazul nostru. Avînd în vedere că nici o rupere nu s-a produs în corpul prăjinii, zonă cu structură de normalizare, considerăm că tratamentul de îmbunătăţire nu este necesar şi că un simplu tratament de normalizare este suficient.

Totuşi, pentru încercări de laborator, se poate experimenta şi acest tratament, deşi gradul înaintat de incluziuni nemetalice în oţel este capabil să mascheze rezultatele.

În fig. 5 şi 6 sînt date microstructurile unui cap de prăjină după aplicarea normalizării (fig. 5) şi după aplicarea îmbunătăţirii (fig. 6).

4.2. *Verificarea proprietăţilor mecanice, înainte şi după tratamentul termic*

Pornind de la ipoteza că, în general, astfel de ruperi sînt cauzate de fragilitatea prea mare a părţii din capăt a prăjinilor, încercările mecanice indicate pentru a verifica efectul tratamentului termic sînt încercări de şoc. În acest scop, s-au folosit două căi de experimentare:

— încercări de încovoiere prin şoc;

— încercări de răsucire prin şoc.

Fig. 4

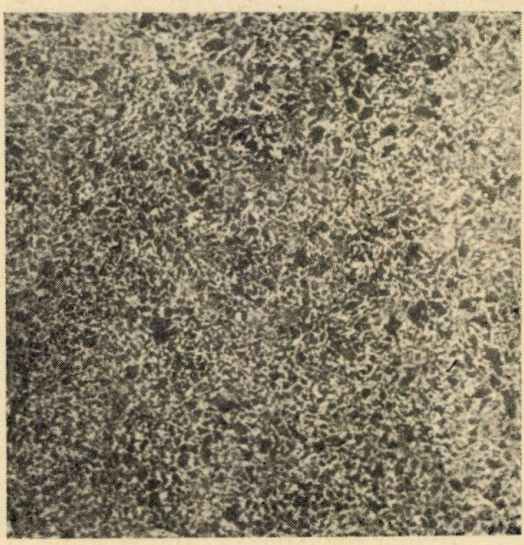


Fig. 5

4.2.1. *Încercările de încovoiere prin şoc*

Pentru a încerca materialul la încovoiere prin şoc, au fost confecţionate epruvete asemănătoare celor pentru rezilienţă, de dimensiuni ceva mai mici, impuse de grosimea ţevii.

O primă serie de încercări au avut ca scop stabilirea diferenţei de comportare, la încoviere prin şoc, între materialul din mijlocul şi vîrful refulat al prăjinii.

Datele prezentate în tabela 3 indică o tenacitate mai redusă a materialului refulat. Lucrul mecanic necesar pentru ruperea unei epruvete,

Fig. 6

din vîrful refulat al prăjinii, reprezintă în medie a treia parte din lucrul mecanic de rupere a epruvetelor din partea centrală, (1,25 kgm faţă de 3,77 kgm).

Prin a doua serie de experienţe, s-a urmărit stabilirea efectului tratamentului termic. Au fost încercate epruvete executate din capetele refulate ale prăjinilor, tratate şi netratate. Rezultatele sînt cuprinse în tabela 4.

Examinînd valorile lucrului mecanic de rupere, se constată o creştere a acestuia, prin tratament termic, cu aproape 80%, adică în medie de la 4,55 kgm/cm^2 la 8,20 kgm/cm^2.

Aceste valori, în general, depăşesc pe cele corespunzătoare lucrului mecanic de rupere a epruvetelor din mijlocul prăjinii, dar nu se poate face o comparare a lor, datorită diferenţei de secţiune de rupere.

Tabela 3

Epruveta Nr.	Dimensiunile secțiunii epruvetei	Secțiunea de rupere a epruvetei	Lucrul mecanic de rupere	Valoarea medie a lucrului mecanic de rupere
	mm	cm²	kgm	kgm
A. Epruvete din partea centrală a prăjinii, netratate				
1	5,1 × 4,2	0,214	3,77	3,77 (100%)
2	5,1 × 4,2	0,214	3,87	
3	5,1 × 4,2	0,214	3,64	
4	5,1 × 4,2	0,214	3,79	
B. Epruvete din vîrful refulat al prăjinii, netratate				
1	5,1 × 4,2	0,214	1,08	1,25 (33,2%)
2	5,1 × 4,2	0,214	1,27	
3	5,1 × 4,2	0,214	1,48	
4	5,1 × 4,2	0,214	1,18	

4.2.2. *Încercările de răsucire prin șoc*

Prăjinile de foraj fiind solicitate la răsucire, au fost efectuate încercări de răsucire prin șoc, pe epruvete executate din materialul prăjinii.

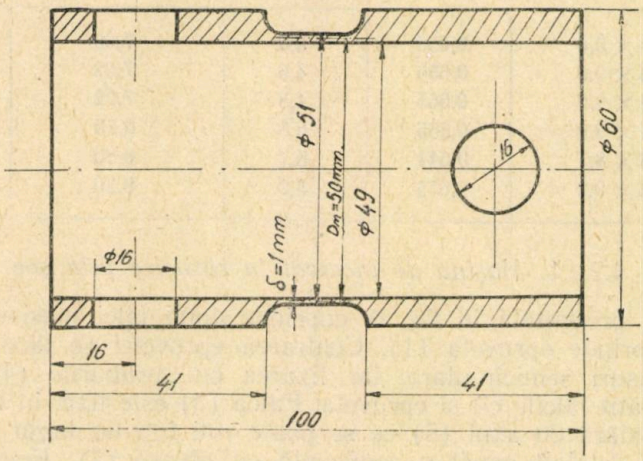


Fig. 7

Epruveta utilizată este cea din fig. 7, de mărime corespunzătoare dimensiunilor țevii încercate, în așa fel ca să poată fi executată atît din partea centrală a țevii cît și din vîrful ei.

Grosimea epruvetei, în partea centrală, este relativ mică ($\delta = 1$ mm) pentru a putea fi ruptă pe mașina la care s-au făcut încercările.

Pentru a evita influența concentratorilor de tensiuni, trecerea între partea groasă a epruvetei și cea subțire s-a făcut cu rază mare de racordare. Epruvetele s-au rupt atît în regiunea de racordare cît și în cea mijlocie, ceea ce a arătat influența redusă a concentratorului de tensiuni.

Tabela 4

Nr. crt.	Dimensiunile secțiunii de rupere	Suprafața secțiunii de rupere	Lucrul mecanic de rupere	Lucrul mecanic raportat la secțiunea de rupere	Valoarea medie a lucrului mecanic raportat la secțiunea de rupere
	mm	cm^2	kgm	kgm/cm^2	kgm/cm^2
	A. Epruvete din material netratat (vîrf refulat)				
1	7,4 × 9,0	0,665	3,5	5,25	
2	7,4 × 9,0	0,665	2,8	4,20	
3	7,4 × 9,0	0,665	3,2	4,80	4,55
4	7,4 × 9,0	0,665	2,7	4,05	100%
5	7,4 × 8,8	0,651	3,2	4,90	
6	7,4 × 8,9	0,659	3,2	4,88	
	B. Epruvete din material tratat (vîrf refulat)				
1	7,3 × 9,0	0,656	5,0	7,65	
2	7,3 × 9,0	0,656	4,6	7,02	
3	7,4 × 9,0	0,665	4,8	7,22	8,20
4	7,4 × 9,0	0,665	6,5	9,70	180%
5	7,5 × 8,7	0,644	5,7	8,80	
6	7,5 × 9,0	0,675	5,9	8,80	

4.2.2.1. *Mașina de încercat la răsucire prin șoc*

Mașina, prezentată în fig. 8, cuprinde două fălci masive (2) și (3) în care se prinde epruveta (1). Centrarea epruvetei se face cu ajutorul a două lăcașuri semicirculare, iar fixarea cu șuruburile (4) și (5) ce traversează atît fălcile cît și epruveta. Falca (3) este fixă, în timp ce falca (2) este solidară cu axul (6) ce se poate roti într-un lagăr cu rulmenți. Axul are la celălalt capăt o semicuplă cu ghiare (7). Energia cinetică necesară ruperii prin șoc este înmagazinată de volantul (8), montat pe un ax ce se rotește în lagăre cu rulmenți. Volantul este antrenat în mișcare de rotație de către motorul electric (9), prin roata de fricțiune (10). După ce volantul atinge turația la care se face încercarea, motorul electric, montat pe un sistem de pîrghii mobile, este îndepărtat de volant.

Șocul se transmite de la volantul în mișcare de rotație la epruvetă, prin semicupla mobilă (11).

Falca fixă (3) este solidară cu bara etalon (12), de secțiune circulară, pe care s-au montat doi traductori tensometrici rezistivi (15), înclinați la 45° față de axa barei, conectați în circuitul unei punți tensome-

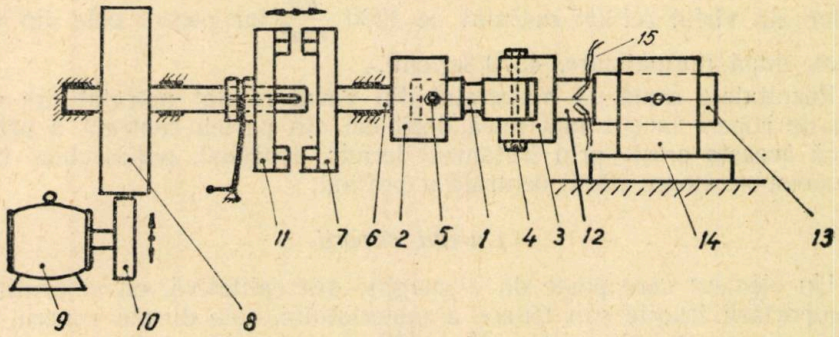


Fig. 8

trice. Bara (12), avînd capătul pătrat (13), poate culisa, fără a se roti, în suportul (14).

Semnalul punții tensometrice, reprezentînd variația momentului de răsucire aplicat epruvetei, a fost transmis unui osciloscop catodic de pe ecranul căruia s-au înregistrat, prin filmare, oscilograme ca cele din fig. 9—16.

Etalonarea statică a montajului a fost făcută înainte și după încercări.

Pentru determinarea timpului în care s-a produs ruperea, a fost înregistrat pe film și un marcaj special al timpului din 0,2 în 0,2 secunde. Viteza de desfășurare a filmului a fost de 200 mm/s.

În afară de aceasta, cu un tahometru, s-a determinat turația volantului înainte și după ruperea epruvetei.

Rezultatele prelucrate ale acestor măsurători se dau în tabela 5.

4.2.2.2. *Rezultatele măsurătorilor și interpretarea lor. Rezistența de rupere prin șoc*

Epruveta avînd perete subțire, eforturile unitare tangențiale τ sînt constante pe secțiune, fiind date de relația

$$\tau = \frac{2 M_t}{\pi D_m^2 \delta} \tag{1}$$

unde $\delta = 1$ mm este grosimea părții centrale a epruvetei, unde se produce ruperea, iar $D_m = 50$ mm este diametrul mediu al acesteia.

Trebuie remarcat că această relație este independentă de caracteristicile elastice ale materialului, deci este valabilă și după depășirea limitei de curgere, adică pînă la rupere.

Aplicînd această relaţie, s-a determinat valoarea rezistenţei de rupere la răsucire, dată în tabela 5.

Din examinarea valorilor medii ale rezistenţei de rupere, pentru cele trei categori de epruvete încercate, se constată că rezistenţa de rupere a epruvetelor din partea centrală a prăjinii este în medie de 4550 kg/cm², a celor din vîrful refulat netratat de 4260 $\frac{kg}{cm^2}$ iar pentru cele din vîrful refulat, după normalizare, 4670 kg/cm².

Rezultatele arată că materialul din vîrful refulat netratat are rezistenţa de rupere la şoc mai mică decît cel din partea centrală a prăjinii, dar că aceasta creşte prin tratament termic, depăşind, puţin, chiar valoarea corespunzătoare părţii centrale a prăjinii.

Durata ruperii

Un element care poate da o imagine atît calitativă, cît şi cantitativă a comportării fragile sau tenace a materialului, este durata ruperii, comparată cu aspectul diagramei $M_t = f(t)$, înregistrată pe film.

Cunoaşterea timpului de rupere şi a variaţiei turaţiei volantului, permit determinarea aproximativă a unghiului de răsucire la rupere al epruvetei. Admiţînd [1] că viteza unghiulară a volantului variază liniar între valorile corespunzătoare momentului dinainte şi după ruperea epruvetei, unghiul de deformaţie la rupere $\Delta\varphi_r$ va fi:

$$\Delta\varphi_r = \omega_{med}\, t_r = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}\, t_r \qquad (2)$$

unde

ω_{med} = viteza unghiulară medie;
ω_0 = viteza unghiulară a volantului înainte de ruperea epruvetei;
ω_1 = viteza unghiulară a volantului după ruperea epruvetei;
t_r = durata ruperii.

Introducînd în relaţia (2) turaţiile corespunzătoare vitezelor unghiulare, se obţine:

$$\Delta\varphi_r = \frac{(n_0 + n_1)\pi}{60}\, t_r \text{ (rad)} \qquad (3)$$

Desigur că valoarea obţinută prin relaţia (3) este aproximativă, dar ea constituie un criteriu de apreciere a comportării, din punct de vedere al tenacităţii.

Examinarea valorilor medii ale unghiului de deformaţie la rupere, date în tabela 5, arată că comportarea epruvetelor netratate — atît din partea centrală, cît şi din partea refulată — este aproape identică, în timp

[1] A. N. Cekanov, Studiul caracteristicilor mecanice ale materialelor solicitate dinamic la răsucire, din Culegerea de articole „Calcule de rezistenţă în construcţia de maşini" I.D.T. 1957.

Tabela 5

Nr. crt.	Punctul de prelevare a epruvetei	Prăjina din care face parte epruveta	Tratament termic aplicat materialului	Turaţia volantului		Durata ruperii t_r 10^{-3} s	Rezistenţa de rupere la răsucire prin şoc τ_r kg/cm²	Valoarea medie a rezistenţei de rupere $\tau_{r\,med}$ kg/cm²	Unghiul de deformaţie la rupere $\Delta\varphi_r$ rad.	Valoarea medie a unghiului de deformaţie $\Delta\varphi_{rmed}$ rad.
				înaintea ruperii n_0 rot/min.	după rupere n_1 rot/min.					
1	mijlocul prăjinii	neidentificată	netratat	455	375	7,5	4620		0,327	
2	„	„	„	455	355	8	5040		0,340	
3	„	„	„	475	390	7	4360	4550	0,322	0,334
4	„	„	„	455	380	6	4170		0,262	
5	„	prăjina 3	„	480	400	8	4830		0,370	
6	„	„ 4	„	476	440	8	3930		0,382	
7	vîrful refulat	neidentificată	„	455	365	10	4620		0,430	
8	„	„	„	455	370	9	4050	4260	0,390	0,333
9	„	„	„	455	410	4	4100		0,180	
10	„	prăjina 1	tratat	470	365	12	5250		0,524	
11	„	„ 2	„	475	400	10	4200		0,458	
12	„	„ 2	„	478	415	8	4450		0,372	
13	„	„ 3	„	480	370	13	4620	4670	0,582	0,510
14	„	„ 3	„	470	383	14	4620		0,628	
15	„	„ 4	„	470	424	10	5000		0,468	
16	„	„ 4	„	470	378	12	4540		0,535	

ce tratamentul termic aplicat face să crească valoarea unghiului cu 53%, indicînd astfel o simţitoare sporire a tenacităţii materialului.

Aceste concluzii sînt confirmate în întregime de aspectul oscilogramelor înregistrate. Oscilograma din fig. 13, corespunzătoare unei epruvete

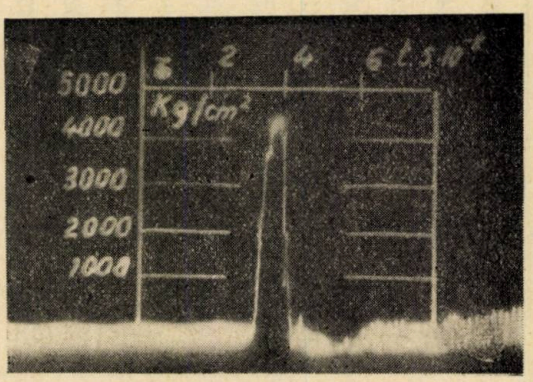


Fig. 9

din vîrful refulat netratat, prezintă o creştere bruscă a efortului unitar, corespunzătoare zonei de deformaţie elastică, urmată de o foarte mică porţiune de deformaţie plastică, după care epruveta se rupe. Oarecum analog se prezintă şi epruvetele netratate, ale căror oscilograme de rupere

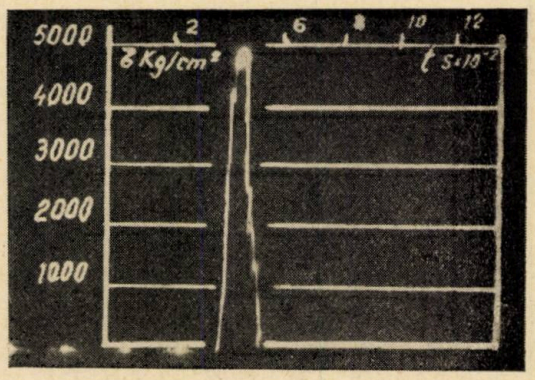


Fig. 10

sînt prezentate în fig. 9, 10, 11 şi 12. Cele trei oscilograme corespunzătoare epruvetelor executate din porţiunea refulată tratată (fig. 14, 15 şi 16), arată o alură a variaţiei efortului unitar mult deosebită de primele: după o creştere rapidă a efortului unitar, se poate observa o porţiune uşor crescătoare, care arată că deformaţia plastică a materialului este mult mai mare decît la epruvetele netratate.

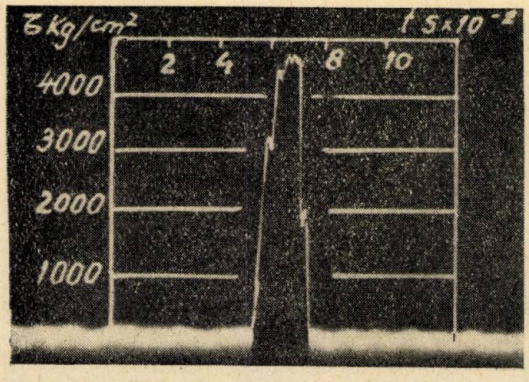


Fig. 11

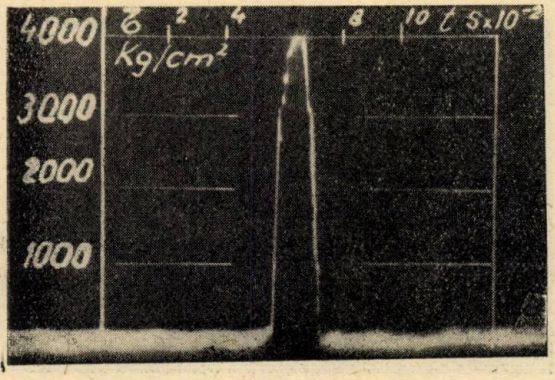


Fig. 12

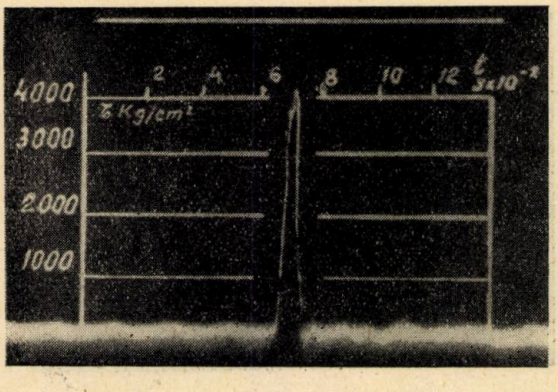


Fig. 13

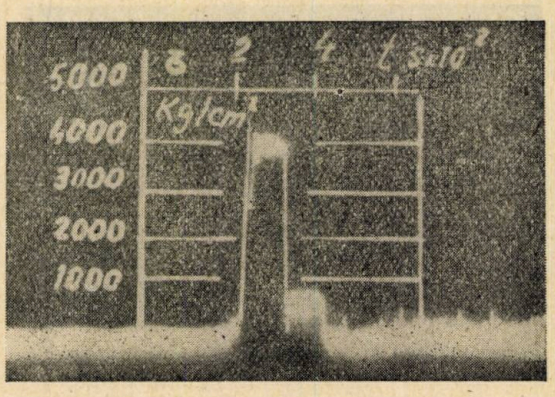


Fig. 14

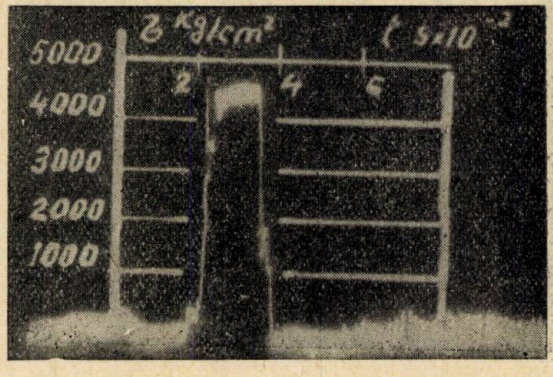


Fig. 15

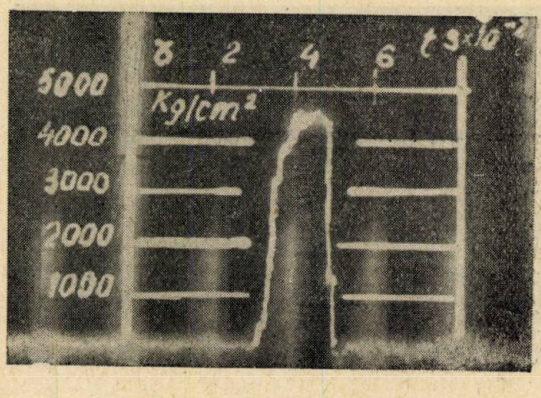


Fig. 16

Lucrul mecanic de rupere a epruvetei

Un alt criteriu de apreciere cantitativă a tenacității materialului poate fi acela al lucrului mecanic cheltuit pentru ruperea epruvetei. Datele necesare pentru acest calcul au fost înregistrate și prelucrate. Ele confirmă concluziile trase mai sus. Rezultatele nu pot fi, totuși, luate ca bază de apreciere sigură, deoarece oscilogramele ridicate arată că :

— La unele dintre epruvete, în momentul cuplării axului volantului cu axul epruvetei, au apărut șocuri mici între suprafețele frontale ale ghiarelor semicuplelor elastice, prin care s-a consumat un lucru mecanic de deformație elastică ce nu poate fi determinat teoretic.

— Oscilogramele prezintă variații bruște de efort unitar, datorită reculului elastic al pieselor lovite și vibrațiilor ce urmează șocului, care de asemeni nu pot fi prinse în calcul.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ПОЛОМКИ И ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПРАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ БУРИЛЬНЫХ ТРУБ.

(краткое изложение).

Во время эксплуатации у некоторых из импортируемых бурильных труб наблюдался ряд поломок.

Проведенное нами исследование имело целью установить причины поломки и выработать метод улучшения существующих в запасе труб.

Был сделан ряд механических испытаний и металлографических анализов, в результате чего установилось, что на концах труб материал обладает несоответствующей структурой и повышенной хрупкостью из-за теплого нагнетания в виду нарезания концов.

Улучшение строения осуществилось путем применеия обработки нормализации нагнетенной части. Были сделаны сравнительные испытания на ударное кручение и на ударный изгив на образцах, взятых из нагнетенной части труб, как до так и после обработки, а также из средней части труб. Испытания привели к выводу, что посредством применяемой обработки тягучесть материала растет, оказываясь в некоторых с учаях даже выше чем тягучесть корпуса трубы.

В связи с этим была установлена методика испытаний на ударное кручение, основанная на измерении максимальных единых усилий, на продолжительности поломки и на механической работе поломки.

A STUDY ON THE CAUSES OF BREAKING OF SOME DRILL-PIPES AND THE REMEDYING POSSIBILITIES

(Summary)

During the drill operation, some drill-pipes of an imported lot, broke invariably in a section of the threaded end.

The purpose of the study was to find out the causes of the deficiencies and the means to avoid them by the improving the resistance of the drill-pipes of the existing stock.

A series of mechanical testings and metallographical analyses have shown an inadequate structure and a great brittleness of the steel as a result of the hot working necessary for the thickening of the walls of the drill-pipes ends in order to obtain the section suited for thread cutting.

The normalisation, by heat treatment, of the steel of the drill-pipes ends improved considerably its structure. Comparative testings were done by shock torsion and shock bending on test samples of the thickened walls of the drill-pipes ends, not treated and after being heat treated, as well as on test samples of the middle body of the drill-pipes.

The results of the testings led to the conclusion that, after normalising the steel of the drill-pipes ends, its tenacity increased, exceeding, in some cases, that of the body of the drill-pipes.

On this occasion, it was worked out a testing method by shock torsion, based on the measurement of the maximum stress, of the length of time taken for breaking and of the work spent for the breaking of the samples.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE GRÜNDE DER BRÜCHE BEI BOHRSTANGEN UND DERER AUSBESSERUNGSMÖGLICHKEITEN

(Zusammenfassung)

Während des Verwendens wurden bei manchen, aus Import stammenden Bohrstangen, eine Anzahl Brüche festgestellt.

Die von uns ausgeführten Untersuchungen hatten den Zweck die Ausarbeitung einer Methode zur Verbesserung der auf Lager befindlichen Bohrstangen.

Es wurden eine Anzahl mechanischer Prüfungen und metallographischer Analysen durchgeführt, die feststellen liessen, dass das Material an den Enden der Bohrstangen eine unentsprechende Struktur und erhöhte Zerbrechlichkeit zeigte, welche auf die Warmstauchung anlässlich der Gewindeschneidung der Enden zurückzuführen ist.

Durch Anwendung einer Normalisierungsbehandlung des gestauchten Teiles, gelang eine Verbesserung der Struktur. Es wurden Vergleichsprü-

fungen durch Stossdrehung und Stossbiegung an der gestauchten Seite des Prüfstückes, sowohl als auch an der Mittelseite der Bohrstangen, vor und nach der Behandlung durchgeführt.

Die Prüfungen führten zur Schlussfolgerung, dass durch die angewandte Behandlung, die Zähigkeit des Materials erhöht wird, in manchen Fällen sogar die des Bohrstangenkörpers übertrifft.

Bei dieser Gelegenheit wurde auch eine Methodik zur Prüfung durch Stossdrehung festgesetzt, die auf die Messung der höchsten Spannungen, der Bruchzeit und der mechanischen Brucharbeit, beruht.

ÉTUDE SUR LES CAUSES DE RUPTURE DES TIGES DE FORAGE ET LES POSSIBILITÉS D'Y REMÉDIER

(Resumé)

Certaines tiges de forage importées, présentent, lors de l'exploitation, des ruptures.

On s'est proposé par cette étude d'établir les causes de ces ruptures et d'élaborer une methode en vue d'amèliorer les tiges du stock restant.

Une série d'essais mécaniques et analyses métalographiques ont montré que les extremités des tiges sont fragiles et que cette fragilité et due à une structure grossière, impropre. La structure grossière est causée par le refoulement à chaud lors du filétage de ses extrémités.

On a régéneré la structure des extremités des tiges par un traitement thérmique de normalisation. Des essais comparatifs de torsion par choc et de flexion par choc, effectués sur des éprouvettes prélevées sur des extremités de tiges, avant et après le traitement, ainsi que des eprouvettes découpées du matériel de la partie centrale des tiges ont demontré l'efficacité de la normalisation.

La conclusion de ces essais est que la ténacité du matériel, après le traitement thérmique, augmente, en dépassant même parfois, celle du corps de la tige.

A cette occasion on a étudié et établi une méthodique concernant les essais de torsion par choc, basée sur la détermination des contraintes maxima, de la durée de rupture et du travail mécanique de rupture.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

CALCULUL DEFORMAȚIILOR GRINZILOR DREPTE PRIN METODA CELOR TREI NECUNOSCUTE

M. BLUMENFELD

1. Introducere

Metoda pentru calculul săgeților dată mai jos este una din aplicațiile unei metode mai generale de calcul, cu aplicații în diferite probleme (discuri în mișcare de rotație, plăci plane circulare simetric încărcate,

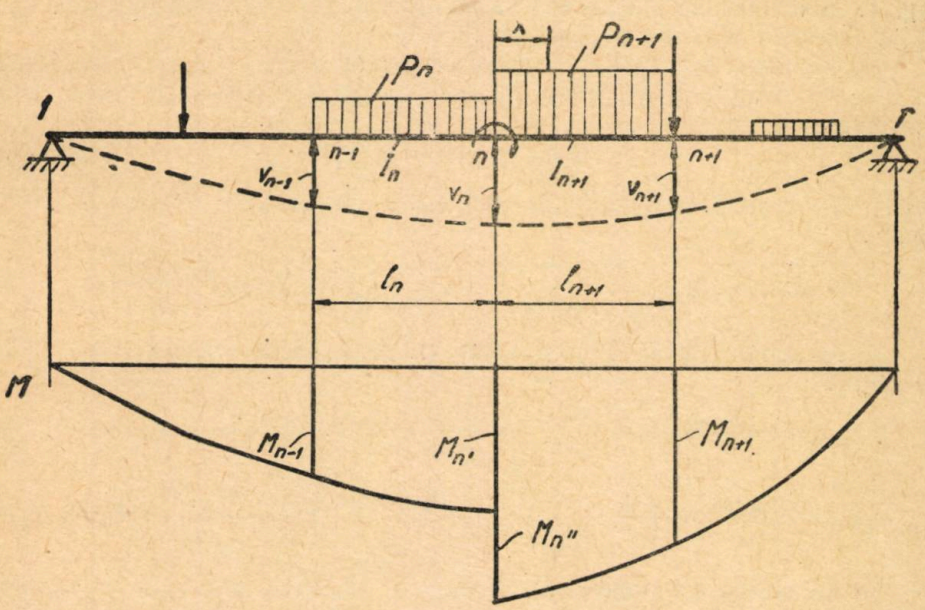


Fig. 1

vibrații ale sistemelor cu mai multe grade de libertate și cu masă continuă etc.) pe care autorul intenționează să o dezvolte în viitor.

Pentru calculul deformației unei bare — obiectul articolului de față — metoda se bazează pe împărțirea acesteia în intervale pe care momentul

încovoietor și momentul de inerție sînt constante sau au o variație continuă. Se consideră, de exemplu, grinda simplu rezemată din fig. 1, împărțită în r intervale. Ne propunem să calculăm cele $r+1$ săgeți de la limitele intervalelor. Două din ele (săgețile la capete) sînt cunoscute, deci rămîn să se determine $r-1$ ecuații.

Aceste ecuații se scriu pe baza condiției de continuitate a unghiului de deformație — analog cu ecuația celor trei momente pentru grinzile static nedeterminate — între cele trei săgeți reprezentînd deformațiile la capetele a două intervale succesive.

Ecuațiile obținute reprezintă o relație între săgețile necunoscute și momentele încovoietoare la capetele intervalelor. Se obține astfel un sistem de $r-1$ ecuații, ce se pot rezolva prin diferite metode, dintre care una este arătată în anexa articolului de față.

Metoda se poate aplica atît la grinzi cu momentul de inerție constant, cît și la cele cu momentul de inerție variabil continuu sau în trepte, fără nici o dificultate suplimentară.

2. Ecuația celor trei necunoscute

Se consideră două porțiuni succesive ($n-1$, n și n, $n+1$) din fig. 1. Momentul de inerție are valori diferite pe cele două porțiuni I_n și I_{n+1}. Celelalte notații sînt date pe figură.

Se studiază deformația porțiunii de grindă n, $n+1$ față de un sistem de axe cu origina în n, integrîndu-se ecuația diferențială a fibrei medii deformate

$$E I_{n+1} v'' = -M(x) \tag{1}$$

$M(x)$ se exprimă în funcție de momentele la capetele intervalului, prin relația

$$M(x) = M_{n''} + \left(\frac{M_{n+1} - M_{n''}}{l_{n+1}} + \frac{p_{n+1} \cdot l_{n+1}}{2} \right) x - \frac{p_{n+1} \cdot x^2}{2} \tag{2}$$

Introducînd (2) în (1) și efectuînd integrarea ecuației diferențiale se obține

$$E I_{n+1} v' = \frac{p_{n+1} \cdot x^3}{6} - \left(\frac{M_{n+1} - M_{n''}}{l_{n+1}} + \frac{p_{n+1} \cdot l_{n+1}}{2} \right) \frac{x^2}{2} - M_{n''} x + C_1 \tag{3}$$

$$E I_{n+1} v = \frac{p_{n+1} \cdot x^4}{24} - \left(\frac{M_{n+1} - M_{n''}}{l_{n+1}} + \frac{p_{n+1} \cdot l_{n+1}}{2} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{M_{n''} x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{4}$$

Se înlocuiesc constantele C_1 și C_2 prin săgețile v_n și v_{n+1} la capetele intervalului, utilizînd condițiile la limită: pentru $x = o$, $v = v_n$, iar pentru $x = l_{n+1}$, $v = v_{n+1}$. Se obține

$$C_2 = E I_{n+1} \cdot v_n \tag{5}$$

$$C_1 = \frac{E I_{n+1} \cdot (v_{n+1} - v_n)}{l_{n+1}} + \frac{(M_{n+1} + 2 M_{n''}) l_{n+1}}{6} + \frac{p_{n+1} \cdot l_{n+1}^3}{24} \tag{6}$$

Se determină unghiul de deformație φ''_n în punctul n, înlocuind în relația (3), $x = o$,

$$\varphi''_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{l_{n+1}} + \frac{(M_{n+1} + 2M''_n)\, l_{n+1}}{6\, E\, I_{n+1}} + \frac{p_{n+1} \cdot l^3_{n+1}}{24\, E\, I_{n+1}} \tag{7}$$

Se determină analog unghiul de deformație φ'_n de pe porțiunea $n-1, n$ luînd origina sistemului de axe tot în n. Se obține

$$\varphi'_n = \frac{v_{n-1} - v_n}{l_n} + \frac{(M_{n-1} + 2M_{n'})\, l_n}{6\, E\, I_n} + \frac{p_n \cdot l^3_n}{24\, E\, I_n} \tag{8}$$

Aplicînd condiția de continuitate a unghiului de deformație în punctul n, *sub forma* $\varphi'_n + \varphi''_n = o$, se obține utilizînd relațiile (7) și (8) și ordonînd termenii în mod convenabil

$$\begin{aligned} &- v_{n-1} \cdot l_{n+1} + v_n \cdot (l_n + l_{n+1}) - v_{n+1} \cdot l_n = \\ &= \frac{l_n \cdot l_{n+1}}{6\, E} \left[\frac{(M_{n+1} + 2M_{n''})\, l_{n+1}}{I_{n+1}} + \frac{(M_{n-1} + 2M_{n'})\, l_n}{I_n} \right] + \\ &+ \frac{l_n \cdot l_{n+1}}{24\, E} \left(\frac{p_{n+1} \cdot l^3_{n+1}}{I_{n+1}} + \frac{p_n\, l^3_n}{I_n} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

Această ecuație generală se poate particulariza pentru cîteva cazuri uzuale.

a) Grindă fără salturi în diagrama de momente încovoietoare ($M_{n'} = M_{n'} = M_n$) și fără sarcină uniform distribuită ($p_{n+1} = p_n = 0$)

$$\begin{aligned} &- v_{n-1} \cdot l_{n+1} + v_n\, (l_n + l_{n+1}) - v_{n+1} \cdot l_n = \\ &= \frac{l_n \cdot l_{n+1}}{6\, E} \left[\frac{(M_{n+1} + 2M_n)\, l_{n+1}}{I_{n+1}} + \frac{(M_{n-1} + 2M_n)\, l_n}{I_n} \right] \end{aligned} \tag{10}$$

b) Grindă cu moment de inerție constant ($I_{n+1} = I_n = I$) și fără salturi în diagrama de momente

$$\begin{aligned} &- v_{n-1} \cdot l_{n+1} + v_n\, (l_n + l_{n+1}) - v_{n+1} \cdot l_n = \\ &= \frac{l_n \cdot l_{n+1}}{6\, EI} \left[M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n\, (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}\, l_{n+1} \right] + \\ &+ \frac{l_n \cdot l_{n+1}}{24\, EI} \left[p_{n+1} \cdot l^3_{n+1} + p_n \cdot l^3_n \right] \end{aligned} \tag{11}$$

c) Grindă cu moment de inerție constant, fără sarcină uniform distribuită ($p_{n+1} = p_n = o$)

$$\begin{aligned} &- v_{n-1} \cdot l_{n+1} + v_n\, (l_n + l_{n+1}) - v_{n+1} \cdot l_n = \\ &= \frac{l_n \cdot l_{n+1}}{6\, EI} \left[M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n\, (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} \right] \end{aligned} \tag{12}$$

d) Grindă încastrată. Se aplică în ecuația (7) condiția $\varphi_{n''} = o$. Se obține

$$v_n - v_{n+1} = \frac{(M_{n+1} + 2M_n) l_{n+1}^2}{6 E I_{n+1}} + \frac{p_{n+1} \cdot l_{n+1}^4}{2 E I_{n+1}} \tag{13}$$

3. Aplicarea ecuației celor trei necunoscute pentru cîteva cazuri simple

Exemplul 1. Să se calculeze săgeata v_3 pentru grinda din fig. 2 avînd moment de inerție constant. Se aplică relația (11), înlocuind $n = 2$

$$-v_1 l_3 + v_2 (l_2 + l_3) - v_3 l_2 = \frac{l_2 l_3}{6 EI} [M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3] + \tag{14}$$

$$+ \frac{l_2 l_3}{24 EI} (p_3 l_3^3 + p_2 l_2^3)$$

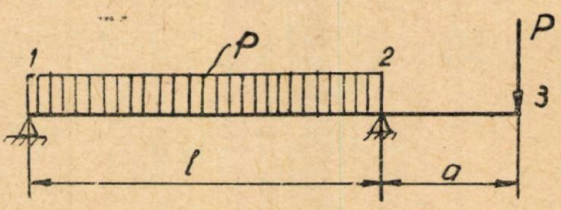


Fig. 2

Se fac înlocuirile: $M_1 = o$, $M_2 = -Pa$, $M_3 = o$; $v_1 = o$, $v_2 = o$; $l_2 = l$, $l_3 = a$; $p_2 = p$, $p_3 = o$ și se obține

$$-v_3 l = \frac{l \cdot a}{6 EI} \cdot 2 (-P \cdot a)(l + a) + \frac{l \cdot a}{24 EI} \cdot p l^3$$

$$v_3 = \frac{P a^2 (l + a)}{3 EI} - \frac{p l^3 a}{24 EI}$$

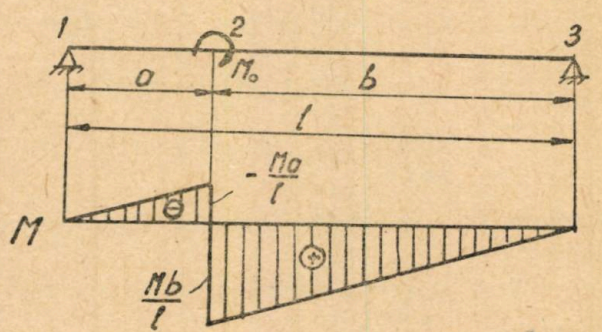


Fig. 3

Exemplul 2. Să se calculeze săgeata în punctul 2 la grinda din fig. 3, avînd momentul de inerție constant. Se aplică relația (9), pentru $n = 2$ *iar* $p_{n+1} = p_n = o$.

$$-v_1 l_3 + v_2 (l_2 + l_3) - v_3 l_3 = \frac{l_2 l_3}{6 EI} [(M_1 + 2 M_{2'}) l_2 + (2 M_{2''} + M_3) l_3]$$

Se fac înlocuirile: $M_1 = o$, $M_{2'} = -\frac{M_o a}{l}$, $M_{2''} = \frac{M_o b}{l}$, $M_3 = o$, $v_1 = o$, $v_3 = o$; $l_2 = a$, $l_3 = b$

$$v_2 (a + b) = \frac{a b}{6 EI} \left[2 \left(-\frac{M_0 a}{l} \right) a + 2 \frac{M_0 b}{l} b \right]$$

$$v_2 = \frac{M_0 a b (b - a)}{3 l E I}$$

Exemplul 3. Să se calculeze săgețile v_2 și v_3 la grinda din fig. 4. Se aplică ecuația celor trei săgeți pe rînd pentru porțiunile 1—2—3 și 2—3—4 sub forma

$$-v_1 l_3 + v_2 (l_2 + l_3) - v_3 l_2 = \frac{l_2 l_3}{6 EI} [M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3]$$

$$+ \frac{l_2 l_3}{24 EI} (p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3)$$

$$-v_2 l_4 + v_3 (l_3 + l_4) - v_4 l_3 = \frac{l_3 l_4}{6 EI} [M_2 l_3 + 2 M_3 (l_3 + l_4) + M_4 l_4]$$

$$+ \frac{l_3 l_4}{24 EI} (p_3 l_3^3 + p_4 l_4^3)$$

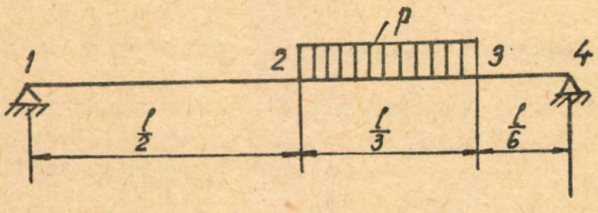


Fig. 4

Se înlocuiesc: $v_1 = o$; $v_4 = o$; $l_2 = \frac{l}{2}$; $l_3 = \frac{l}{3}$; $l_4 = \frac{l}{6}$; $p_2 = 0$; $p_3 = p$; $p_4 = 0$; $M_1 = 0$; $M_4 = 0$. Momentele încovoietoare în punctele 2 și 3 au

valorile $M_2 = \frac{pl^2}{18}$ și $M_3 = \frac{pl^2}{27}$. Se obține sistemul de ecuații

$$\begin{cases} v_2\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{3}\right) - v_3\frac{l}{2} = \frac{\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3}}{6EI}\left[2\cdot\frac{p\cdot l^2}{18}\cdot\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{3}\right)+\frac{p\cdot l^2}{27}\cdot\frac{l}{3}\right]+\frac{\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3}}{24EI}\cdot p\cdot\left(\frac{l}{3}\right)^3 \\ -v_2\cdot\frac{l}{6}+v_3\cdot\left(\frac{l}{3}+\frac{l}{6}\right) = \frac{\frac{l}{3}\cdot\frac{l}{6}}{6EI}\left[\frac{p\cdot l^2}{18}\cdot\frac{l}{3}+2\cdot\frac{p\cdot l^2}{27}\left(\frac{l}{3}+\frac{l}{6}\right)\right]+\frac{\frac{l}{3}\cdot\frac{l}{6}}{24EI}\cdot p\left(\frac{l}{3}\right) \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține

$$v_2 = \frac{11\,pl^4}{1944\,EI} \qquad v_3 = \frac{6\,pl^4}{1944\,EI}$$

Exemplul 4. Să se calculeze săgeata v_2 la grinda din fig. 5. Se aplică relația (13), cu $n = 1$ și $p_{n+1} = o$.

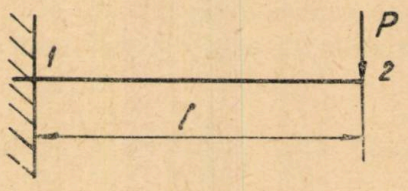


Fig. 5

$$v_1 - v_2 = \frac{(M_2 + 2M_1)\,l_2^2}{6\,EI}$$

unde $v_1 = o$; $l_2 = l$; $M_2 = o$, $M_1 = -Pl$. Se obține

$$v_2 = \frac{Pl^3}{3EI}$$

4. Grinzi cu moment de inerție variabil în trepte

Pentru ilustrarea aplicării metodei la calculul grinzilor cu moment de inerție variabil în trepte se vor calcula săgețile grinzii din fig. 6. Se aplică ecuația (10) care, pentru simplificarea rezolvării sistemului de ecuații, se împarte cu l_n. Se obține

$$-v_{n-1}\alpha + v_n(1+\alpha) - v_{n+1} = \frac{l_n\,l_{n+1}}{6\,E}\left[\frac{(M_{n-1}+2M_n)}{I_n}+\frac{(M_{n+1}+2M_n)\,\alpha}{I_{n+1}}\right] \quad (15)$$

unde s-a notat $\alpha = \frac{l_{n+1}}{l_n}$.

Reacțiunile în reazimele 1 și 9 au valorile $V_1 = 1510$ kg și $V_9 = 1490$ kg, iar momentele încovoietoare sînt: $M_1 = 0$, $M_2 = 22750$ kgcm, $M_3 = 75500$ kgcm, $M_4 = 85700$ kgcm, $M_5 = 101000$ kgcm, $M_6 = 73400$ kgcm, $M_7 = 59600$ kgcm, $M_8 = 37250$ kgcm. Aceste valori sînt trecute în tabela 1, în coloanele 5, 6, 8.

Momentele de inerție corespunzătoare diametrelor indicate în figură sînt: $I_2 = 117{,}9$ cm^4, $I_3 = I_4 = 490{,}9$ cm^4, $I_5 = I_6 = 718{,}7$ cm^4,

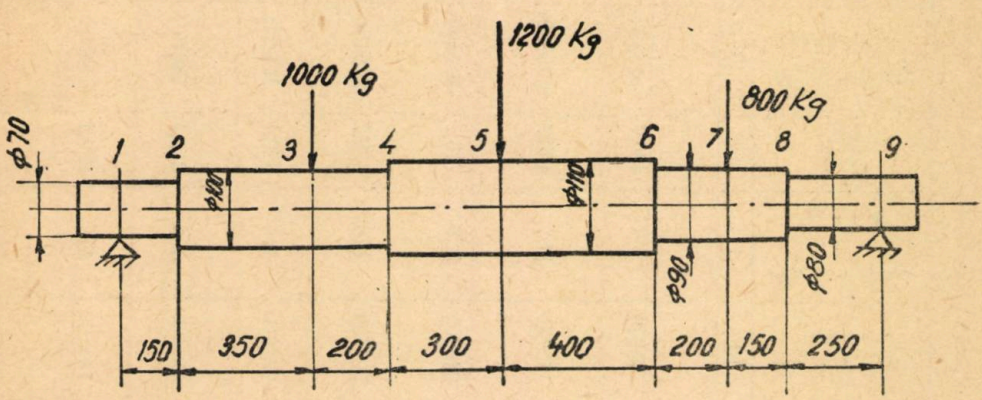


Fig. 6

$I_7 = I_8 = 322{,}1$ cm^4, $I_9 = 201{,}1$ cm^4. Valorile momentelor de inerție sînt trecute în tabela 1, coloanele 9 și 12, ținîndu-se seama de indici.

Toate calculele necesare scrierii sistemului de ecuații pentru calculul deformațiilor sînt date în tabela 1. În coloanele 10, 11, 13, 14, 15 și 16 s-a calculat membrul doi al ecuației (15). Cu datele din tabela 1 se scrie sistemul de ecuații

$$\begin{cases} -2v_1 + 3v_2 - v_3 = 3{,}24 \times 10^{-2} \\ -0{,}57\,v_2 + 1{,}57\,v_3 - v_4 = 3{,}6 \times 10^{-2} \\ -1{,}5\,v_3 + 2{,}5\,v_4 - v_5 = 5{,}11 \times 10^{-2} \\ -1{,}33\,v_4 + 2{,}33\,v_5 - v_6 = 8{,}93 \times 10^{-2} \\ -0{,}5\,v_5 + 1{,}5\,v_6 - v_7 = 4{,}2 \times 10^{2} \\ -0{,}75\,v_6 + 1{,}75\,v_7 - v_8 = 2{,}29 \times 10^{-2} \\ -1{,}76\,v_7 + 2{,}67\,v_8 - v_9 = 3{,}08 \times 10^{-2} \end{cases} \qquad (16)$$

Ținînd seama că $v_1 = 0$ și $v_9 = 0$, se obține un sistem de 7 ecuații, care se rezolvă prin metoda dată în anexă. Se obține: $v_2 = 0{,}0952$ cm, $v_3 = 0{,}2531$ cm, $v_4 = 0{,}307$ cm, $v_5 = 0{,}338$ cm, $v_6 = 0{,}2905$ cm, $v_7 = 0{,}2252$ cm, $v_8 = 0{,}1524$ cm.

Tabela 1

Portiunea	Lungimi, cm			Momente încovoietoare kgcm				I_n cm⁴	$M_{n-1}+2M_n$ kgcm	$\frac{M_{n-1}+2M_n}{I_n}$ kg/cm³	I_{n+1} cm⁴	$M_{n+1}+2M_n$ kgcm	$\frac{(M_{n+1}+2M_n)\alpha}{I_{n+1}}$ kg/cm³	Col. 11+col. 14	$\frac{l_n \cdot l_{n+1}}{6E} \times$ col. 15 cm
	l_n	l_{n+1}	$\alpha = \frac{l_{n+1}}{l_n}$	M_{n-1}	M_n	$2M_n$	M_{n+1}								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1—2—3	15	30	2	0	22750	45500	75500	117,9	45500	386	490,9	121000	492	878	$3,24\times10^{-2}$
2—3—4	35	20	0,57	22750	75500	151000	85700	490,9	173750	361	490.9	236000	287	648	$3,6\times10^{-2}$
3—4—5	20	30	1,5	75500	85700	171400	101000	490,9	246900	503	718,7	272400	570	1073	$5,11\times10^{-2}$
4—5—6	30	40	1,33	85700	101000	202000	73400	718,7	307700	428	718,7	275400	510	938	$8,93\times10^{-2}$
5—6—7	40	20	0,5	101000	73400	146800	59600	718,7	247800	344	322,1	206400	320	664	$4,2\times10^{-2}$
6—7—8	20	15	0,75	73400	59600	119200	37250	322,1	192600	598	322,1	156450	365	963	$2,29\times10^{-2}$
7—8—9	15	25	1,67	59600	37250	74500	0	322,1	134100	416	201,1	74500	620	1036	$3,08\times10^{-2}$

Unghiul de deformație la capătul 1 al grinzii se calculează din relația (7), pentru $n = 1$,

$$\varphi_1 = \frac{v_2 - v_1}{l_2} + \frac{(M_2 + 2M_1)\, l_2}{6\, E I_2} + \frac{p_2\, l_2^3}{24\, E I_2} \tag{17}$$

Se înlocuiește $v_1 = o$, $M_1 = o$, $p_2 = o$ și se obține

$$\varphi_1 = \frac{v_2}{l_2} + \frac{M_2 l_2}{6\, E I_2} = \frac{0{,}0952}{15} + \frac{22750 \times 15}{6 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 117{,}9} = 0{,}00658$$

Analog se obține unghiul φ_9

$$-\varphi_9 = \frac{v_8}{l_9} + \frac{M_8 \cdot l_9}{6\, E I_9} = \frac{0{,}1524}{25} + \frac{37250 \times 25}{6 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 201{,}1} = 0{,}00647$$

4. Ecuația celor trei necunoscute pentru grinzi cu momentul de inerție variabil continuu

Pentru porțiunile de grindă având momentul de inerție variabil continuu se poate stabili pe o cale analoagă celei arătate anterior valoarea unghiului φ_n'', introducînd în ecuația diferențială (1) expresia variației momentului de inerție în raport cu x. Pentru o porțiune de grindă conică (Fig. 7), la care momentul de inerție variază cu puterea 4-a a lui x se

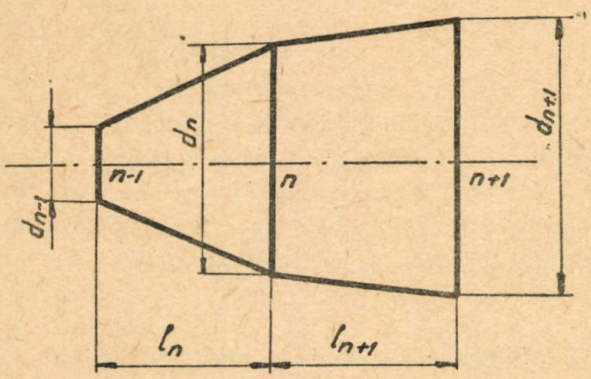


Fig. 7

ajunge la următoarea expresie pentru unghiul φ_n'' (pentru cazul în care $p = o$) :

$$\varphi_n'' = \frac{v_{n+1} - v_n}{l_{n+1}} + \frac{M_{n+1} \cdot l_{n+1}}{6\, E I_n}\, \eta_{n+1}^2 + \frac{2 M_n\, l_{n+1}}{6 E I_n}\, \eta_{n+1} \tag{18}$$

unde s-a notat

$$\eta_{n+1} = \frac{d_n}{d_{n+1}} \tag{19}$$

d_n și d_{n+1} fiind diametrele în punctele n și $n+1$.

Ecuația celor trei necunoscute pentru două intervale de grindă, ca în figura 7 este

$$-v_{n-1} \cdot l_{n+1} + v_n (l_n + l_{n+1}) - v_{n+1} \cdot l_n =$$

$$= \frac{l_n \cdot l_{n+1}}{6 EI_n} [M_{n-1} \cdot l_n \eta_n^2 + 2 M_n (l_n \eta_n + l_{n+1} \cdot \eta_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} \eta_{n+1}^2]$$

În cazul în care $d_{n-1} = d_n = d_{n+1}$, rezultă $\eta_n = \eta_{n+1} = 1$ și se ajunge la relația (12) stabilită anterior.

Relația (19) se aplică la fel ca cele precedente.

ANEXĂ

Sistemul de ecuații la care se ajunge prin aplicarea metodei celor trei necunoscute este de forma

$$\begin{cases} b_1 x + c_1 y = D_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = D_2 \\ a_3 y + b_3 z + c_3 u = D_3 \\ a_4 z + b_4 u = D_4 \end{cases} \tag{20}$$

în care coeficienții a_1, $b_1 \ldots D_4$ sînt cunoscuți.

Pentru rezolvarea sistemului se poate proceda după cum urmează:

1. Se alege o valoare arbitrară x_1 și se calculează y_1 din prima ecuație. Cu aceste valori se calculează z_1 din a doua, etc. Evident valoarea aleasă nu va satisface sistemul, decît dacă se înlocuiește în ultima ecuație D_4 printr-o valoare D'_4 care să satisfacă relația

$$D'_4 = a_4 z_1 + b_4 u_1 \tag{21}$$

Cu această schimbare sistemul de mai sus devine

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 y_1 = D_1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 = D_2 \\ a_3 y_1 + b_3 z_1 + c_4 u_1 = D_3 \\ a_4 z_1 + b_4 u_1 = D'_4 \end{cases} \tag{22}$$

în care ultima relație este (21).

2. Se anulează coeficienții D_1, D_2, D_3, D_4, transformînd sistemul de ecuații într-unul omogen

$$\begin{cases} b_1 x + c_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \\ a_3 y + b_3 z + c_3 u = 0 \\ a_4 z + b_4 u = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Să rezolvăm sistemul (23) pe aceiași cale ca mai sus, adică alegînd o valoare arbitrară pentru x — fie x_2 — calculînd y_2, z_2 etc. Din ultima ecuație se găsește condiția

$$D''_4 = a_4 z_2 + b_4 u_2 \tag{24}$$

Cu această schimbare sistemul (23) devine

$$\begin{cases} b_1 x_2 + b_1 y_2 = 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 = 0 \\ a_3 y_2 + b_3 z_2 + c_3 u_2 = 0 \\ a_4 z_2 + b_4 u_2 = D''_4 \end{cases} \tag{25}$$

Se înmulțește apoi sistemul (25) cu o constantă K și să se adune la sistemul (22). Se obține

$$\begin{cases} b_1 (x_1 + Kx_2) + c_1 (y_1 + Ky_2) = D_1 \\ a_2 (x_1 + Kx_2) + b_2 (y_1 + Ky_2) + c_2 (z_1 + Kz_2) = D_2 \\ a_3 (y_1 + Ky_2) + b_3 (z_1 + Kz_2) + c_3 (u_1 + Ku_2) = D_3 \\ a_4 (z_1 + Kz_2) + b_4 (u_1 + Ku_2) = D'_4 + KD''_4 \end{cases} \tag{26}$$

Pentru sistemul (26), valorile $x_1 + Kx_2$, $y + Ky_2 \ldots$ sînt evident soluții; pentru ca sistemul (26) să fie identic cu cel dat (20) este suficient ca

$$D'_4 + KD''_4 = D_4 \tag{27}$$

De aci se scoate valoarea lui K și se obțin soluțiile sistemului (20) ca mai jos

$$\begin{cases} x = x_1 + Kx_2 \\ y = y_1 + Ky_2 \\ z = z_1 + Kz_2 \\ u = u_1 + Ku_2 \end{cases} \tag{28}$$

Aplicație. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 4x + 3y = 25 \\ 2x + y + 5z = 21 \\ 3y + z = 11 \end{cases}$$

Se scrie ultima ecuație sub forma $3y + z = D'$.

1. Se alege arbitrar $x_1 = 1$; din prima ecuație se obține $y_1 = 7$, din a doua $z_1 = 2{,}4$. Inlocuind aceste valori în relația (29) se obține $D' = 23{,}4$.

2. Se formează sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ 3y + z = D'' \end{cases}$$

Se alege o altă valoare arbitrară (diferită de zero) $x_2 = 3$; se obține pe rînd $y_2 = -4$ și $z_2 = -0{,}4$.

Din ultima relație se obține $D'' = -12{,}4$.

Se aplică condiția (27)

$$23{,}4 - 12{,}4\ K = 11\ ;\ K = 1$$

Aplicînd relația (28) se obțin soluțiile sistemului.

$$\begin{cases} x = 1 + 3 = 4 \\ y = 7 - 4 = 3 \\ z = 2{,}4 - 0{,}4 = 2 \end{cases}$$

Primită la redacție la 12 aprilie 1962.

BIBLIOGRAFIE

1. *A. A. Beleș, R. P. Voinea:* Rezistența materialelor vol. II, Editura Tehnică, București, 1958.
2. *Gh. Buzdugan:* Rezistența materialelor, vol. I, Editura Tehnică, București, 1960.
3. *Panait Mazilu:* Statica Construcțiilor, vol. II, Editura Tehnică, București, 1959.
4. *S. D. Ponomarev și colectivul:* Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1960.

РАСЧЁТ ДЕФОРМАЦИИ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ МЕТОДОМ ТРЁХ ПЕИЗВЕСТНЫХ

(Краткое содержание)

В статье изложен метод для расчёта деформаций прямых брусьев путем иодразделения бруса на группы состоящие из двух интервалов (рис. 1), для которых можно написать следующее уравнение.

$$-v_{n-1}\cdot l_{n+1}+v_n\cdot(l_n+l_{n+1})-v_{n+1}\cdot l_n=$$
$$=\frac{l_n\cdot l_{n+1}}{6EI}\left[M_{n-1}\cdot l_n+2M_n(l_n+l_{n+1})+M_{n+1}\cdot l_{n+1}\right]+$$
$$+\frac{l_n\cdot l_{n+1}}{24EI}\left[p_{n+1}\cdot l_{n+1}^3+p_n l_n^3\right] \qquad (11)$$

где v_{n-1}, v_n, v_{n+1} — неизвестные деформаций;

M_{n-1}, M_n, M_{n+1} — изгибающие моменты

p_n и p_{n+1} — интенсивность равномерно распределенной нагрузки

Применяя уравнение последовательно к группам состоящим из двух интервалов, получается систем уравнений, корни которого представляют собой деформаций в концах интервала.

Простое решение системы уравнений приведено в приложении.

Описанный метод может быть распространен применительно к различным другим проблемом, наиример: к вращающимся диском, плосчим круглым пластином, колебаниям с несколькими степенями свободы.

THE CALCULATION OF THE RIGHT BEAM DEFLECTIONS, BY THE THREE UNKNWNS METHOD

(Summary)

The paper presents a method for the calculation of the deflections of the right beam by dividing the beam into groups of two intervals for which it can be written the following equation

$$-v_{n-1}\cdot l_{n+1}+v_n\cdot(l_n+l_{n+1})-v_{n+1}\cdot l_n=$$
$$=\frac{l_n\cdot l_{n+1}}{6EI}\left[M_{n-1}\cdot l_n+2M_n(l_n+l_{n+1})+M_{n+1}\cdot l_{n+1}\right]$$
$$+\frac{l_n\cdot l_{n+1}}{24EI}\left[p_{n+1}\cdot l_{n+1}^3+p_n l_n^3\right] \qquad (11)$$

here v_{n-1}, v_n, v_{n+1} are the unknown deflections;

M_{n-1}, M_n, M_{n+1} the bending moments

p_n, p_{n+1} the intensity of the uniform distributed load.

Using the equation fort the two succesive intervals, one can obtain a system of equation, the solution of which are the deflections of the beam on the end of all the intervals. A simple way of solving the equation system is pointed out on the appendix.

The recomended method can be generalised, and it can be applied to other problems too, for instance: rotating disks, circular plates symetrically loaded, vibrations with many degrees of freedom.

LE CALCUL DES DÉFORMATIONS DES POUTRES, PAR LA MÉTHODE DES TROIS INCONNUES

(Résumé)

L'auteur présente une méthode pour calculer la déformation des poutres, en les divisant en groupes de deux intervalles, pour lesquels on peut utiliser l'équation suivante

$$-v_{n-1}\cdot l_{n+1} + v_n\cdot(l_n + l_{n+1}) - v_{n+1}\cdot l_n = \frac{l_n\cdot l_{n+1}}{6EI}\left[M_{n-1}\cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}\, l_{n+1}\right] + \frac{l_n\cdot l_{n+1}}{24EI}\left[p_{n+1}\cdot l_{n+1}^3 + p_n l_n^3\right] \qquad (11)$$

v_{n-1}, v_n, v_{o+1} sont les déformations inconnues,

M_{n-1}, M_n, M_{n+1} les moments de flexion

p_n, p_{n+1} l'intesité de la charge uniformément répartie.

Appliquant l'équation aux groupes de deux intervalles successifs on obtient un système d'équations, dont les solutions représentent les déformations de la poutre aux extrémités de tous les intervalles. Une méthode simple pour résoudre le système d'équations est présentée dans l'appendice.

On peut généraliser cette méthode, en l 'appliquant à d'autres problèmes, tels que: disques tournants d'épaisseur variable, plaques circulaires chargées symétriquement, vibrations à plusieurs degrès de liberté.

BERECHNUNG DER VERFORMUNG GERADER STÄBEN DURCH DIE METHODE DER DREI UNBEKANTEN

(Zusammenfassung)

In dem Artikel wird für die Berechnung der Verformung von geraden Stäben eine Methode gegeben. Die Methode besteht in der Aufteilung des Stabes in Gruppen von je zwei Zwischenräumen für die eine Gleichung der Form

$$-v_{n-1}\cdot l_{n+1}+v_n\cdot(l_n+l_{n+1})-v_{n+1}\cdot l_n=$$
$$=\frac{l_n\cdot l_{n+1}}{6\,EI}\left[M_{n-1}\cdot l_n+2M_n(l_n+l_{n+1})+M_{n+1}\cdot l_{n+1}\right]+$$
$$+\frac{l_n\cdot l_{n+1}}{24\,EI}\left[p_{n+1}\cdot l_{n+1}^3+p_n l_n^3\right] \qquad (11)$$

gescrieben werden kann, wo

v_{n-1}, v_n, v_{n+1} die unbekanten Verformungen,

M_{n-1}, M_n, M_{n+1} die Biegungs-Momente und

p_n, p_{n+1} die gleichmässig verteilten Belastungen sind.

Durch die Anwendung der Gleichung bei je zwei aufeinanderfolgenden Zwischenräumen wird ein System von Gleichungen gefunden, dessen Lösung die Verformungen des Stabes an den Enden aller Zwischenräumen sind.

Eine einfache Lösung des Gleichungs-System wird in Anhang gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 1

O METODĂ GENERALĂ PENTRU CALCULUL REZISTENȚEI ÎN CURENT ALTERNATIV A CONDUCTOARELOR DE SECȚIUNE OARECARE

AUREL MILLEA

1. În cîteva lucrări anterioare [1, 2, 3] am arătat că determinarea repartiției curentului alternativ în conductoarele de secțiune oarecare și a rezistenței în curent alternativ a acestora reprezintă o problemă dificilă, deoarece necesită rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale diferite în mediul conductor, respectiv în dielectric, cu condiții la limită corespunzătoare, problemă pentru rezolvarea căreia nu există metode generale, exacte sau de aproximație, utiilzabile în toate cazurile. Metodele propuse de diverși autori se pretează, de cele mai multe ori, cu greutate calculului numeric, sau se pot aplica numai în anumite cazuri particulare.

Pentru calculul rezistenței în curent alternativ se folosesc de obicei două metode mai cunoscute: metoda iterației și soluția asimptotică corespunzătoare efectului pelicular pronunțat. Prima din aceste metode conduce la rezultate corecte numai în cazul frecvențelor relativ joase, iar a doua în cazul frecvențelor relativ înalte (mai precis: pentru valori mici, respectiv mari ale raportului $f\mu/R_{cc}$, unde f este frecvența curentului care circulă prin conductor, μ este permeabilitatea magnetică a conductorului, iar R_{cc} este rezistența în curent continuu a conductorului); în domeniul intermediar al frecvențelor medii, unde efectul pelicular nu este prea pronunțat, nu există formule de calcul pentru rezistența în curent alternativ. Ori în practică intervine des cazul în care dimensiunile secțiunii transversale ale conductorului sînt de ordinul de mărime al adîncimii de pătrundere, în care nu se poate aplica nici una din metodele de mai sus. Ca exemplu, amintim conductoarele folosite la puteri medii și frecvențe de cîteva sute sau mii de Hz, sau conductoarele folosite la puteri mari la frecvența de 50 Hz (la curenți de peste 1000 amperi).

O posibilitate de a calcula rezistența în curent alternativ a conductoarelor în cazul efectului pelicular intermediar ar fi extinderea metodei iterației, calculînd mai mulți termeni, adică continuînd procesul de aproximații succesive pînă la obținerea unui rezultat suficient de exact. Acest procedeu nu a fost folosit pînă acum, probabil datorită complicațiilor mari care rezultă din necesitatea de a efectua integrale multiple pe domenii bidimensionale.

În lucrarea de față vom arăta că metoda iterației permite calculul rezistenței în curent alternativ, fără complicații matematice prea mari și cu o precizie suficientă pentru scopuri practice, dacă se aplică următorul procedeu:

a) În loc să se determine mai întîi repartiția curentului în conductor și să se calculeze apoi puterea consumată și rezistența, se va deduce o formulă explicită a rezitsenței în curent alternativ numai în funcție de frecvență, constantele materialului conductor, aria și forma secțiunii lui.

b) Integralele definite multiple care intervin în această formulă se vor calcula printr-o metodă de aproximație, folosind diferențe finite.

c) Formula avînd forma unei serii de puteri, se vor determina un număr de termeni succesivi sufiicenți pentru a acoperi domeniul efectului pelicular „mediu", făcînd astfel „racordarea" cu formula corespunzătoare efectului pelicular pronunțat.

2. Pentru deducerea formulei generale a rezistenței în curent alternativ, folosim ecuația integrală pe care o satisface densitatea de curent J din conductor [1], valabilă în cazul conductoarelor neferomagnetice, suficient de îndepărtate de conductoarele învecinate parcurse de curent:

$$J(x, y) = \frac{j\omega\mu\sigma}{2\pi} \int_S J(x', y') \ln R \, dA' + C . \tag{1}$$

În această ecuație $\omega = 2\pi f$, σ este conductivitatea materialului conductor, S este suprafața secțiunii conductorului, dA' elementul de arie al acestei suprafețe, $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$, iar C este o constantă.

Pentru aplicarea iterațiilor, vom pune ecuația integrală (1) sub o altă formă, mai convenabilă, în care să apară în membrul drept curentul total I din conductor. Integrînd ambii membri ai ecuației (1) pe secțiunea S a conductorului, împărțindu-i cu aria A a secțiunii și scăzînd rezultatul, membru cu membru, din ecuația (1), se obține

$$J(x, y) = \frac{j\omega\mu\sigma}{2\pi} \int_S J(x', y') \ln \frac{R}{R'_m} \, dA' + \frac{I}{A} , \tag{2}$$

unde R_m' este distanța medie geometrică a punctului x', y' față de suprafața S, definită prin relația

$$\ln R'_m = \frac{1}{A} \int_S \ln R \, dA . \tag{3}$$

Se observă că nucleul ecuației integrale (2) este nesimetric, pe cînd nucleul ecuației (1) este simetric. Termenul liber al ecuației (2) este chiar densitatea de curent constantă J_0 corespunzătoare repartiției uniforme a curentului în conductor, iar media termenului integral, pe secțiunea S, este nulă. Rezolvarea ecuației integrale (2) prin iterație este mai simplă decît a ecuației (1), deoarece media pe secțiunea S a densităților de curent suplimentare J_1, J_2... determinate prin iterații va fi

nulă, pe cînd în cazul ecuației (1) constanta C trebuie determinată după fiecare iterație, din condiția ca integrala pe suprafața S a densității de curent să fie egală cu curentul total I.

Aplicînd metoda iterației ecuației integrale (2), obținem următoarele expresii ale densităților de curent J_0, J_1, J_2 ...:

$$J_0 = \frac{I}{A};$$

$$J_1 = \frac{j\omega\mu\sigma}{2\pi}\frac{I}{A}\int_S \ln\frac{R}{R'_m}\,dA'';$$

$$J_2 = \left(\frac{j\omega\mu\sigma}{2\pi}\right)^2\frac{I}{A}\int_S \ln\frac{R}{R'_m}\,dA'\int_S \ln\frac{R}{R''_m}\,dA'';$$

. . . . . .

În general, raportul dintre densitatea de curent J și densitatea de curent J_0 corespunzătoare repartiției uniforme a curentui se poate exprima prin relația

$$\frac{J}{J_0} = 1 + j\,P_1(x,y)\,\xi^2 - P_2(x,y)\,\xi^4 - j\,P_3(x,y)\,\xi^6 + P_4(x,y)\,\xi^8 + \\ + j\,P_5(x,y)\,\xi^{10} - \ldots\ldots \tag{4}$$

unde $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ ... sînt funcții de punctul x,y avînd următoarele expresii:

$$P_1(x,y) = \frac{1}{A}\int_S \ln\frac{R(P,P')}{R_m(P')}\,dA'; \tag{5}$$

$$P_2(x,y) = \frac{1}{A^2}\int_S \ln\frac{R(P,P')}{R_m(P')}\,dA'\int_S \ln\frac{R(P',P'')}{R_m(P'')}\,dA''; \tag{6}$$

$$P_3(x,y) = \frac{1}{A^3}\int_S \ln\frac{R(P,P')}{R_m(P')}\,dA'\int_S \ln\frac{R(P',P'')}{R_m(P'')}\,dA''\int_S \ln\frac{R(P'',P''')}{R_m(P''')}\,dA'''; \tag{7}$$

. . . . . .

iar ξ este un parametru adimensional:

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma A}{2\pi}} = \sqrt{f\mu\sigma A} \tag{8}$$

(am notat prin $R(P',P'')$ distanța dintre punctele P' și P'', prin dA'' elementul de arie în punctul P'', prin $R_m(P'')$ distanța medie geometrică a punctului P'' față de suprafața S, etc.).

3. Rezistența în curent alternativ a conductorului fiind dată de relația

$$R_{ca} = \frac{1}{\sigma I^2}\int_S |J|^2\,dA,$$

iar rezistența în curent continuu de relația

$$R_{cc} = \frac{1}{\sigma A},$$

raportul dintre aceste rezistențe, numit factor de majorare a rezistenței în curent alternativ, are expresia

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{1}{I^2} \cdot \frac{1}{A}\int_S |J|^2 \, dA = \frac{1}{A}\int_S \left|\frac{J}{J_0}\right|^2 dA . \tag{9}$$

Înlocuind raportul J/J_0 din relația (4) se obține

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{1}{A}\int_S [1 + (P_1^2 - 2P_2)\,\xi^4 + (P_2^2 - 2P_1P_3 + 2P_4)\,\xi^8 +$$
$$+ (P_3^2 + 2P_1P_5 - 2P_2P_4 - 2P_6)\,\xi^{12} +$$
$$+ (P_4^2 - 2P_4P_7 + 2P_2P_6 - 2P_3P_5 + 2P_8)\,\xi^{16} + \cdots] \, dA$$

Se poate însă demonstra că există relațiile (vezi Anexa 1):

$$\int_S P_2\,dA = \int_S P_4\,dA = \int_S P_6\,dA = \int_S P_8\,dA = \cdots = 0 ; \tag{10}$$

$$\int_S P_2^2\,dA = \int_S P_1P_3\,dA ;$$

$$\int_S P_3^2\,dA = \int_S P_1P_5\,dA = \int_S P_2P_4\,dA ; \tag{11}$$

$$\int_S P_4^2 = \int_S P_1P_7\,dA = \int_S P_2P_6\,dA = \int_S P_3P_5\,dA ;$$

. . . . . .

Factorul de majorare a rezistenței se poate deci exprima prin seria de puteri ale parametrului ξ:

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = 1 + a_1\xi^4 + a_2\xi^8 + a_3\xi^{12} + a_4\xi^{16} + \cdots \tag{12}$$

ai cărei coeficienți a_k au expresiile:

$$a_1 = \frac{1}{A}\int_S P_1^2\,dA ;$$

$$a_2 = -\frac{1}{A}\int_S P_2^2\,dA = -\frac{1}{A}\int_S P_1P_3\,dA ; \tag{13}$$

$$a_3 = \frac{1}{A}\int_S P_3^2\,dA = \frac{1}{A}\int_S P_1P_5\,dA = \frac{1}{A}\int_S P_2P_4\,dA ;$$

$$a_4 = -\frac{1}{A}\int_S P_4^2\,dA = -\frac{1}{A}\int_S P_1P_7\,dA = -\frac{1}{A}\int_S P_2P_6\,dA = -\frac{1}{A}\int_S P_3P_5\,dA ;$$

. . . . . .

Coeficienții a_k se mai pot exprima și în alt mod. Afectăm punctelor P', P', P'' . . . indicii 1, 2, 3, . . . și notăm

$$ln \frac{R(P_1 P')}{R_m(P')} = g_{12}; \qquad ln \frac{R(P_1 P')}{R_m(P)} = g_{21} \text{ etc.} \tag{14}$$

Scriind expresiile integrale ridicate la pătrat din relațiile (13) ca produse de două integrale și intervertind ordinea de integrare, se vede că coeficienții a_k pot fi determinați și cu ajutorul expresiilor următoare:

$$a_1 = \frac{1}{A^3} \int_S dA_1 \int_S dA_2 \int_S dA_3 \, g_{21} g_{23};$$

$$a_2 = \frac{1}{A^5} \int_S dA_1 \int_S dA_2 \int_S dA_3 \int_S dA_4 \int_S dA_5 \, g_{21} g_{32} g_{43} g_{45}; \tag{15}$$

$$a_3 = \frac{1}{A^7} \int_S dA_1 \int_S dA_2 \int_S dA_3 \int_S dA_4 \int_S dA_5 \int_S dA_6 \int_S dA_7 \, g_{21} g_{32} g_{43} g_{54} g_{65} g_{67};$$

. . . . . .

unde s-a ținut seama și de relațiile (11).

S-a obținut deci o expresie generală a factorului de majorare a rezistenței în curent alternativ, valabilă oricare ar fi forma secțiunii conductorului, sub forma unei serii de puteri ale parametrului adimensional ξ, coeficienții seriei putînd fi determinați prin cuadaturi și depinzînd numai de forma geometrică a secțiunii conductorului (nu și de aria acesteia.)

Această expresie verifică încă o dată că parametrul ξ este un parametru universal de similitudine pentru problemele de acest gen, ceea ce s-a demonstrat pe altă cale anterior [1].

4. Calculul exact al expresiilor (13) sau (15) prin cuadraturi este foarte laborios și nu poate fi luat în considerare la rezolvarea efectivă a problemelor particulare. Se poate însă folosi o metodă de cuadraturi numerice, aproximînd integralele din aceste expresii cu sume finite. Pentru aceasta, se descompune suprafața S a secțiunii conductorului în n subdomenii, iar distanțele R dintre două puncte P și P' se înlocuiesc prin distanțele medii geometrice R_{jk} dintre subdomeniile j și k în care sînt situate punctele P, respectiv P'. Mărimile R_{jj} vor reprezenta distanțele medii geometrice proprii ale subdomeniilor.

Pentru simplicare, vom presupune că toate subdomeniile au aceeași formă și aceleași dimensiuni.

Cu notațiile

$$ln R_{jk} - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} ln R_{kp} = g_{jk}; \tag{16}$$

$$ln R_{jk} - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} ln R_{jp} = g_{kj} \text{ etc.}$$

expresiile coeficienților a_k vor fi următoarele:

$$a_1 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} g_{lk}\, g_{lm};$$

$$a_2 = -\frac{1}{n^5} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} g_{ji}\, g_{kj}\, g_{lk}\, g_{lm}; \qquad (17)$$

$$a_3 = \frac{1}{n^7} \sum_{g=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m-1}^{n} g_{hg}\, g_{th}\, g_{ji}\, g_{kj}\, g_{lk}\, g_{lm};$$

(s-au ales expresiile mai convenabile pentru calculul numeric)

Pentru calculul numeric al acestor coeficienți este indicat să se urmeze procedeul de mai jos:

— se alcătuiește tabela pătratică, cu n linii și a n coloane, a mărimilor $ln\ R_{jk}$;

— se calculează media valorilor elementelor de pe fiecare coloană și se scade din acestea, alcătuind apoi tabela mărimilor g_{jk};

— se alcătuiesc pe rînd tabelele mărimilor $g_{lk} \sum_{m-l}^{n} g_{lm}$; $g_{kj} \sum_{l=1}^{n} g_{lk} \sum_{m=1}^{n} g_{lm}$

ș.a.m.d., prin însumarea elementelor de pe linii, respectiv de pe coloane și înmulțirile corespunzătoare;

— se determină coeficienții a_k prin însumarea elementelor tabelelor de mai sus.

Se observă că pentru calculul fiecărui coeficient a_k este necesară efectuarea a 2 n^2 înmulțiri (cu excepția coeficientului a_1, al cărui calcul necesită numai n^2 înmulțiri) și a $2n+1$ adunări de cîte n numere. De exemplu, folosind un calculator mecanic, cu ajutorul căruia o operație elementară se poate efectua în cca. 10 secunde, pentru $n=20$ timpul total necesar calculului este de cîteva ore. Folosind un calculator electronic, timpul necesar calculului este considerabil mai mic.

La calculul coeficienților a_k pe această cale dimensiunile secțiunii conductorului pot fi alese arbitrar, ele neinfluențînd rezultatul.

5. Ca exemplu, am calculat cu această metodă rezistența în curent alternativ a unui conductor de secțiune dreptunghiulară, avînd raportul dintre laturi egal cu 8. Suprafața dreptunghiului am împărțit-o în 8 pătrate egale și am luat lungimea laturii pătratelor egală cu 0,5 unități.

Distanțele medii geometrice proprii și ale pătratelor învecinate le-am calculat cu formulele din literatură [4], iar celelalte distanțe medii geo-

metrice le-am aproximat prin distanțele dintre centrele pătratelor (eroarea astfel comisă este foarte mică).

Avînd în vedere simetria secțiunii considerate, tabela cu $8^2=64$ elemente se poate reduce la una cu $4^2=16$ elemente.

In anexa II sînt date tabelele necesare calculului primilor trei coeficienți a_k Rezultatul obținut este

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = 1 + 0{,}0293\,\xi^4 - 0{,}00289\,\xi^8 + 0{,}000282\,\xi^{12} - \cdots$$

6. In concluzie, rezultatele mai importante obținute în lucrare sînt următoarele:

a) S-a dedus o nouă formă a ecuației integrale a densității de curent în conductoare (ecuația (2)), adecvată pentru aplicarea metodei iterației.

b) S-a dedus o formulă explicită a rezistenței în curent alternativ a conductoarelor, sub forma unei serii ai cărei termeni se calculează prin cuadraturi.

c) S-a dat o metodă numerică de efectuare a cuadraturilor necesare pentru calculul pe această cale a rezistenței în curent alternativ.

Metoda propusă are mai multe avantaje importante față de alte metode posibile. Astfel, rezultatul se obține numai prin operații aritmetice elementare (adunări și înmulțiri), iar calculul este astfel sistematizat încît permite programarea simplă a unui calculator electronic pentru efectuarea lui. Determinarea coeficienților trebuie făcută o singură dată pentru o anumită formă a secțiunii conductorului (de exemplu, pentru un raport dat între laturile secțiunii dreptunghiulare), formula astfel obținută fiind valabilă pentru orice valori ale ariei secțiunii, frecvenței curentului și constantelor conductorului. După cum arată calculele efectuate, este suficient să se rețină numai primii termeni ai seriei (12) în cazul efectului pelicular „mediu", contribuția celorlalți fiind sensibilă numai la frecvențe la care se poate aplica formula asimptotică corespunzătoare efectului pelicular pronunțat (cu excepția secțiunilor plate, de exemplu de forma unui dreptunghi cu raport mare între lungimile laturilor). Reprezentînd grafic funcția dată de seria (12) și cea dată de formula asimptotică, care este o dreaptă, se poate face racordarea lor, astfel încît să se obțină o diagramă a rezistenței în curent alternativ valabilă la orice frecvență.

Desigur, în legătură cu metoda descrisă se ridică mai multe probleme interesante, dintre care merită o atenție deosebită problema convergenței seriei (12) și a dependenței rapidității convergenței de forma secțiunii conductorului. Această problemă este însă dificil de studiat pe cale teoretică și, de aceea, elucidarea ei va fi posibilă după efectuarea unui număr mare de determinări numerice, care sînt în curs.

Institutul Politehnic București
Catedra Electrotehnică I.

Anexa I.

Integralele de forma

$$\int_s P_k\,(x, y)\,dA \tag{18}$$

sînt nule, ceea ce se poate arăta punîndu-le sub forma

$$\int_s P_k\,(x_1 y)\,dA = \int_s f(x', y')\,ln\frac{R}{R'_m}\,dA = 0.$$

Dintre egalitățile (11), o vom demonstra pe prima:

$$\int_s (P_2^2 - P_1 P_3)\,dA = 0, \tag{19}$$

celelalte deducîndu-se în mod cu totul asemănător. Folosind notațiile (14), relația (19) devine

$$\int_s dA_1 \int_s dA_2 \int_s dA_3 \int_s dA_4 \int_s dA_5\,(g_{21}\,g_{32}\,g_{34}\,g_{45} - g_{21}\,g_{32}\,g_{43}\,g_{45}) = 0,$$

sau

$$\int_s dA_1 \int_s dA_2 \int_s dA_3 \int_s dA_4 \int_s dA_5\,g_{21}\,g_{32}\,g_{45}\,(g_{34} - g_{43}) = 0.$$

Dar

$$g_{34} - g_{43} = ln\frac{R\,(P'', P''')}{R_m\,(P''')} - ln\frac{R\,(P'', P''')}{R_m\,(P'')} = ln\,R_m\,(P'') - ln\,R_m\,(P''') = h_3 - h_4$$

unde h_3 este o funcție care depinde numai de punctul 3, iar h_4 este o funcție care depinde numai de punctul 4. Relația (19) devine

$$\int_s dA_1 \int_s dA_2 \int_s dA_3 \int_s dA_4 \int_s dA_5\,(g_{21}\,g_{32}\,h_3\,g_{45} - g_{21}\,g_{32}\,h_4\,g_{45}) = 0.$$

Cei doi termeni ai acestei integrale sînt însă nuli, deoarece

$$\int_s dA_4 \int_s dA_5\,g_{45} = 0$$

și

$$\int_s dA_1 \int_s dA_2 \int_s dA_3\,g_{21}\,g_{32} = 0,$$

relații care se demonstrează ușor, la fel cu relația (18).

Anexa II.

Tabela 1 conține logaritmii distanțelor medii geometrice dintre pătratele în care a fost împărțită suprafața secțiunii conductorului. Datorită simetriei, această tabelă se poate reduce la tabela 2 a elementelor $ln\ (R_{lm}\ R_{lm'})$. Prin adunarea elementelor de pe coloanele tabelei 2 și

Tabela 1

	1	2	3	4	4′	3′	2′	1′
1	—1,501	—0,688	0	0,405	0,693	0,405	0	—0,688
2	—0,688	—1,501	—0,688	0	0,916	0,693	0,405	0
3	0	—0,688	—1,501	—0,688	1,098	0,916	0,693	0,405
4	0,405	0	—0,688	—1,501	1,253	1,098	0,916	0,693
4′	0,693	0,916	1,098	1,253	—1,501	—0,688	0	0,405
3′	0,405	0,693	0,916	1,098	—0,688	—1,501	—0,688	0
2′	0	0,405	0,693	0,916	0	—0,688	—1,501	—0,688
1′	—0,688	0	0,405	0,693	0,405	0	—0,688	—1,501

Tabela 2

	1	2	3	4
1	—2,189	—0,688	0,405	1,098
2	—0,688	—1,096	0,005	0,916
3	0,405	0,005	—0,585	0,410
4	1,098	0,916	0,410	—0,248
	—1,374	—0,863	0,235	2,176

$ln\ R_{m1} = -0{,}343$

$ln\ R_{m2} = -0{,}216$

$ln\ R_{m3} = 0{,}059$

$ln\ R_{m4} = 0{,}544$

împărțirea cu 4 se obțin distanțele medii geometrice $ln\, R_{m1}$ $ln\, R_{m2}$ etc. Scăzîndu-le din elementele tabelei 2, se obține tabela 3 a elementelor g_{lm} (primul indice se referă la liniile iar al doilea la coloanele tabelei).

Operațiile care urmează se fac pe baza relațiilor

$$a_1 = \frac{2}{8^3} \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} g_{lk} \sum_{m=1}^{4} g_{lm} ;$$

$$a_2 = \frac{2}{8^5} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} g_{ji} \sum_{k=1}^{4} g_{kj} \sum_{l=1}^{4} g_{lk} \sum_{m=1}^{4} g_{lm} ;$$

$$a_3 = \frac{2}{8^7} \sum_{g=1}^{4} \sum_{h=1}^{4} g_{hg} \sum_{i=1}^{4} g_{ih} \sum_{j=1}^{4} g_{ji} \sum_{k=1}^{4} g_{kj} \sum_{l=1}^{4} g_{lk} \sum_{m=1}^{4} g_{lm} ,$$

care rezultă din formulele (17) ; factorul 2 apare datorită dublării suprafeței de integrare.

Prin însumarea coloanelor tabelei 3 și înmulțirea rezultatelor acestei însemnări cu elementele tabelei se obține tabela 4 a mărimilor $g_{lk} \sum_{m=1}^{4} g_{lm}$. Suma tuturor elementelor acestei tabele reprezintă coeficientul a_1.

Tabela 3

	1	2	3	4	
1	—1,846	—0,472	0,346	0,554	—1,418
2	—0,345	—0,880	—0,554	0,372	—0,907
3	0,748	0,221	—0,644	—0,134	0,191
4	1,441	1,132	0,351	—0,792	2,132

Tabela 4

	1	2	3	4	
1	2,615	0,670	—0,491	—0,786	
2	0,313	0,798	0,049	—0,337	
3	0,143	0,032	—0,123	—0,024	
4	3,075	2,413	0,748	—1,688	
	6.146	3,923	0,183	—2,837	7,415

$$a_1 = 2\,\frac{7{,}415}{8^3} = 0{,}0293$$

Însumînd liniile tabelei 4 și înmulțind rezultatele acestei însumări cu elementele tabelei, se obține tabela 5 a mărimilor $g_{kj} \sum_{l=1}^{4} g_{lk} \sum_{m=1}^{4} g_{lm}$.

Contituînd apoi operațiile în același mod, se obțin tabelele 6, 7, 8. Coeficientul a_2 se obține însumînd toate elementele tabelei 6, coeficientul a_3 însumînd toate elementele tabelei 8 etc.

Tabela 5

	1	2	3	4
1	—11,33	—2,90	2,12	3,41
2	— 1,35	—3,46	—0,21	1,46
3	0,14	0,04	—1,18	—0,02
4	— 4,08	—3,21	—0,99	2,25
	—16,62	—9,53	—0,26	7,10

Tabela 6

	1	2	3	4	
1	30,67	7,85	—5,75	—9,20	
2	3,29	8,39	0,51	—3,54	
3	—0,19	—0,06	0,17	0,03	
4	10,24	8,02	2,49	—5,62	
	44,01	24,20	—2,58	—18,33	74,30

$$a_2 = -2\frac{74,30}{8^3} = 00,289$$

Tabela 7

	1	2	3	4
1	—81,20	—20,77	15,25	24,40
2	— 8,34	—21,37	— 1,31	8,99
3	— 1,93	— 0,57	1,66	0,34
4	—26,40	—20,75	— 6,43	14,52
	—117,87	—63,46	9,17	48,25

Tabela 8

	1	2	3	4	
1	217,3	55,6	—40,7	—65,2	
2	21,9	55,8	3,4	—23,6	
3	6,9	2,0	— 5,9	— 1,2	
4	69,6	54,6	16,5	—38,2	
	315,7	168,0	—59,7	—128,2	295,8

$$a_3 = 2\frac{295,8}{8^7} = 0,000282$$

BIBLIOGRAFIE

1. A. Tugulea, A. Millea: Considerații asupra determinării cîmpurilor electromagnetice cuasistaționare în conductoare masive. Buletinul Academiei R.P.R., filiala Iași (sub tipar).

2. A. Millea : Formularea problemelor plan-paralele de efect pelicular. Buletinul Institutului Politehnic București, tomul XXI fasc. 2, aprilie—iunie 1959.

3. A. Millea : Exprimarea rezistenței în curent alternativ a conductoarelor prin densitatea de curent la suprafața lor. Buletinul Institutului Politehnic București, tomul XXII, fasc. 4, octombrie—decembrie 1960.

4. P. L. Kalantarov, L. A. Teitlin : Calculul inductanțelor. Editura Tehnică 1958.

ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЁТА СОПРОТИВЛЕНЯ ПРИ ПЕРЕМЕНИОМ ТОКЕ ТОКОПРОВОДОВ ЛЮБОГО СЕЧЕНИЯ

(Краткое содержание)

Выводится общее выражение активного сопротивленя при переменном токе токопроводов любого сечения, в виде степэнного ряда параметра $\xi = (f \mu \sigma A)^{1/2}$, где f — частота, μ — магнитная проницаемость, σ — процодимость и A — площади сечения. Кэффициенть ряда вычисляются при помощи последовательных кваратур и зависят только от форме поперечного сечения провода. даны, приближённый метод для вычисленя этих интегралов и численный пример для токопровода прямоугольного сечения.

A GENERAL METHOD FOR CALCULATING THE ALTERNATIVE CURRENT RESISTANCE OF CONDUCTORS HAVING ARBITRARY CROSS SECTION

(Summary)

A general expression of the alternative current resistance of conductors having arbitrary cross section is deduced, in form of a power series of the parameter $\xi = (f\mu\sigma A)^{1/2}$, in which f is the frequency, μ is the magnetic permeability, σ the conductivity and A the area of the conductor cross section. The determination of the coefficients appearing in the series requires succesive quadratures ; these coefficients are functions of the shape of conductor section only. A method for the approximate computation of the series terms and a numerical ilusrtating this method are given.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LE CALCUL DE LA RÉSISTENCE EN COURANT ALTERNATIF DES CONDUCTEURS À SECTION QUELCONQUE

(Résumé)

On déduit une expression générale de la résistance en courant alternatif des conducteurs à section arbitraire, sous la forme d'une série de puissances du paramètre $\xi = (f\mu\sigma A)^{1/2}$, oú f est la fréquence, μ la perméabilité magnétique, σ la conductivité et A l'aire de la section du conducteur. Les coefficients de la série sont obtenus par des quadratures succesive et ils dépendent seulement de la forme de la se ction. On donne une méthode d'approximation pour le calcul numérique des intégrales, illustré par un exemple.

EINE ALLGEMEINE METHODE ZUR BERECHNUNG DES WECHSELSTROMWIRKWIDERSTANDES VON LEITERN BELIEBIGEN QUERSCHNITTES

(Zusammenfassung)

Es wird eine allgemeine Formel zur Berechnung des Wechselstromwirkwiderstandes von Leitern beliebigen Querschnittes abgeleitet u. zw. in Form einer Potenbreihe des Parameters $\xi = (f\mu\sigma A)^{1/2}$, wo f die Frequenz, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit und A der Leiterquerschnitt ist. Die Koeffizienten der Reihe erhält man durch aufeinanderfolgende Integrationen und hängen nur von der Querschnittsform ab. Es wird ein Annäherungsverfahren zur numerischen Berechnung der notwendigen Integrationen gegeben, das durch ein Beispiel erläutet wird.
Politehnic București, tomul XXII, fasc. 4, octombrie—decembrie 1960.

MŰSZAKI KÖNYVTÁRÉS
MŰSZAKI KÖZPONT

INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 6
București, str. Alexandru Odobescu nr. 12 – c. 4623

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 2

APRILIE — IUNIE

1962

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. In limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

F 1130

OSZTÁLYOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 2

APRILIE — IUNIE

1962

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Prof. *M. Bercovici*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. Șt. Th.; Prof. Dr. *D. Dumitrescu*, membru corespondent al Acad. R.P.R.; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. Șt. Ec.; Conf. *Gh. Hagymaș*, cand. Șt. Th; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Conf. *N. Manolescu*; Prof. *Șt. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. Șt. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

M. BOTEZ — Asupra diametrelor unei clase de cubice . . . 13

N. T. STELMAȘUC — О применении одного обобщения ареоларных производных к преобразованиям некоторых систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных 19

I. M. MIU — Asupra seriei Langrange 37

MECANICA

N. MANOLESCU, AL. STOENESCU, D. BOIANGIU — Polul de inerție în mișcarea cicloidală și interpretarea lui în mișcare de șurub 59

R. VOINEA, M. ATANASIU — Applications de la théorie géométrique des vis dans la mécanique théorique . . . 81

M. ATANASIU — Considerații cu privire la teoria generală a legăturilor solidului. 89

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. TEOREANU — О некоторых вопросах динамики флюидизации 117

TERMOTEHNICA

ST. GHEORGHIU, GH. ANTONESCU — Dimensionarea economică a schimbătoarelor finale de căldură ale agregatelor de cazane de aburi 129

ENERGETICA

C. DINCULESCU, A. ARIE, E. POTOLEA, I. IORDĂNESCU
Influența armonicelor produse de redresoare asupra funcționării unui sistem electric 147

ELECTROTEHNICA

A. TIMOTIN — O definiție invariantă a mărimilor de stare macroscopică a cîmpului electromagnetic în medii în mișcare 167

V. PANAITE — Forța minimă de atracție la electromagneții monofazați 173

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

М. БОТЕЗ — Относительно диаметров класса кубиков . . 13
Н. Т. СТЕЛЬМАШУК — О применении одного обощения ареоларных производных к преобразованиям некоторых систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных 19
И. М. МИУ — О ряде лагранжа 37

МЕХАНИКА

Н. МАНОЛЕСКУ, Ал. СТОЕНЕСКУ, Д. БОИАНЖИУ — Инерционный полюс в циклоидальном движении и его интерпретация в винтовом движении 59
Р. ВОЙНЯ, М. АТАНАСИУ — Применения геометрической теории винтов в теоретической механике 81
М. АТАНАСИУ — Относительно общей теории связи твёрдого тела 89

ТЕХНОЛОГИЯ КИМИКИ

И. ТЕОРЯНУ — О некоторых вопросах динамики флюидизаций 117

ТЕРМОТЕХНИКА

ШТ. ГЕОРГИУ, Г. АНТОНЕСКУ — Экономический расчёт теплообменников хвостовой части паровых котлов . . 129

ЭНЕРГЕТИКА

К. ДИНКУЛЕСЛУ, А. АРИЕ, Э. ПОТОЛЯА, И ИОРДЫНЕСКУ — Влияние гармонических токов, произведенных выпрямителями, на работу электрической системы 147

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. ТИМОТИН — Макроскопическое инвариантное определение электромагнитного поля в движущих. . . . 167
В. ПАНАИТЕ — Минимальная сила притяжения однофазных электромагнитов 173

CONTENTS

MATHEMATICS

M. BOTEZ — On a cubic curve class diameters 13

N. T. STELMAȘUC — On the application of a generalisation of areolor derivative at the transformation of some linear systems of partial differential equations 19

I. M. MIU — On Lagrange series 37

MECHANICS

N. MANOLESCU, AL. STOENESCU, D. BOIANGIU — The inerție pole in the cycloidal mitions and is interpretation in the serew motion. 59

R. VOINEA, M. ATANASIU — Applications of the geometrical theory of screms in theoretical mechanics 81

M. ATANASIU — Considerations on the general theory of the constraints of a solid body 89

TEHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. TEOREANU — Some problems of the fluidisations dynamic 117

TERMODYNAMICS

ST. GHEORGHIU, GH. ANTONESCU — Economical dimensioning of steam boilers last heat exchangers. 129

ELECTRIC POWERS

C. DINCULESCU, A. ARIE, E. POTOLEA, I. IORDANESCU
Influence of curent harmonics due to rectifiers, on a power system 147

ELECTRICITY

A. TIMOTIN — A invariant macroscopical definition of the electromagnetic field quantities in moving bodies . . 167
V. PANAITE — The minimal attractive force of monophasic electromagnets 173

SOMAIRE

MATHEMATIQUE

M. BOTEZ — Sur les diamétres d'une classe de cubiques . . 13

N. T. STELMAŞUC — Sur l'application d'une generalisation des derivées areolaires aux transformations de quelques systemes des equations differentialles linéaires aux derivées partielles 19

I. M. Miu — Sur la serie Lagrange 37

MECANIQUE

N. MANOLESCU, AL. STOENESCU, D. BOIANGIU — Le pole d'inertie dans le mouvement cycloidal et son interpretation dans le mouvement de vis 59

R. VOINEA, M. ATANASIU — Applications de la théorie géométrique des vis dans la mécanique theoretique. . . . 81

M. ATANASIU — Considerations sur la théorie generale de liasons du corps solide 89

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

I. TEOREANU — Sur quelques problèmes concernent la dynamique de la fluidisation 117

TERMOTECHNIQUE

ST. GHEORGHIU, GH. ANTONESCU — Le calcul économique des échangeurs de chaleur finals des chaudières a vapeur 129

ENERGETIQUE

C. DINCULESCU, A. ARIE, E. POTOLEA, I. IORDĂNESCU
Influence des courents harmoniques produits par des rédresseurs sur le fonctionnement d'un systeme électrique. 147

ELECTROTECHNIQUE

A. TIMOTIN — Une definition macroscopique invariante des grandeurs d'état du champ electromagnetique . . . 167
V. PANAITE — La forme minima d'attraction des electro-aimants monophases. 173

INHALT

MATHEMATIK

M. BOTEZ — Über die Durchmesser einer Kubikklasse . . 13

N. T. STELMASUC — Über der Anwendung der Allgemeinheit der areolaren Ablaitungen an den transformationen einiger Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen 19

I. M. MIU — Über die Lagrange — sche Reihe 37

MECHANIK

N. MANOLESCU, AL. STOENESCU, D. BOIANGIU — Der Trägheitspol in der zykloidalen Bewwegung und dessen auslegung in der Schraubenbewegung 59

R. VOINEA, M. ATANASIU — Anwendung der geometrischen Theorie der Schrauben in der teoretischen Mechanik . 81

M. ATANASIU — Beiträge bezüglich der allgemeinen Theorie der soliden Bindungen 89

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

I. TEOREANU — Einige Fragen der Dinamik der Wirbelschictbettes 117

TERMOTECHNIK

ST. GHEORGHIU, GH. ANTONESCU — Wirtscaftliche berechung der Dampfkesselnachschaltheizflächen . . . 129

ENERGETIK

C. DINCULESCU, A. ARIE, E. POTOLEA, I. IORDĂNESCU
Einfluss den von Stromrichter nerzengten Stromoberwellen auf das Verhalten eines elektrischen Netzes . . . 147

ELECTROTECHNIK

A. TIMOTIN — Eine makroskopische invariante Definition der electromagnetischen Feldgrössen im bewegten Körper . 167
V. PANAITE — Minimale anziehungskraft bei einphasigen elektromagneten 173

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

MATEMATICA

ASUPRA DIAMETRILOR UNEI CLASE DE CUBICE

MIHAIL ȘT. BOTEZ

În articolul „Asupra unor transformări optice" [1], apărut în Buletinul Institutului Politehnic-București, prof. C. Ionescu-Bujor, se ocupă de o transformare determinată de o lentilă convergentă, stabilind între punctele $M(x, y)$ ale unui plan și transformatele lor $M_1(x_1, y_1)$, relațiile:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\left(1-\frac{vx}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1-\frac{vx}{x^2+y^2}\right) \\ x &= x_1\left(1+\frac{vx_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \qquad y = y_1\left(1+\frac{vx_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

în care $\bar{v}$ este un vector ce determină o translație, pe care autorul o numește *convergentă*. Din studiul citat reținem transformarea definită de formulele (1) și ne vom referi la cubicele obținute prin transformarea unei drepte, pe care le vom studia din punct de vedere *diametral*, după cîteva prealabile observări.

I. Aplicînd dreptei oarecare

$$Ax + By + C = 0$$

transformarea (1), se obține cubica circulară:

$$(Ax + By)(x^2 + y^2) + (vA + C)x^2 + vBxy + Cy^2 = 0 \tag{2}$$

care trece, în afara punctelor ciclice, și prin punctul de la infinit al dreptei:

$$Ax + By = 0$$

care este singurul punct real la infinit al curbei (2). Această cubică are un punct dublu în origină ale cărui tangente principale sînt:

$$y = \alpha_1 x \quad \text{și} \quad y = \alpha_2 x$$

unde α_1 și α_2 sînt rădăcinele ecuației:

$$C\alpha^2 + vB\alpha + (vA + C) = 0$$

Un calcul scurt arată că dacă:

$$|\bar{v}| = \frac{2(A \pm C\sqrt{A^2+B^2})}{B^2}$$

cubica (2) este *cuspidală*. Se observă de asemenea că această cubică este unicursală de gen zero şi poate fi exprimată prin ecuaţiile parametrice:

$$x = -\frac{\alpha+\beta t+\gamma t^2}{(1+t^2)(A+Bt)}; \quad y = -t\frac{\alpha+\beta t+\gamma t^2}{(1+t^2)(A+Bt)}$$

în care: $\alpha = VA + C$, $\beta = vB$ şi $\gamma = C$.

II. a) *Diametri*. Newton a numit diametrul unei curbe conjugat unei direcţii date, locul punctelor în linie dreaptă, care sînt centrele distanţelor medii ale unui sistem de drepte paralele cu acea direcţie.

Ecuaţia diametrului conjugat direcţiei m al unei cubice este [2]:

$$x\left[\frac{\partial U_3(xy)}{\partial x}\right]_{\frac{y}{x}=m} + y\left[\frac{\partial U_3(xy)}{\partial y}\right]_{\frac{y}{x}=m} + [U_2(xy)]_{\frac{y}{x}=m} = 0 \qquad (3)$$

unde $U_i(x, y)$ reprezintă grupul omogen de termeni de grad i, iar parantezele înseamnă ceea ce devin derivatele parţiale ale lui $U_3(x, y)$ după ce au fost împărţite cu x^2 şi s-a pus $\frac{y}{x} = m$.

Pentru cubica (2) avem:

$$U_3(xy) = Ax^3 + By^3 + Axy^2 + Bxy^2$$
$$U_2(xy) = (C + vA)x^2 + Cy^2 + vBxy$$
$$U_1(xy) = U_0 = 0$$

şi prin urmare:

$$\left[\frac{\partial U_3(xy)}{\partial x}\right]_{\frac{y}{x}=m} = Am^2 + 2Bm + 3A$$

$$\left[\frac{\partial U_3(xy)}{\partial y}\right]_{\frac{y}{x}=m} = 3Bm^2 + 2Am + B$$

$$[U_2(xy)]_{\frac{y}{x}=m} = Cm^2 + vBm + (C + vA)$$

Deci ecuaţia diametrului conjugat direcţiei m, a cubicei (2) este:

$$(Am^2 + 2Bm + 3A)x + (3Bm^2 + 2Am + B)y + [Cm^2 + vBm + (C + vA)] = 0 \qquad (4)$$

care se mai poate scri:

$$(Ax + 3By + C)m^2 + (2Bx + 2Ay + vB)m + 3Ax + By + (C + vA) = 0 \qquad (4')$$

În general diametrii unei curbe algebrice nu au punct comun.

Dacă un asemenea punct există, atunci toți diametrii vor trece prin acest punct, iar (4') va deveni o identitate. Deci va trebui să avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 3B & C \\ 2B & 2A & vB \\ 3A & B & C+vA \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

care este o ecuație de gradul întîi în v, a cărui rădăcină este:

$$|\bar{v}| = \frac{2C}{A} \tag{6}$$

Deci *pentru valoarea lui* $\bar{v}$ *dată de (6), cubica (2) admite centru.*

Dacă luăm pentru $\bar{v}$ valoarea (6) și ca origină [3] centrul, ecuația (4), devine:

$$(Am^2+2Bm+3A)x+(3Bm^2+2Am+B)y=0 \tag{7}$$

care reprezintă o dreaptă ce trece prin origină și a cărei ecuație poate fi pusă sub forma:

$$\lambda x - y = 0$$

Dreapta (7) va fi un diametru dacă există valori reale pentru m astfel încît:

$$\frac{Am^2+2Bm+3A}{\lambda} = \frac{3Bm^2+2Am+B}{-1}$$

Adică ecuația în m:

$$(A+3\lambda B)m^2+2(B+\lambda A)m+(3A+\lambda B)=0$$

să aibe rădăcini reale. Discriminantul:

$$\delta = (A^2-3B^2)\lambda^2 - 8AB\lambda + (B-3A^2)$$

nu este nul pentru nici o valoare reală a lui λ și este pozitiv sau negativ după cum $A^2-3B^2 \gtrless 0$.

De unde rezultă că dacă:

1. $A^2-3B^2>0$, *cubica dată are diametri reali ce trec prin punctul principal (centrul) curbei.*

2. $A^2-3B^2<0$, *diametrii reali ai cubicei date, formează un fascicol avînd ca suport punctul principal.*

b — *Diametri principali.* Numim diametru principal, diametrul perpendicular pe direcția conjugată. Existența acestor diametri este caracteristică conicelor și curbele care admit astfel de diametri sînt considerate ca generalizări ale conicelor.

Dacă D este diametrul conjugat direcției m, iar m' este coeficientul său unghiular, trebuie să avem:

$$mm'+1=0$$

sau :

$$m\left[\frac{\partial U_3}{\partial x}\right]_{\substack{y\\x=m}} - \left[\frac{\partial U_3}{\partial y}\right]_{\substack{y\\x=m}} = 1$$

relaţie care pentru cubica (2) devine :

$$1 - m = \frac{3A + 2Bm + Am^2}{B + 2Am + 3Bm^2}$$

sau :

$$(m^2 + 1)(B - Am) = 0 \qquad (8)$$

Ecuaţia (8) de gradul trei în m, are rădăcinele m_1, m_2, m_3.

Substituind aceste rădăcini în (4), obţinem diametrii principali ai curbei (2). Cum însă (8) are o singură rădăcină reală, rezultă că *curba (2) are un singur diametru principal real.* Celelalte două valori ale lui m, ne dau diametrii conjugaţi izotropi.

Deci, *cubicele (2) sînt conice generalizate.*

c — *Conica înfăşurătoare a diametrilor.* In cazul cînd $|\bar{v}| \neq \frac{2C}{A}$, cubicele (2) — considerăm că A, B şi C pot fi variabili — nu au un punct principal, iar diametrii săi înfăşoară o conică ce caracterizează clasa curbelor (2) şi care se obţine eliminînd m între ecuaţia (4') şi derivata sa în raport cu m.

Se obţine astfel conica înfăşurătoare :

$$4(Ax + 3By + C)(3Ax + By + C + vA) - (2Bx + 2Ay + vB)^2 = 0 \qquad (9)$$

al cărui discriminant :

$$\delta = B^2 - 4\alpha\gamma = 12(A^2 + B^2) > 0 \qquad (10)$$

unde : $\alpha = 3A^2 - B^2$, $\beta = 8AB$ şi $\gamma = 3B^2 - A^2$.

De unde rezultă : *cubicele (2) sînt curbe a căror conică înfăşurată de diametrii lor este o hiperbolă.*

Observare. Transformînd dreptele $x = k$ şi $y = k$ se obţin cubicele :

$$x^3 + xy^2 + (v - k)x^2 - ky^2 = 0 \qquad (11)$$

şi

$$y^3 + yx^2 + (v - k)x^2 - ky^2 = 0 \qquad (12)$$

Cubica (11) admite un punct principal dacă $|\bar{v}| = 2k$, iar cubica (12) dacă $|\bar{v}| = \frac{2}{3}k$. Pentru valorile lui v, diferite de cele de mai înainte, conicele înfăşurate de diametri sînt de asemenea hiperbole. Astfel încît se poate spune :

Transformarea optică a unei drepte oarecare, ce nu trece prin origină, dă naştere unei cubice a cărei conică înfăşurată de diametrii conjugaţi unei direcţii m, este o hiperbolă.

BIBLIOGRAFIE:

1. *C. Ionescu-Bujor:* Asupra unei transformări optice — Bul. I.P.B. Tom. XXIII. 1961, pg. 31—51.

2. *M. Piazzolla Beloch:* Teoria diametrale delle curve algebriche piane. Istituto di Matematica dell'Università di Ferrara 1949.

3. *B. A. Rosina:* Sulla distribuzione dei diametri di una cubica algebrica. Annali della Università di Ferrara. Vol. VIII parte I. 1950.

Catedra de Geometrie Descriptivă şi aplicată
Institutul Politehnic Bucureşti

ОТНОСИТЕЛЬНО ДИАМЕТРОВ КЛАСА КУБИКОВ

(краткое содержание)

С диаметральной точки зрения изучаются кривые третьего порядка получающиеся превращением прямой соотношениями:

$$x_1 = x\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right)$$

Находится условие для того, чтобы полученные таким образом кривые имели один центр. Кривые без центра характеризуются тем, что сопряженные диаметры данного направления огибают гиперболу.

ON A CUBIC CURVE CLASS DIAMETERS

(Summary)

Diameters of third range curves obtained by a straight line transformation using the relation:

$$x_1 = x\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right)$$

are studied. The condition is fround for these curves to have a centre. The curves having no centre are characterized by the fact that diameters conjugated to a given direction envelop a hyperbole.

SUR LES DIAMÈTRES D'UNE CLASSE DE CUBIQUES

(Résumé)

On étudie du point de vue diamètral les courbes du troisième ordre obtenues en transformant une droite par les relations :

$$x_1 = x\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right)$$

On a trouvé la condition afin que les courbes ainsi obtenues aient un centre. Les courbes dépourvues de centre sont caractérisées par ce que leurs diamètres conjugués à une direction donnéee enveloppent une hyperbole.

ÜBER DIE DURCHMESSER EINER KUBIKKLASSE

(Zusammenfassung)

Es werden, vom Gesichtspunkte der Durchmesser, die durch Umwandlung einer Geraden erhaltenen Kurven dritter Ordnung, durch die Verhältnisse :

$$x_1 = x\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{vx}{x^2+y^2}\right)$$

studiert.

Es wird die Bedingung, dass die so erhaltenen Kurven ein Zentrum besitzen, gefunden.

Die Kurven ohne Zentrum sind dadurch charakterisiert, dass die zu einer gegebenen Richtung konjugierten Durchmesser eine Hyperbel umschliessen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ АРЕОЛАРНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н. Т. СТЕЛЬМАШУК

§ 1. *Основные содержание настоящей работы.*

Всегда обозначаем через $A^x(D)$ класс всех аналитических функций (вообще комплесных) от действительных переменных x, y, регулярных в некоторой односвязной области D, содержащей начало координат.

В § 2—3 решается задача:

имея систему вида:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= B_1\frac{\partial v}{\partial x} + B_2\frac{\partial v}{\partial y} + M_1 u + N_1 v + F_1\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3\frac{\partial v}{\partial x} + B_4\frac{\partial v}{\partial y} + M_2 u + N_2 v + F_2\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где B_K, M_i, N_i, F_i, (u, v) — известные (искомые) функции класса $A^x(D)$, $K = 1, \ldots, 4$; $i = 1, 2$, найти необходимое и достаточное условие, при котором существуют такие функции $p(x, y)$, $q(x, y) \in A^x(D)$, кто система (1) приводится к виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= a_1 f + b_1 \varphi + \Phi_1\\ \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= a_2 f + b_2 \varphi + \Phi_2\end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где f и φ суть линейные функции от u, v с коэффициентами класса $A^x(D)$; a_k, Φ_k, b_k, $(k = 1, 2)$ — известные функции того же класса, а $\frac{\partial f}{\partial p}$ и $\frac{\partial f}{\partial q}$ суть дифференциальные операторы, определяемые ра-

венствами :

$$\frac{\partial f}{\partial p} \equiv \frac{1}{\delta}(f_x q_y - f_y q_x) ; \frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{1}{\delta}(f_y p_x - f_x p_y) ; \delta \equiv \begin{vmatrix} p_x q_x \\ p_y q_y \end{vmatrix} \neq 0 \Bigg\} \quad (3)$$

$$\left(p_x \equiv \frac{\partial p}{\partial x} \text{ и т. п.} \right).$$

Эти операторы являются обобщениями так называемых ареоларных производных Д. Помпей (смотри [1] стр. 72).

Заметим, что функции f и φ могут оказаться комплексными и в случае действительных искомых и известных функций в системе [1].

В § 4—6 излагается метод решения системы (2) с помощью некоторых интегральных операторов.

Настоящая работа примыкает к известным исследованиям И. Н. Векуа [1] и Теодореску Н. [4].

2. *Преобразование системы* (2).

Система (2), в силу (3), может быть записана, очевидно, в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_1 f + Q_1 \varphi + E_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_4 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_2 f + Q_2 \varphi + E_2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} &1)\ T_1 \equiv a_1 p_x + a_2 q_x \ ; \ T_2 \equiv a_1 p_y + a_2 q_y \\ &2)\ E_1 \equiv \phi_1 p_x + \phi_2 q_x \ ; \ E_2 \equiv \phi_1 p_y + \phi_2 q_y \\ &3)\ \Theta_1 \equiv b_1 p_x + b_2 q_x \ ; \ \Theta_2 \equiv b_1 p_y + b_2 q_y \end{aligned}\right\} \quad (4^\circ)$$

$$\left.\begin{aligned} -A_1 &\equiv \frac{p_x p_y + q_x q_y}{\delta} \ ; \quad -A_1 = A_4 \\ A_2 &\equiv \frac{p_x^2 + q_x^2}{\delta} \ ; \quad -A_3 = \frac{p_y^2 + q_y^2}{\delta} \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Выразим p_x, p_y, q_x, q_y из (4′)

$$\left.\begin{aligned} p_x &= A_1 q_x + A_2 q_y \\ p_y &= A_3 q_x + A_4 q_y \end{aligned}\right\} \quad (4'')$$

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -(A_1 p_x + A_2 p_y) \\ q_y &= -(A_3 p_x + A_4 p_y) \end{aligned}\right\} \quad (4''')$$

Перепишем последнее в виде системы:

$$\left.\begin{aligned} -p_x + 0\cdot p_y + A_1 q_x + A_2 q_y &= 0 \\ A_1 p_x + A_2 p_y + q_x + 0\cdot q_y &= 0 \\ 0\cdot p_x - p_y + A_3 q_x + A_4 q_y &= 0 \\ A_3 p_x + A_4 p_y + 0\cdot q_x + q_y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для разрешимости системы (5) относительно p_x, p_y, q_x, q_y, $(\delta \neq 0)$ необходимо иметь

$$\Delta_0 \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & A_1 & A_2 \\ 0 & -1 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & 1 & 0 \\ A_3 & A_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

После вычисления определителя с учётом того, что $A_1 = -A_4$ получим:

$$\Delta_0 \equiv (1 + A_2 A_3 + A_1^2)^2 = 0, \text{ т. е. } \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1, \text{ откуда.}$$

Теорема 1.

Необходимое условие приведения системы (4) к системе (2) с теми же неизвестными функциями состоит в том, что

$$\left.\begin{aligned} &1)\ A_4 = -A_1 \\ &2)\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Пусть теперь дана система (4), в которой A_k, Θ_j, T_j, E_j, $(k = 1, \ldots 4,\ j = 1, 2)$ такие функции класса $A^x(D)$, что выполняется условие [7] в D. Поставим задачу исследовать возможность приведения такой системы (4) к виду (2).

Для решения этой задачи поступаем так: 1° Составим систему [4''] с неизвестными функциями p, q и находим функцию $q(x, y) \in A^x(D)$ как какое-нибудь *частное* решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_3 q_x + A_4 q_y) = \frac{\partial}{\partial y}(A_1 q_x + A_2 q_y), \tag{8}$$

которое возникло как условие интегрируемости системы [4''].

Рассмотрим подробнее уравнение (8).

Коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (7).

Рассмотрим случаи, которые могут встретиться при решении уравнения (8):

1° $A_3 \not\equiv 0$, тогда уравнение (8) приводится к виду

$$q_{xx} = f(x, y, q_x, q_y, q_{xy}, q_{yy}) \tag{9}$$

в некоторой области $D_0 < D$ (для определенности считаем, что точка $[0,0] \in D_0$); $f(x, y, q_x, q_y, q_{xy}, q_{yy}) \in A^x(D_0)$.

Уравнение [9] — это уравнение Коши Ковалевской. Зададим начальные условия

$$q_{(x=0)} = \varphi(y), \quad q_{x(x=0)} = \psi(y)$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — аналитические функции от y. Рассмотрим $\delta = p_x q_y - p_y q_x$. Подставляя вместо p_x и p_y правые части системы [4''] удовлетворяют условию (7), получим

$$\delta \equiv 2 A_1 q_x q_y + A_2 q_y^2 - A_3 q_x^2$$

$$\delta^0 \equiv 2 A_1^0 q_x^0 q_y^0 + A_2^0 (q_y^0)^2 - A_3^0 (q_x^0)^2$$

(верхний индекс 0 обозначает значение функции при $x = y = 0$). Поэтому можем считать (при подходящем подборе q_x^0, q_y^0, q^0) $\delta^0 \neq 0$, а потому найдется такая окрестностя начала координат, в которой $\delta \neq 0$. Только эту окрестность и будем в дальнейшем рассматриват как область изменения переменных (x, y).

2° $A_2 \not\equiv 0$, уравнение (8) приводится к виду

$$q_{yy} = f(x, y, q, q_x, q_y, q_{xy}, q_{xx})$$

в некоторой области $D_0 < D$.

3° $A_2 \equiv A_3 \equiv 0$, тогда на основании (7)

$$A_1 \cdot A_4 = 1, \quad \text{но} \quad A_1 = -A_4,$$

а посему из уравнения (8) следует: $q_{xy} = 0$.

Во втором и третьем случаях мы аналогично найдем такую функцию $q(x, y)$ и такую область, в которой $\delta \neq 0$.

Найдя q, найдем p из (4'').

Итак, найдены функции p и q, для которых $\delta \neq 0$.

Теперь находим a_k, b_k, ϕ_k, $(k = 1, 2)$ из (4°).

Системы (4°) определенные, так как $\delta \neq 0$.

Покажем теперь A_1, A_2, A_3 выражаются через p и q по формулам (4').

Для этого разрешим систему (4'') относительно q_x и q_y.

Используем условие (7) и получим (4'''). Из (4''') и (4'') будем иметь:

$$1° \quad p_x^2 + q_x^2 = A_2 \delta$$

$$2° \quad p_y^2 + q_y^2 = -A_3 \delta$$

$$3° \quad p_x p_y + q_x q_y = -A_1 \delta,$$

т. е. для A_1, A_2, A_3 получили выражение (4'), откуда.

Теорема 2.

Система (4) приводится к системе (2) всякий раз, когда выполняется условие (7).

3. *Об условии преобразования системы* (1) *в систему* (4).

Полагаем в данной системе (1)

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha f + \beta\varphi \\ v &= \alpha_1 f + \beta_1 \end{aligned}\right\} \quad (10), \qquad \left(\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in A^x(D); \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

тогда система (1) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= B_1\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + B_2\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \dots \\ \alpha \frac{\partial f}{\partial y} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= B_3\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + B_4\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \dots \end{aligned}\right\}$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned} a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} &= a' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots \\ c \frac{\partial f}{\partial x} + \partial \frac{\partial f}{\partial y} &= c' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \partial' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots \end{aligned}\right\}, \qquad (11)$$

где

$$a = \alpha - \alpha_1 B_1; \quad b = -\alpha_1 B_2; \quad c = -\alpha_1 B_3,$$
$$\partial = \alpha - \alpha_1 B_4; \quad a' = \beta_1 B_1 - \beta; \quad b' = \beta_1 B_2;$$
$$c' = \beta_1 B_3; \quad \partial' = \beta_1 B_4 - \beta.$$

Из системы (11) находим $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Опуская в правой части члены, не содержащие $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} & b \\ c' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \partial' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \partial \end{vmatrix} + \dots = \frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & a' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b' \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ c & c' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \partial' \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} + \dots = \frac{\Delta_3}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta_4}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots \end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & \partial \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b' & b \\ \partial' & \partial \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & \partial \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & b' \\ c & \partial' \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\Delta = \alpha^2 - \alpha\alpha_1(B_1 + B_4) + \alpha_1^2 \cdot D, \qquad (11'')$$

где

$$D = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1 = a'\partial - c'b = (\beta_1 B_1 - \beta)\ (\alpha - \alpha_1 B_4) + \alpha_1\beta_1 B_2 B_3$$

или $\Delta_1 = -\alpha\beta + \alpha\beta_1 B_1 + \beta\alpha_1 B_4 - \alpha_1\beta_1 D$, аналогично

$$\Delta_2 = \alpha\beta B_2 - \alpha_1\beta B_2 = B_2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$$

$$\Delta_3 = (\alpha - \alpha_1 B_1)\,\beta_1 B_3 + (\beta_1 B_1 - \beta)\,\alpha_1 B_3 = B_3(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$$

$$\Delta_4 = (\alpha - \alpha_1 B_1)\ (\beta_1 B_4 - \beta) + \alpha_1\beta_1 B_2 B_3.$$

Положим $\alpha_1 = 0$, $\alpha = 1$, тогда $\Delta = 1$; $\Delta_2 = B_2\beta_1$;

$$\Delta_3 = B_3 \cdot \beta_1, \quad \Delta_4 = -\beta + \beta_1 B_4; \quad \Delta_1 = \beta_1 B_1 - \beta.$$

Составим определитель $\overline{D}$ для системы (11′) аналогичный определителю $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$ для системы (4)

$$\overline{D} = \frac{1}{\Delta^2}(\Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3) = [\beta^2 - \beta\beta_1(B_1 + B_4) + \beta_1^2 D].$$

Подчиняем коэффициенты системы (11′) условию:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} = 0,$$

тогда $\beta = \beta_1\sigma$, где $\sigma = \dfrac{B_1 + B_4}{2}$; $\overline{D} = \beta_1^2(D - \sigma^2)$.

При условии $D - \sigma^2 \neq 0$, β_1 можно принять равным:

$$\frac{1}{\sqrt{D - \sigma^2}}, \text{ а отсюда } \overline{D} = 1.$$

Из всего сказанного вытекает теперь.

Теорема 3.

Система (1) приводится к системе (4) при условии (7) подстановкой

$$U = f + \beta\varphi\,; \quad v = \beta_1\varphi \tag{10'}$$

всякий раз, когда $D \neq \sigma^2$,

где $$\beta = \beta_1\sigma\,, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{D-\sigma^2}}\,.$$

Теорема 4.

В случае

$$D = \sigma^2\,, \tag{A}$$

система (1) не может быть приведения к системе вида (4), где

$$A_1 + A_4 = 0\,, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Доказательство (от противного).

Допустим, что система (1) может быть приведена подстановкой вида (10) к виду (4) в случае (A).

Тогда будем неовходимо иметь, повторяя преобразования в доказательстве теоремы 3 : 1° $\Delta \neq 0$. При условии $D = \sigma^2$ получим из (11″) $\Delta = (\alpha_1\sigma - \alpha)^2$.

Пришли к необходимому требованию

$$\alpha \neq \alpha_1\sigma\,. \tag{B}$$

2° Если система (1) приводится к системе (4) при условии (7), то необходимо $\bar{D} \neq 0$.

Из равенств для Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, равенства (A) и формулы (B) выводим, что $\bar{D} = \dfrac{(\beta - \beta_1\sigma)^2}{(\alpha - \alpha_1\sigma)^2}$, откуда должно необходимо выполнятся

$$\beta \neq \beta_1\sigma\,. \tag{C}$$

3° Кроме того необходимо иметь

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} = 0\,.$$

Откуда в силу равенств для Δ_1, Δ_4, равенства (A) и формулы (C) следует :

$$\alpha = \frac{\alpha_1(\beta\sigma - \beta_1\sigma^2)}{\beta - \beta_1\sigma} = \alpha_1\sigma\,. \tag{E}$$

Но равенство (E) несовместно с неравенством (B). Пришли к противоречию. Теорема доказана.

§ 5. *Некоторые интегральные операторы.*

Если имеем функции $f(x,y)$, $p(x,y)$, $q(x,y) \in A^x(D)$ и $\delta \neq 0$ [§ 1], тогда можно доказать *), что для каждой точки $A \in D$ [§ 4] найдется такой круг (A,f) (с центром в точке A и расположенный вместе со своей границей внутри области D), в котором функция $f(x,y)$ разлагается в ряд вида:

$$f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(p-a)^m (q-b)^n \tag{12}$$

($a_{mn} = \text{const}$ для фиксированной точки A, $a = p(A)$, $b = q(A)$) и этот ряд сходится абсолютно и равномерно в указанном круге, равно как и ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}[p(M)-a]^m [q(N)-b]^n, \tag{13}$$

где M, N — две независимые переменные точки круга (A,f).

Сумму последнего ряда обозначим $\tilde{f}(M,N)$ — это есть функция четырех независимых переменных: координат точек M, N.

Пусть $B(x,y)$ — любая точка круга (A,f). Полагаем

$$I(B,N) = \int_A^B \tilde{f}(M,N)\,dp(M);\ R_1 f \equiv R_1 f(x,y) = I(B,B); \tag{14}$$

$$I^x(N,B) = \int_A^B \tilde{f}(N,M)\,dq(M);\ R_2 f \equiv R_2 f(x,y) = I^x(B,B); \tag{15}$$

где интеграл берется по кусочно-гладкой кривой в круге (A,f).

Очевидна следующая ЛЕММА 1.

Имеем

$$\left.\begin{aligned} I(B,N) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \frac{[p(B-a]^{m+1}}{m+1} \cdot [q(N)-b]^n \\ I^x(N,B) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}[p(N)-a]^m \cdot \frac{[q(N)-b]^{n+1}}{n+1} \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Лемма 2.

В точке B имеем

$$\frac{\partial}{\partial p} I(B,N) = \tilde{f}(B,N);\ \frac{\partial}{\partial q} I^x(N,B) = \tilde{f}(N,B). \tag{17}$$

*) Доказательство дано В. А. Гусевым.

Доказательство.

Согласно (16) получим в точке B, обозначая её координаты через x, y:

$$\frac{\partial I(B,N)}{\partial x}=\tilde{f}\cdot\frac{\partial p}{\partial x};\quad \frac{\partial I(B,N)}{\partial y}=\tilde{f}\cdot\frac{\partial p}{\partial y},$$

откуда в силу (3) § 1

$$\frac{\partial I(B,N)}{\partial p}=\tilde{f},\ \text{где}\ \tilde{f}=\tilde{f}(B,N),\ p=p(B).$$

Аналогично для $I^x(N,B)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 5.

Общее решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial p}=f(x,y), \tag{18}$$

где p, $f\in A^x(D)$, имеет вид в любой точке $B\in(A,f)$:

$$U=I(B,B)+\Phi(q); \tag{19}$$

$\Phi(q)$ — любая моногенная по q функция в круге (A,f) (2). В равенстве (19) $q=q(B)$.

Доказательство. В силу леммы 2 получим в любой точке $B\in(A,f)$

$$\frac{\partial}{\partial p}[U-I(B,B)]=f_B-f_B=0.$$

Откуда $[U-I(B,B)]$ есть любая функция моногенная по q. *)
Теорема доказана.
Совершенно также доказывается.

Теорема 6.

Общее решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial q}=f(x,y) \tag{20}$$

*) Из самого определения моногенности в смысле В. С. Федорова [2] и из определения дифференциальных операторов [§ 1] сразу следует, что если для некоторой функции $f(x,y)\in C^1(D)$ имеем $\frac{\partial f}{\partial p}=0$ в D, тогда f —моногенная по q.

имеет вид в области (A, f)

$$U = I^x(B, B) + F(p), \tag{21}$$

где $F(p)$ — любая моногенная по p функция в области (A, f); в равенстве (21) $p = p(B)$.

Пусть f, Θ, $\Psi \in A^x(D)$. Пусть Γ — пересечение кругов (A, f), (A, Ψ), (A, Θ). Радиус круга Γ обозначим через τ.

Рассмотрим для всякой точки $B(x, y) \in \Gamma$ операторы

$$Rf \equiv R_1(\Theta R_2 \Psi f),$$

(кривая интеграции принадлежит кругу Γ);

$$R^n = R(R^{n-1} f), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (R^0 f \equiv f).$$

Теорема 7.

В круге Γ имеем

$$|R^n f| < H^n K \lambda^{2n} \top \cdot \frac{\tau^{2n}}{(2n)!}, \tag{22}$$

если в этом круге

$$|\widetilde{\Theta}| < H, \ |\widetilde{\Psi}| < K, \ |f| < \top, \ \left|\frac{dp}{d\varrho}\right| < \lambda, \ \left|\frac{dq}{d\varrho}\right|,$$

где H, K, λ, $\top$ — некоторые постоянные, $d\varrho$ — дифференциал длины дуги.

Доказательство ведём методом индукции.

Теорема верна для $n = 1$, так как

$$|Rf| \leqslant H \cdot K \cdot \top \cdot \lambda^2 \cdot \int_0^\tau d\varrho \int_0^\varrho dt < H \cdot \top \cdot \lambda^2 \frac{\tau^2}{2}$$

Допустим теперь формулу (22) верной для некоторого n и докажем её для $(n+1)$. Имеем

$$R^{n+1} f = R(R^n f) = R(\Phi), \quad (\Phi \equiv R^n f),$$

$$|R\Phi| < H K \lambda^2 K^n \lambda^{2n} \cdot \top \cdot \int_0^\tau \left[\int_0^\varrho \frac{t^{2n}}{(2n)!} dt \right] d\varrho =$$

$$= H^{n+1} \cdot K^{n+1} \cdot \lambda^{2(n+1)} \cdot \top \cdot \frac{\tau^{2(n+1)}}{[[2(n+1)]!}.$$

Теорема доказана. Следствие. В круге Γ: $R^n f \to 0$ при $n \to \infty$.

§ 6. *Решение систем линейных уравней в дифференциальных операторах.*

Теорема 8.

Если дана система

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial p} &= \Theta v\\ \frac{\partial v}{\partial q} &= \Psi U\end{aligned}\right\}, \tag{23}$$

где p, q, Θ, Ψ — известные функции $\in A^x(D)$, то в любой точке B круга Γ [§ 5] имеем

$$U = U_0 + \sum_1^{\infty} R^n U_0\,; \quad v = R_2(\Psi U) + F(p)\,, \tag{24}$$

где ряд сходится в Γ абсолютно и равномерно и

где $$U_0 \equiv R_1[\Theta F(p)] + \Phi(q), \tag{25}$$

а $F(p)$ и $\Phi(q)$ любые моногенные функции в указанном круге по p и q соответственно.

Доказательство. В силу теорем 5 и 6 получим

$$U = R_1(\Theta v) + \Phi(q)\,, \tag{26}$$

$$v = R_2(\Psi U) + F(p)\,. \tag{27}$$

Полагая $U_0 \equiv R_1[\Theta F(p)] + \Phi(q)$; $RU \equiv R_1(\Theta R_2 \Psi U)$, получим

$$U = U_0 + RU$$

откуда

$$U = U_0 + R(U_0 + RU) = U_0 + RU_0 + R^2 U$$

и, вообще,

$$U = U_0 + \sum_{K=1}^{n} R^K U_0 + R^{n+1} U\,. \tag{28}$$

В силу теоремы 10 и следствия из этой теоремы ряд (24) абсолютно и равномерно сходится в круге Γ.

Таким образом, каждое решение системы (23) необходимо имеет вид (24).

Наоборот, легко проверить, что равенства (24) определяют решение системы (23).

Теорема доказана.

Аналогично доказываетя.

Теорема 9.

Система

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial p}&=\Theta v\\ \frac{\partial v}{\partial p}&=\Psi U\end{aligned}\right\},\tag{29}$$

где p, q, Θ, Ψ — известные функции $\in A^x(D)$ имеет следующее решение в круге Γ:

$$U=\sum_{n=0}^{\infty} R^n U_0;\quad v=R_1(\Psi U)+F(q)\tag{30}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно в Γ и где

$$U_0\equiv F(q)R_1\Theta+\Phi(q);\quad F(q),\ \Phi(q)\ —\ \text{любые}$$

моногенные по q функции в круге Γ [§ 5].

Замечание. В случае неоднородной системы

$$\frac{\partial U}{\partial p}=\Theta v+F_1\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial q}=\Psi U+F_2$$

(p, q, Θ, Ψ, F_1, F_2 — известные функции $\in A^x(D)$) для нахождения общего решения находим общее решение однородной системы (23) и частное ($\overline{U}$, $\overline{v}$) неоднородной системы по легко проверяемой формуле:

$$\overline{U}=\sum_{n=0}^{\infty} R^n M_0\ ,\quad \overline{v}=R_2(\Psi\overline{U})+R_2F_2$$

$$M_0\equiv R_1\Theta R_2F_2+R_1F_1.$$

Теорема 10.

Система

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}&=a_1 f+b_1\varphi\\ \frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial \varphi}{\partial p}&=a_2 f+b_2\varphi\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

(a_K, b_K, p, q — известные функции, принадлежащие $A^x(D)$) приводится к системе вида

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial P}&=\Theta v\\ \frac{\partial v}{\partial Q}&=\Psi U\end{aligned}\right\},\tag{32}$$

где $P=p+\lambda q$, $Q=p-\lambda q$, $\lambda^2=-1$ *).

*) т. е. значения P, Q — элементы так называемой бикомплексной алгебры с базисом 1, i, λ, λi над полем действительных чисел.

Доказательство.

Пусть $W = f + \lambda\varphi$, тогда вводим операции:

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\ \frac{\partial W}{\partial P} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial p} - \lambda\frac{\partial W}{\partial q}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] \\ \text{b)}\ \frac{\partial W}{\partial Q} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial p} + \lambda\frac{\partial W}{\partial q}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Замечание.

Если $p = x$; $q = y$. то полагая $Z = x + iy$, $\bar{Z} = x - iy$, приходим в равенствах a (и b) к дифференциальным операторам

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - i\frac{\partial W}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

которыми пользовались румынские математики (Д. Помпей, Н. Теодореску, ...) в своих исследованиях об ареоларных производных, а также И. Н. Векуа [1].

Из равенств a (и b) получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial P} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) - \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] \\ \frac{\partial W}{\partial Q} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$(\bar{W} = f - \lambda\varphi).$$

Подставляя в (34) правые части (31), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial P} &= \frac{1}{2}\left[(a_1 - \lambda a_2) f + (b_1 - \lambda b_2)\varphi\right] \\ \frac{\partial W}{\partial Q} &= \frac{1}{2}\left[(a_1 + \lambda a_2) f + (b_1 + \lambda b_2)\varphi\right] \end{aligned}\right\}, \tag{35}$$

$$f = \frac{W + \bar{W}}{2},\quad \varphi = \lambda\frac{\bar{W} - W}{2}. \tag{36}$$

Подставляя правые части (36) в (35) получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial P} &= \frac{1}{4}\left[(a_1 - b_2) - \lambda(a_2 + b_1)\right] W + \frac{1}{4}\left[(a_1 + b_2) - \lambda(a_2 - b_1)\right]\bar{W} \\ \frac{\partial W}{\partial Q} &= \frac{1}{4}\left[(a_1 + b_2) + \lambda(a_2 - b_1)\right] W + \frac{1}{4}\left[(a_1 - b_2) + \lambda(a_2 + b_1)\right]\bar{W} \end{aligned}\right\}. \tag{37}$$

Перепишем систему [37] в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{W}}{\partial P} &= A_1 \overline{W} + B_1 W \\ \frac{\partial W}{\partial Q} &= A_2 \overline{W} + B_2 W\end{aligned}\right\}, \tag{38}$$

где

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{4}\left[(a_1 + b_2) - \lambda (a_2 - b_1)\right] \\ B_1 &= \frac{1}{4}\left[(a_1 - b_2) - \lambda (a_2 + b_1)\right] \\ A_2 &= \frac{1}{4}\left[(a_1 - b_2) + \lambda (a_2 + b_1)\right] \\ B_2 &= \frac{1}{4}\left[(a_1 + b_2) + \lambda (a_2 - b_1)\right]\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Построим такие функции μ, γ, что

$$\frac{\partial \gamma}{\partial P} = A_1, \quad \frac{\partial \mu}{\partial Q} = B_2 \quad \text{(см. теоремы 8 и 9, § 5).}$$

Делаем подстановку

$$\overline{W} = l^{\gamma} U \; ; \quad W = l^{\mu} \cdot v \, . \tag{40}$$

Тогда система (38) примет вид

$$\left.\begin{aligned}A_1 \overline{W} + l^{\gamma} \frac{\partial U}{\partial P} &= A_1 \overline{W} + B_1 l^{\mu} v \\ B_2 W + l^{\mu} \frac{\partial v}{\partial Q} &= B_2 W + A_2 l^{\gamma} U\end{aligned}\right\}.$$

Откуда, полагая $\Theta = B_1 l^{\mu - \gamma}$, $\Psi = A_2 l^{\gamma - \mu}$, имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial P} &= \Theta v \\ \frac{\partial v}{\partial Q} &= \Psi U\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Так как a_K, b_K, $(K = 1, 2)$, p, $q \in A^x(D)$ то и P, Q, Θ, $\Psi \in A^x(D)$. Теорема доказана.

Решение системы (41).

Система (41) решается совершенно аналогично системе (23) [§ 6], но только в формуле (24) в выражениях операторов R_1, R_2 и R букву p заменяем буквой P, а букву q — буквой Q и тогда эти операторы обозначаем соответственно R_1^x, R_2^x, R^x. Получим для системы (41) :

$$U_0 = R_1^x(\Theta F(P)) + \Phi(Q),$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} R^{xn} U_0; \quad v = R_2^x(\Psi U) + F(P), \quad (R^{x0} U_0 \equiv U_0).$$

Кафедра математики
Энергетический институт имени В. И. Ленина,
город Иваново

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Векуа И. Н.* — Обобщенные аналитические функции. Москва, 1959 г.

[2] *Фёдоров В. С.* — Основные свойства обобщенных моногенных функций.
Изв. высш. учебн. заведений.
Математика № 6 [7] стр. 257—265, (1958 г.).

[3] *Gr. C. Moisil.* Asupra unei generalizări a ideii de monogeneitate datorită lui V. S. Feodorov. Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R. Seria A, I, nr. 10, pp. 959—964, 1949.

[4] *Theodorescu N.*, Thèse, Paris, 1931.

ON THE APPLICATION OF A GENERALISATION OF AREOLAR DERIVATIVE AT THE TRANSFORMATION OF SOME LINEAR SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(Summary)

The author prouves that with the necessary and sufficient condition

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq \left(\frac{B_1 + B_4}{2}\right)^2,$$

the system (1) can be reduced by the canonical form (2) in which f and φ are linear functions of (u, v) with variable coefficients and

$$\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

are the differential operators (3) (B_k and p, q real or complex analytic functions of the variables x, y).

The author obtains the general solution of the system (2) with the differential operators (33) and some integral operators (§ 5—6).

SUR L'APPLICATION D'UNE GÉNÉRALISATION DES DÉRIVÉES ARÉOLAIRES AUX TRANSFORMATIONS DE QUELQUES SYSTÊMES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(Résumé)

L'auteur démontre que le système (I) à condition néséssaire et suffisante suivante :

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq \left(\frac{B_1 + B_4}{2}\right)^2$$

Peut être mis sous la forme canonique (2) ou f et φ sont les fonctions linéaires de (u, v) à coefficients variables et

$$\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

sont les opérateurs différentiels (3) (les B_K et p, q étant des fonctions analytiques réelles ou complexes des variables réelles x et y).

L'auteur obtient la solution générale du système (2) à l'aide des opérateurs différentiels (33) et de quelques opérateurs intégraux (§ 5—6).

UBER DER ANWENDUNG DER ALLGEMEINHEIT DER AREOLAREN ABLEITUNGEN AN DEN TRANSFORMATIONEN EINIGER SYSTEME VON LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

(Zusammenfassung)

Der Verfasser beweist dass die Bedingung

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq \left(\frac{B_1 + B_4}{2}\right)^2$$

notwendig und hinreichend ist, damit ein System (1) zu der Form (2) geschrieben wird. In dieser Form sind f und φ lineare Funktionen von (u, v) mit veränderlichen Koeffizienten und

$$\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

sind die Differential operatoren (3) (B_K und p. q reelle oder komplexe analytische Funktionen von reellen Veränderlichen x, y).

Der Verfasser gibt die allgemeine Lösung des Systems (2) mit den Differentialoperatoren (33) und mit einigen Integral operatoren (§ 5—6).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

ASUPRA SERIEI LAGRANGE *)

ION M. MIU

În cele ce urmează ne vom ocupa de seria Lagrange [1] folosită la aflarea rădăcinilor ecuațiilor care apar în diverse domenii ale științelor. Putem cita îndeosebi aplicarea acestei serii în astronomie, la rezolvarea problemei lui Kepler și la determinarea efemeridelor soarelui, planetelor etc.

Generalizarea ce o vom da, permite aplicarea seriei Lagrange generalizată într-un cîmp și mai larg de probleme printre care: aflarea unei funcții simetrice de rădăcinile unei ecuații, folosirea ei la metoda lui Lobacevski pentru rezolvarea ecuațiilor, la aplicarea metodei Côtes la integrarea aproximativă etc.

În prima parte vom extinde seria Lagrange pentru o ecuație în cazul cînd aceasta admite p rădăcini într-un domeniu închis C mărginit de un cerc.

În partea doua, vom considera extinsă seria pentru un sistem de ecuații analog ca mai sus și vom găsi ordonarea ei după parametrii sistemului.

Metoda de ordonare găsită, reduce considerabil calculele directe, care pentru un număr mare de ecuații ar fi foarte dificile.

§ 1. Generalizare în cazul unei ecuații

Fie $f(a)$ o funcție olomorfă în domeniul D și a un punct în acest domeniu, iar $f(a)$ diferit de zero.

În domeniul D considerăm un cerc C cu centrul în a de rază r și fie ecuația:

$$(z-a)^p - af(z) = 0 \tag{1}$$

unde p este întreg și pozitiv.

---

* Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din I.P.B. 7—8 aprilie 1962.

[1] *E. Goursat.* Cours d'analyse mathematique, deuxieme edition tome II, p. 121, p. 294.

Să presupunem că α este astfel încît inegalitatea:

$$|\alpha| < \left| \frac{(z-a)^p}{f(z)} \right| \tag{2}$$

este satisfăcută pentru toate valorile lui z pe cercul C. În acest caz, ecuația 1) admite p rădăcini $z_1, z_2 \ldots, z_p$ în interiorul cercului C, pe care le vom considera pentru moment distincte.

Este evident că pentru toate punctele de pe cerc trebuie să avem:

$$|\alpha| < \frac{r^p}{M(r)}$$

unde $M(r)$ este maximul modulului lui $f(z)$ pe cercul C.

Considerăm o funcție $F(z)$ oarecare, însă olomorfa în domeniul D și aplicînd teorema rezidurilor pentru integrala următoare după cercul C, obținem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)dz}{(z-a)^p - \alpha f(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{F(z_j)}{p(z-a)^{p-1} - \alpha f'(z_g)} \tag{3}$$

Pe de altă parte avem:

$$\frac{F(z)}{(z-a)^p - \alpha f(z)} = \frac{F(z)}{(z-a)^p} + \frac{\alpha F(z) f(z)}{(z-a)^{2p}} + \cdots + \frac{\alpha^n F(z) f^n(z)}{(z-a)^{np+p}} + \left[\frac{\alpha f(z)}{(z-a)^p}\right]^{n+1} \frac{F(z)}{(z-a)^p - \alpha f(z)}$$

Integrînd obținem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)\,dz}{(z-a)^p - \alpha f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)dz}{(z-a)^p} + \frac{\alpha}{2\pi i}\int_C \frac{F(z) f(z) dz}{(z-a)^{2p}} + \cdots + \frac{\alpha^n}{2\pi i}\int_C \frac{F(z) f^n(z)\,dz}{(z-a)^{np+p}} + R_{n+1} \tag{4}$$

unde:

$$R_{n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int \left[\frac{\alpha f(z)}{(z-a)^p}\right]^{n+1} \frac{F(z)\,dz}{(z-a)^p - \alpha f(z)}$$

Să arătăm că:

$$\lim_{n>\infty} R_{n+1} = 0$$

Vom lua pentru α o valoare astfel încît să fie satisfăcută inegalitatea:

$$|\alpha| < \frac{r^p}{M(r)}(1-\varepsilon)$$

unde ε este pozitiv, arbitrar de mic, însă fix.

Notăm cu L maximul lui $|F(z)|$ pe cercul C și avem

$$|(z-a)^p - \alpha f(z)| \geqslant |z-a|^p - |\alpha f(z)| \geqslant r^p - r^p(1-\varepsilon) = r^p \varepsilon$$

Ținînd seama de aceasta rezultă:

$$|R_{n+1}| < \frac{1}{2\pi}\int \left[\frac{r^p(1-\varepsilon)}{M}\cdot\frac{M}{r^p}\right]^{n+1} \frac{L}{r^p\varepsilon} r\,d\theta$$

$$|R_{n+1}| < \frac{(1-\varepsilon)^{n+1} L}{r^{p-1}\varepsilon}$$

Cum r, L, ε sînt cantități fixe pozitive, este evident că:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$$

și deci seria 4) este convergentă în interiorul cercului C.

Dacă ținem cont de formula lui Cauchy și de derivatele funcției deduse din ea, egalitatea 4) devine:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)\,dz}{(z-a)^p - \alpha f(z)} = \frac{1}{(p-1)!} F^{(p-1)}(a) +$$

$$\frac{\alpha}{(2p-1)!}(F(a)f(a))^{(2p-1)} + \cdots + \frac{\alpha^n}{(np+p-1)!}(F(a)f^n(a))^{(np+p-1)} + \cdots \quad (5)$$

Aci și în cele ce urmează se notează pentru prescurtare:

$$[\Phi(z)]^{(n)}_{z=a} = (\Phi(a))^{(n)}$$

Ținînd cont de 3) și 5) rezultă:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{F(z_j)}{p(z_j-a)^{p-1} - \alpha f'(z_j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(np+p-1)!}(F(a)f^n(a))^{(np+p-1)} \quad (6)$$

Aici facem:

$$F(z) = [p(z-a)^{p-1} - \alpha f'(z)]\,\varphi(z)$$

unde $\varphi(z)$ este de asemenea o funcție oarecare, dar olomorfă în cercul C.

Avem:

$$\{[p(z-a)^{p-1} - \alpha f'(z)]\,\varphi(z)\,\psi(z)\}^{(m)}_{z=a} = [p(z-a)^{p-1}\varphi(z)\,\psi(z) -$$

$$- \alpha(f'(z)\varphi(z)\,\psi(z))^{(m)}_{z=a}.$$

$$[p(z-a)^{p-1}\varphi(z)\,\psi(z)]^{(m)}_{z=a} = p!\,C_m^{p-1}\,\varphi(a)\,\psi(a))^{(m-p+1)}, \qquad m \geqslant p-1$$

Ținînd seama de acestea în 6), obținem:

$$\sum_{j=1}^{p}\varphi(z_j)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n p!}{(np+p-1)!}C_{np+p-1}^{p-1}(\varphi(a)f^n(a))^{(np)}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{(np+p-1)!}(\varphi(a)f'(a)f^n(a))^{(np+p-1)}$$

sau:

$$\sum_{j=1}^{p}\varphi(z_j)=p\,\varphi(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n p!}{(np+p-1)!}C_{np+p-1}^{p-1}[n\,\varphi(a)f'(a)f^{n-1}(a)+$$

$$+\varphi'(a)f^n(a)]^{(np-1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(np-1)!}[\varphi(a)f'(a)f^{n-1}(a)]^{(np-1)}$$

Cum avem:

$$\frac{np!}{(np+p-1)!}C_{np+p-1}^{p-1}=\frac{1}{(np-1)!}$$

seria precedentă devine:

$$\sum_{j=1}^{p}\varphi(z_j)=p\,\varphi(a)+p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(np)!}(\varphi'(a)f^n(a))^{(np-1)} \tag{7}$$

Această serie care se prezintă sub o formă remarcabilă, generalizează seria lui Lagrange și ea dă valoarea sumei $\sum_{j=1}^{p}\varphi(z_j)$, cele p rădăcini z_j fiind cuprinse în cercul C, iar funcția φ fiind arbitrară, cu singura condiție ca să fie olomorfă în cercul C și pe el.

Facem observația că formula 7) este valabilă și pentru cazul cînd avem rădăcini multiple.

În cazul cînd ecuația 1) are și rădăcini multiple se procedează astfel:

Fie z_r o rădăcină multiplă de ordinul s. Se consideră rădăcinile distincte $z_r(h_1), z_r(h_2), \cdots z_r(h_r)$ și pentru ecuația avînd rădăcini distincte se aplică seria 7) în care se face $h_1\to 0$, $h_2\to 0\cdots h_r\to 0$.

APLICAȚII

1° Seria Lagrange.
Făcînd în 7) $p=1$ obținem seria lui Lagrange:

$$\varphi(z_1)=\varphi(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(\varphi'(a)f^n(a))^{(n-1)} \tag{8}$$

2° Seria Lagrange particulară
Facem în 7) $p=1$, $\varphi(z)=z$ și obținem:

$$z_1=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(f^n(a))^{(n-1)} \tag{9}$$

3° Pentru $\varphi(z)=z$ în cazul general formula 7) devine:

$$\sum_{j=1}^{p}z_j=pa+p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(np)!}(f^n(a))^{(np-1)} \tag{10}$$

4° În 7) facem:
$\varphi(z)=(z-a)^{sp}$, unde s este ca și p număr natural.
Ținînd cont că:

$$[\varphi'(z)\psi(z)]^{(m)}_{z=a}=(sp)!\,C_m^{sp-1}(\psi(a))^{(m-sp+1)}$$

găsim:

$$\sum_{j=1}^{p}(z_j-a)^{sp}=ps\alpha^s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(s+n)(np)!}(f^{s+n}(a))^{((s+n)p-1)} \tag{11}$$

5° În 7) facem $\varphi(z)=f^q(z)$, unde q este număr natural și obținem:

$$\sum_{j=1}^{p}f^q(z_j)=pq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(q+n)(np)!}(f^{q+n}(a))^{(np)} \tag{12}$$

6° Să considerăm ecuația

$$(z-a)^p-\alpha(z-b)^q=0$$

unde p și q sînt numere naturale, iar $|\alpha|<\left|\frac{(z-a)^p}{(z-b)^q}\right|$ și să-i aplicăm formula 10). Avem:

$$\sum_{j=1}^{p}(z_j-a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}C_{nq}^{np-1}\nu^{nq-np+1} \tag{13}$$

unde $\nu=a-b$

Dacă $b=a-1$, seria precedentă devine:

$$\sum_{j=1}^{p}(z_j-a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}C_{nq}^{np-1} \tag{14}$$

Termenii din membrii II ai formulelor 13) și 14) pentru care $qn>np-1$ se vor lua egali cu zero.

7° În 7) facem $\varphi(z)=z^q$ unde q este număr natural și obținem suma puterilor egale ale rădăcinilor ecuației. Avem:

$$\sum_{j=1}^{p}z_j^q=pa^q+pq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(np)!}(a^{q-1}f^n(a))^{(np-1)} \tag{15}$$

În cazul ecuației:

$$z^m+A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}+\cdots+A_{m-1}z+A_m=0\,, \tag{16}$$

scriind-o:

$$z^m+A_1\left(z^{m-1}+\frac{A_2}{A_1}z^{m2}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{A_1}z+\frac{A_m}{A_1}\right)=0$$

dacă se ia $\alpha=-A_1$, condiția lui Rouché este satisfăcută pe un cerc cu centrul în origină cu o rază suficient de mare încît toate rădăciniie ecuației 16) să fie în interiorul lui.

Rezultă că putem aplica formula 15) pentru aflarea sumei puterilor egale ale rădăcinilor ecuației 16).

(Suma puterilor egale ale unei ecuații 16) este găsită prin altă cale[1]) și folosită de A. N. Krîlov la calculul aproximativ al integralelor definite cu metoda Côtes).

Notăm:

$$f(z)=z^{m-1}+\frac{A_2}{A_1}z^{m-2}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{A_1}z+\frac{A_m}{A_1}$$

și seria 15) pentru ecuația 16) devine formula:

$$\sum_{j=1}^{m}z_j^q=mq\sum_{n=1}^{q}\frac{(-A_1)^n}{(nm)!}[z^{q-1}f_{(z)}^n]_{z=0}^{(nm-1)} \tag{17}$$

Ținînd cont că

$$[z^{q-1}f^n]^{(nm-1)}=(q-1)!\,C_{nm-1}^{q-1}(f_{(z)}^n)_{z=0}^{(nm-q)}$$

formula 17) devine:

$$\sum_{j=1}^{m}z_j^q=q\sum_{n=1}^{q}\frac{(-A_1)^n}{n(mn-q)!}[f_{(z)}^n]_{z=0}^{(mn-q)} \tag{18}$$

În această formulă termenii pentru valorile lui n care corespund la $mn-q<0$ se vor considera nuli.

---

[1] *A. M. Krilov.* Lecții de calcule prin aproximație. Traducere în editura Tehnică 1957, pag. 78.

§ 2. Cazul unui sistem de ecuații

Fie sistemul de k ecuații :

$$P_j(z_1, z_2, \dots z_k) = (z_j - a_j)^{p_j} - \alpha_j f_j(z_1, z_2, \dots z_k) = 0\,, \quad j = 1, 2, \dots k \tag{1}$$

unde $z_1, z_2, \dots z_k$ sînt variabile complexe, iar funcțiile f_j sînt olomorfe în vecinătatea punctelor $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2 \dots z_k = a_k$ fiecare figurate în cîte un plan complex. În acest caz se pot determina razele $R_1, R_2, \dots R_k$ ale cercurilor $C_1, C_2 \dots C_k$ cu centrele respectiv în $a_1, a_2, \dots a_k$ astfel ca funcțiile $f_1, f_2, \dots f_k$ să fie olomorfe în aceste cercuri și pe contururile lor.

Fie $F(z_1, z_2, \dots z_k)$ o funcție de asemenea olomorfă în domeniile închise, determinate de cercurile de mai sus. Presupunem că pe circomferințele acestor cercuri sînt îndeplinite condițiile lui Rouché

$$|\alpha_j| < \frac{|(z_j - a_j)^{p_j}|}{|f_j|} \tag{2}$$

Rezultă că sistemul 1) admite în general $p = p_1\ p_2 \dots p_k$ sisteme de soluții situate în interiorul cercurilor $C_1, C_2, \dots C_k$.

Fie aceste sisteme $3_{1r}, 3_{2r}, \dots 3_{kr})$, unde $r = 1, 2, \dots p$.

Presupunem ca determinatul funcțional :

$$\Delta = \frac{\mathfrak{D}(P_1, P_2, \dots P_k)}{\mathfrak{D}(z_1, z_2, \dots z_k)} \tag{3}$$

pentru $z_1 = 3_{1r}$, $z_2 = 3_{2r}, \dots z_k = 3_{kr}$ cu $r = 1, 2, \dots p$, este diferit de zero

Avem :

$$\int_{C_1} dz_1 \int_{C_2} dz_2 \dots \int_{C_k} \frac{F(z_1, z_2 \dots z_k)}{P_1 P_2 \dots P_k} dz_k =$$

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{F(3_{1r}, 3_{2r}, \dots 3_{kr})}{\left[\dfrac{\mathfrak{D}(P_1, P_2, \dots P_k)}{\mathfrak{D}(z_1, z_2, \dots z_k)}\right]_{z_1 = 3_{1r},\ z_2 = 3_{2r}, \dots z_k = 3_{kr}}}$$

$$\sum_{n_1, n_2, \dots n_k = 0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{k} \alpha_i^{n_i}}{\prod_{i=1}^{k} (n_i p_i + p_i - 1)!} \left[F f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_k^{n_k} \right]^{\substack{(n_1 p_1 + p_1 - 1) \\ (n_2 p_2 + p_2 - 1) \\ \dots \\ (n_k p_k + p_k - 1)}} \tag{4}$$

unde pentru prescurtare întrebuințăm simbolul $\left[\quad\right]^{\substack{(m_1) \\ (m) \\ \dots \\ (m_k)}}$,

care arată că expresia din paranteza [ ], se derivează în raport cu $z_1, z_2, \ldots z_k$ respectiv de $m_1, m_2, \ldots m_k$ ori, iar după derivare se face în rezlltatul obținut $z_1 = a_1, z_2 = a_2, \ldots z_k = a_k$.

În 4) luăm funcția F astfel :

$$F(z_1, z_2, \ldots z_k) = \frac{\mathfrak{D}(P_1, P_2, \ldots P_k)}{\mathfrak{D}(z_1, z_2, \ldots z_k)} \Phi(z_1, z_2, \ldots z_k) ,$$

unde Φ este o funcție olomorfă în domeniile închise mărginite de cercurile $C_1, C_2, \ldots C_k$.

Seria 4) devine :

$$\sum_{r=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r}, \ldots 3_{kr}) =$$

$$= \sum_{n_1, n_2 \ldots n_k = 0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{k} \alpha_i^{n_i}}{\prod_{1}^{k} (n_i p_i + p_i - 1)!} \left[\Delta \Phi f_1^{n_1} f_2^{n_2} \ldots f_k^{n_k} \right]^{\substack{(n_1 p_1 + p_1 - 1) \\ (n_2 p_2 + p_2 - 1) \\ \cdots\cdots \\ (n_k p_k + p_k - 1)}} \tag{5}$$

Ne propunem să ordonăm seria 5) după puterile lui $\alpha_i, (i = 1, 2, 3 \ldots k)$, adică s-o punem sub forma

$$\sum_{r=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r}, \ldots 3_{kr}) = \sum_{n_1, n_2 \ldots n_k = 0}^{\infty} \frac{\prod_{1}^{k} \alpha_i^{n_i}}{\prod_{1}^{k} (n_i p_i)!} \left[Q_k \right]^{\substack{(n_1 p_1 - 1) \\ (n_2 p_2 - 1) \\ \cdots\cdots \\ (n_k p_k - 1)}} \tag{6}$$

unde în Q_k nu mai intră deloc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$.

În seria 6) urmează să determinăm expresiile Q_k

Să stabilim mai întîi următoarele :

I. În expresia lui Q_k nu pot intra derivate ale lui f_j în raport cu z_j

Pentru ecuațiile $P_1, P_2, \ldots P_{k-1}$, termenul general al seriei 5) este :

$$\prod_{1}^{k-1} (n_i p_i - 1)! \left[\Phi \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,k-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{k-1,1} & A_{k-1,2} & \cdots & A_{k-1,k-1} \end{vmatrix} \right]^{\substack{(\nu) \\ (\nu) \\ \cdot \\ (\nu)_{k-1}}}$$

unde :

$$A_{ij} = -\alpha_i f'_{iz_j} f_i^{n_i - 1} \text{ pentru } i \neq j$$

$$A_{il} = p_i (z_i - a_i)^{p_i - 1} f_i^{n_i - 1} - \alpha_i f'_{iz_i} f_i^{n_i - 1}$$

şi

$$\nu_j = n_j p_j - 1 .$$

Notăm determinantul cu Δ_{k-1}.

Termenul general pentru ecuaţiile $P_1, P_2, \ldots P_k$ este :

$$\frac{\prod_1^k \alpha_i^{n_i - 1}}{\prod_1^k (n_i p_i - 1)!} \left[\begin{array}{ccc|c} & & A_{1k} & \\ & \Delta_{k-1} & A_{2k} & \Phi \\ & & \cdot & \\ A_{k1} & A_{k2} \cdots & A_{kk} & \end{array} \right]^{\begin{matrix}(\nu_1)\\(\nu_2)\\\cdot\\\cdot\\(\nu_k)\end{matrix}}$$

Dezvoltăm determinantul după ultima linie. Se observă că nu intervin derivatele lui f_k în raport cu z_k decît din ultimul element al liniei considerate.

Rezultă că aceste derivate nu pot proveni decît din :

$$\frac{\prod_1^k \alpha_i^{n_i - 1}}{\prod_1^k (n_i p_2 - 1)!} \left[\left(p_k (z_k - a_k)^{p_k - 1} f_k^{n_k - 1} - \alpha_k f'_{kzk} f_k^{n_k - 1} \right) \Delta_{k-1} \Phi \right]^{\begin{matrix}(\nu_1)\\(\nu_2)\\\cdot\\(\nu_k)\end{matrix}} \tag{8}$$

Vom urmări să arătăm că derivatele lui f_k în raport cu z_k dispar din termenul general al seriei 6).

Să găsim termenul care să conţină pe $\alpha_k^{n_k} \prod_1^{k-1} \alpha_i^{n_i - 1}$. Acesta provine din termenul 8) şi din cel următor, obţinut din acesta sporind pe n_k cu o unitate, adică din :

$$\frac{\prod_1^k \alpha_i^{n_i - 1}}{\prod_1^k (n_i p_i - 1)!} \left[\left(p_k (z_k - a_k)^{p_k - 1} f_k^{n_k - 1} - \alpha_k f'_{kz_k} f_k^{n_k - 1} \right) \Delta_{k-1} \Phi \right]^{\begin{matrix}(\nu_1)\\(\nu)\\\cdot\\(\nu_k)\end{matrix}} +$$

$$+ \frac{\alpha_k^{n_k} \prod_1^{k-1} \alpha_i^{n_i - 1}}{(n_k p_k + p_k - 1)! \prod_1^{k-1} (n_i p_i - 1)!} \left[\left(p_k (z_k - a_k)^{p_k - 1} f_k^{n_k} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \alpha_k f'_{kz_k} f_k^{n_k} \right) \Delta_{k-1} \Phi \right]^{\begin{matrix}(\nu_1)\\(\nu)\\\cdot\\(\nu_{k-1})\\(n_k p_k + p_k - 1)\end{matrix}} \tag{9}$$

Din prima parte a expresiei 9) reținem numai termenul, care conține pe $\alpha_k^{n_k}$, iar din ultima parte reținem primul termen pe care-l derivăm de $n_k p_k + p_k - 1$ ori în raport cu z_k și avem:

$$-\frac{\alpha_k^{n_k}\prod_1^{k-1}\alpha_i^{n_i-1}}{\prod_1^{k}(n_i p_i-1)!}\left[f'_{kz_k}f_k^{n_k-1}\Delta_{k-1}\Phi\right]_{(\nu_k)}^{(\nu_1)(\nu_2)\dots} +$$

$$+\frac{\alpha_k^{n_k}\prod_1^{k-1}\alpha_i^{n_i-1}}{(n_k p_k+p_k-1)!\prod_1^{k-1}(n_i p_i-1)!}\left[p_k!\,C^{p_k-1}_{n_k p_k+p_k-1}f_k^{n_k}\Delta_{k-1}\Phi\right]_{(n_k p_k)}^{(\nu_1)(\nu_2)\dots(\nu_{k-1})}$$

Ultima paranteză o mai derivăm odată în raport cu z_k și obținem:

$$-\frac{\alpha_k^{n_k}\prod_1^{k-1}\alpha_i^{n_i-1}}{\prod_1^{k}(n_i p_i-1)!}\left[f'_{kz_k}f_k^{n_k-1}\Delta_{k-1}\Phi\right]_{(\nu_k)}^{(\nu_1)(\nu_2)\dots} +$$

$$+\frac{p_k\alpha_k^{n_k-1}\prod_1^{k-1}\alpha_i^{n_i-1}}{(n_k p_k)!\prod_1^{k-1}(n_i p_i-1)!}\left[f_k^{n_k}(\Delta_{k-1}\Phi)'_{z_k}+n_k f'_{kz_k}f_k^{n_k-1}\Delta_{k-1}\Phi\right]_{(\nu_k)}^{(\nu_1)(\nu_2)\dots}$$

Aceasta devine:

$$\frac{p_k\alpha_k^{n_k}\prod_1^{k-1}\alpha_i^{n_i-1}}{(n_k p_k)!\prod_1^{k-1}(n_i p_i-1)!}\left[(\Phi\Delta_{k-1})'_{z_k}f_k^{n_k}\right]_{(\nu_k)}^{(\nu_1)(\nu_2)\dots} \qquad (10)$$

Expresia 10) arată că în seria Lagrange 6) în Q_k nu intră derivatele funcției f_j în raport cu z_j.

Facem remarca că în expresia 10) nu intră toți termenii în $\alpha_k^{n_k}$ ci numai aceia care conțin pe f_k nederivat.

II. Să arătăm că toți termenii din Q_k conțin fiecare cel puțin o funcție f_j nederivată.

Pentru prescurtare notăm:

$$f_i^{n_i-1}=\bar{\varphi}_i\,,\quad f_j^{n_j}=\varphi_j\,,\quad \frac{f'_{jz_i}f_j^{n_j-1}}{(n_j p_j-1)!}=\psi_{ji}\,,\quad \frac{p_j(z_j-a_j)^{p_j-1}f_j^{n_j-1}}{(n_j p_j-1)!}=g_j \qquad (11)$$

Atunci termenul general 7) al seriei 5) se scrie

$$\prod_1^k \alpha_i^{n_i-1} \begin{vmatrix} -g_1+\alpha_1\psi_{11} & \alpha_1\psi_{12} & \alpha_1\psi_{13}\cdots & \alpha_1\psi_{1k} \\ \alpha_2\psi_{21} & -g_2+\alpha_2\psi_{22} & \alpha_2\psi_{23}\cdots & \alpha_2\psi_{2k} \\ \alpha_3\psi_{31} & \alpha_3\psi_{32} & -g_3+\alpha_3\psi_{33}\cdots & \alpha_3\psi_{3k} \\ \cdot & \cdot & \cdot\quad\cdots & \cdot \\ \alpha_k\psi_{k1} & \alpha_k\psi_{k2} & \alpha_k\psi_{k3}\cdots & -g_k+\alpha_k\psi_{kk} \end{vmatrix} \Phi \begin{matrix}(\nu_1)\\(\nu_2)\\ \cdot \\ (\nu_k)\end{matrix} \tag{12}$$

Un termen oarecare din paranteză care rezultă din dezvoltarea determinantului — cu excepția eventual a semnului, este:

$$\prod_1^{k-s} \alpha_{m_i}^{n_{m_i}} \prod_{r=1}^{s} \alpha_{\theta_r}^{n_{\theta_r}-1} \left[g_{\theta_1} g_{\theta_2} \cdots g_{\theta_s} \psi_{m_1 l_1} \psi_{m_2 l_2} \cdots \psi_{m_{k-s} l_{k-s}} \Phi \right]^{(\nu_1)(\nu_2)\cdots(\nu_k)} \tag{13}$$

În seria 6) dacă exponentul lui α este η_l coeficientul acestuia din paranteză se derivează de $n_i p_i - 1$ ori în raport cu z_i

În expresia 13) avem:

Exponenții lui $\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \cdots \alpha_{m_{k-s}}$ sînt respectiv $n_{m1}, n_{m2}, \cdots n_{m_{k-s}}$, iar ordinile de derivare sînt respectiv $n_{m1} p_{m1} - 1 = \nu_{m1}$, $n_{m2} p_{m2} - 1 = \nu_{m2}, \cdots, n_{m_{k-s}} p_{m_{k-s}} - 1 = \nu_{m_{k-s}}$ în raport respectiv cu $z_{m1}, z_{m2}, \cdots z_{m_{k-s}}$.

Exponenții lui $\alpha_{\theta_1}, \alpha_{\theta_2}, \cdots \alpha_{\theta_s}$ sînt însă respectiv $n_{\theta_1}-1, n_{\theta_2}-1, \cdots n_{\theta_s}-1$. Derivatele sînt de ordinul $n_\theta p_\theta - 1$ față de z_θ și ele trebuie să fie de ordinul $(n_\theta - 1) p_\theta - 1 = n_\theta p_\theta - p_\theta - 1$.

Vom deriva în 13) întîi de $p_{\theta_1}-1, p_{\theta_2}-1, \cdots p_{\theta_s}-1$ ori, respectiv în raport cu $z_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \cdots z_{\theta_s}$ și făcînd abstracție de un factor constant obținem

$$\prod_1^{k-s} \alpha_{m_i}^{n_{m_i}} \prod_{r=1}^{s} \alpha_{\theta_r}^{n_{\theta_r}-1} \left[\bar{\varphi}_{\theta_1} \bar{\varphi}_{\theta_2} \cdots \bar{\varphi}_{\theta_s} \varphi_{m_1 l_1} \varphi_{m_2 l_2} \cdots \psi_{m_{k-s} l_{k-s}} \Phi \right]^{\substack{(\nu_{m1})\\(\nu_{m2})\\ \cdot \\ (\nu_{m_{k-s}})\\ (n_{\theta_1} p_{\theta_1} - p_{\theta_1})\\ \cdots\cdots\cdots\\ (n_{\theta_s} p_{\theta_s} - p_{\theta_s})}} \tag{14}$$

Mai derivăm în 14) cîte odată respectiv în raport cu $z_{\theta_1}, z_{\theta_2}, \cdots z_{\theta_s}$ și se constată următoarele:

Din derivare pot apărea în paranteză termeni ce conțin neapărat o funcție φ nederivată.

Deci ori ce termen ce conține derivate de ordinul II sau mai mare va conține cel puțin ca factor o funcție φ nederivată.

Din 14) se mai constată următoarele:

Dacă într-un termen apare Φ derivată, în acel termen apare o funcție φ nederivată.

Derivatele lui Φ de orice ordin ar fi, nu pot apărea în termeni decît cel mult efectuate odată în raport, cu o variabilă.

Rezultă că în cele ce urmează trebuie să considerăm numai termenii ce conțin derivate de ordinul I.

Se observă, că în termenii ce conțin numai derivate de ordinul I, nu vor fi mai mulți factori derivați în raport cu aceiași variabilă și nici mai mulți factori proveniți din aceiași funcție derivată în raport cu variabile diferite.

Deci trebuie să găsim coeficientul lui $\prod_1^k \alpha_i^{n_i}$, care conține termeni în care intră ca factori numai derivate de ordinul I și apoi să arătăm că acest coeficient este nul.

Din cele precedente rezultă că termenii acestui coeficient se pot afla din determinanți de forma 12) astfel:

— În determinantul ce rezultă din 12) facem termenii după diagonala principală nuli.

— În același determinant, înlocuim pe n_j, n_l respectiv cu n_j+1, n_l+1, apoi derivăm funcția ce provine din $-g_j$ de p_j-1 ori în raport cu z_j și odată în raport cu z_l, iar funcția ce provine din $-g_l$ o derivăm de p_l-1 ori în raport cu z_l și odată în raport cu z_l.

Produsul funcțiilor derivate astfel, se înmulțește cu determinantul lor minor, în care se egalează cu zero toate elementele după diagonala principală.

— Procedăm mai departe în mod analog și regula generală este următoarea: Înlocuim în determinantul 12) pe $n_{\theta_1}, n_{\theta_2}, \cdots n_{\theta_s}$ respectiv cu $n_{\theta_1}+1, n_{\theta_2}+1, \cdots n_{\theta_s}+1$, apoi derivăm funcțiile obținute din elementele $-g$, după diagonala principală, situate pe liniile $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_s$, respectiv de $p_{\theta_1}-1, p_{\theta_2}-1, \cdots p_{\theta_s}-1$ ori, în raport respectiv cu $z_{\theta_1}, z_{\theta_2} \cdots$ $\cdots z_{\theta_s}$. Pe fiecare din funcțiile derivate astfel, le derivăm încă odată în raport cu $z_{\theta_1}, z_{\theta_2}, \cdots z_{\theta_s}$, însă astfel ca variabila în raport cu care se derivează, să fie diferită de aceia în raport cu care s-a făcut derivarea anterior.

Facem produsul elementelor derivate prin determinantul lor minor — de ordinul $k-\theta_s$ — în care s-au considerat zero elementele după diagonala principală.

Modul expus mai sus pentru calculul coeficientului lui $\prod_1^k \alpha_i^{n_i}$ care conține termeni în care intră ca factori numai derivate de ordinul I, ne conduce la aflarea acestor termeni cu ajutorul determinantului:

$$\boxed{k} = \begin{vmatrix} \psi_{1l_1} & \psi_{12} & \psi_{13} & \cdots & \psi_{1,k-1} & \psi_{1k} \\ \psi_{21} & -\psi_{2l_2} & \psi_{23} & \cdots & \psi_{2,k-1} & \psi_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -\psi_{k-1,1} & \psi_{k-1,2} & \psi_{k-1,3} & \cdots & -\psi_{k-1,l_{k-1}} & \psi_{k-1,k} \\ \psi_{k1} & \psi_{k2} & \psi_{k3} & \cdots & \psi_{k,k-1} & -\psi_{kl_k} \end{vmatrix} \tag{15}$$

Acest determinant l-am format avînd în vedere că în determinantul 12) se derivează de $p-1$ ori numai elementele după diagonala principală și că ψ_{ii} trebuie considerat zero, deoarece aceste derivate nu există în termenii lui Q_k. Termenii lui Q_k care conțin numai derivate de ordinul întîi se obțin din mai mulți determinanți, însă ei se pot obține și dintr-un singur determinant $|k|$ combinîndu-se elementele diagonalei principale.

Acești termeni, în baza concluziilor precedente, sînt:

$$\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\left[\sum'\left(\sum\psi_{s_1r_1}\psi_{s_2r_2}\cdots\psi_{s_qr_q}\right)|k|^0_{(s_1,\,s_2\ldots s_q)}\right] \tag{16}$$

unde:

— suma $\sum\psi_{s_1r_1}\psi_{s_2r_2}\cdots\psi_{s_qr_q}$ se obține lăsîndu-se ficși indicii $s_1, s_2, \ldots s_q$ și făcîndu-se permutările indicilor $r_1, r_2, \ldots r_q$. Indicii $r_1, r_2, \ldots r_q$ se găsesc toți printre indicii $s_1, s_2, \ldots s_q$. În termenii aflați astfel, se vor considera $\psi_{s_jr_i}=0$, dacă $s_j=r_i$

— suma $\sum'$ se obține considerîndu-se indicii $s_1, s_2, \ldots s_q$ luați în combinări cîte q din indicii $1, 2, \ldots k$.

— simbolul $|k|^0_{(s_1s_2\ldots s_q)}$ reprezintă determinantul ce se obține din $|k|$, în care se taie liniile și coloanele $s_1, s_2 \ldots s_q$ apoi în determinantul rămas elementele diagonalei principale se înlocuiesc cu zero.

— În cazul $q=0$ avem determinantul $|k|^0$, ce se obține din $|k|$ înlocuind elementele după diagonala principală cu zero.

În cazul $q=k$ determinantul $|k|^0_{(s_1s_2\ldots s_k)}$ se consideră 1.

Justificarea expresiei (16) cu semnificația simboalelor respective rezultă, după cum s-a văzut, din faptul că termenii în care intră derivate numai de ordinul întîi se obțin derivînd numai elementele din diagonala principală a determinantului 15), care se înmulțesc între ele și apoi se înmultesc cu determinantul ce rezultă tăind liniile și coloanele elementelor derivate. Celelalte elemente nederivate ale diagonalei principale se înlocuiesc cu zero.

— Să arătăm că suma (16) este nulă.

Demonstrația o vom face prin inducție completă.

Din expresia (16) considerăm termenii care conțin ca factori două elemente oarecare, de exemplu ψ_{k1}, $\psi_{k-1,k}$. Prin faptul că s-au luat funcțiile ψ_{k1}, $\psi_{k-1,k}$ nu se micșorează generalitatea, deoarece neconsiderîndu-se decît derivate de ordinul întîi într-un produs intră ca factori o funcție oarecare ψ_k derivată și o altă funcție derivată în raport cu z_k.

Urmează să demonstrăm că coeficientul lui $\psi_{k1}\psi_{k-1,k}$ este nul. Toți termenii aceștia se obțin din 15) și sînt dați de expresia:

$$(-1)^{k+1}\psi_{k1}\psi_{k-1,k}\sum_{q=0}^{k-2}(-1)^q\left[\sum'\left(\sum\psi_{s_1r_1}\psi_{s_2r_2}\cdots\psi_{s_qr_q}\right)|k|^{\binom{k-1,k}{1,k}}_{(s_1s_2\ldots s_q)}\right]+$$

$$+\psi_{k1}\psi_{k-1,k}\sum_{q=0}^{k-2}(-1)^q\left[\sum'\left(\sum\psi_{s_1r_1}\psi_{s_2r_2}\cdots\psi_{s_qr_q}\right)|k-2|^0_{(s_1,\,s_2\ldots s_q)}\right], \tag{17}$$

unde :

— suma Σ' se obține considerînd indicii $s_1, s_2 \ldots s_q$ luați în combinări cîte q din indicii $1, 2, \ldots k-2$

— în indicii $s_1, s_2 \ldots s_q$ nu intră k și $k-1$

— indicii $r_1, r_2 \ldots r_q$ sînt permutări din indicii $s_1, s_2 \ldots s_q$ iar termenii care conțin pe $r=1$ se consideră nuli, deoarece s-a văzut că într-un termen nu intră două funcții derivate în raport cu aceeași variabilă.

— se ia $\psi_{s_i r_i} = 0$ dacă $s_i = r_i$

— determinantul $\boxed{k}^{\binom{k.\,k-1}{1.\,k}}_{(s_1 s_2 \ldots s_q)}$ se obține din $\boxed{k}$ suprimînd liniile k, $k-1$, $s_1, s_2 \ldots s_q$ și coloanele 1, k, $s_1, s_2 \ldots s_q$, iar elementele după diagonala principală a determinantului rămas se consideră zero.

— determinantul $\boxed{k-2}^{0}_{(s_1 s_2 \ldots s_q)}$ se obține din determinantul $\boxed{k-2}$ suprimînd liniile și coloanele $s_1, s_2, \ldots s_q$, iar elementele din diagonala principală se iau zero.

Expresia 17) s-a format din determinantul 15) astfel : $\psi_{k1}\psi_{k-1,k}$ din prima parte a ei s-a obținut din elementele $\psi_{k1}, \psi_{k-1,k}$, iar $\psi_{k1}\psi_{k-1,k}$ din a doua parte, a rezultat din ultimele două elemente ale diagonalei principale, cînd acestea sînt ψ_{k1} și $\psi_{k-1,k}$.

Considerăm acum determinantul $\boxed{k-1}$ corespunzător a $k-1$ ecuații $P_1, P_2, \ldots P_{k-1}$. Termenii ce conțin ca factor pe $\psi_{k-1,1}$ în acest caz sînt dați de expresia :

$$(-1)^k \psi_{k-1,1} \sum_{q=0}^{k-2} (-1)^q \left[\Sigma' \left(\sum \psi_{s_1 r_1} \psi_{s_2 r_2} \cdots \psi_{s_q r_q} \right) \boxed{k-1}^{\binom{k-1}{1}}_{(s_1, s_2, \ldots s_q)} \right] -$$

$$- \psi_{k-1,1} \sum_{q=0}^{k-2} (-1)^q \left[\Sigma' \left(\sum \psi_{s_1 r_1} \psi_{s_2 r_2} \cdots \psi_{s_q r_q} \right) \boxed{k-2}^{0}_{(s_1, s_2, \ldots s_q)} \right] \qquad (18)$$

Indicii și sumele se consideră ca în expresia 17).

Cum expresia 18) este nulă prin ipoteză, rezultă că și 17) este nulă.

Deci suma termenilor ce conțin ca factor pe $\psi_{k1}\psi_{jk}$ este nulă pentru toate valorile lui j și din aceasta se trage concluzia că suma termenilor ce admit ca factor pe ψ_{k1} este nulă.

Rezultă de asemenea că suma termenilor ce admit factor pe ψ_{ki} este nulă pentru toate valorile lui i.

Am demonstrat deci că suma tuturor termenilor ce au factori numai derivate de ordinul I, este nulă.

III. Să deducem acum modul de formare a seriei Lagrange generalizate pentru k ecuații, cînd această serie se cunoaște pentru $k-1$ ecuații.

Ținînd cont de notațiile 11) scriem formula 10) astfel :

$$\frac{p_k \alpha_k^{n_k} \prod_1^{k-1} \alpha_i^{n_i - 1}}{(n_k p_k)! \prod_1^{k-1} (n_i p_i - 1)!} \left[(\Phi \Delta_{k-1})'_{z_k} \varphi_k \right]^{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_k \end{pmatrix}} \qquad (10')$$

Să găsim coeficientul lui φ_k.

Pornind de la această formulă, derivăm după formula lui Leibnitz de ν_1 ori în raport cu z_1, de ν_2 ori în raport cu $z_2, \ldots$, de ν_{k-1} ori în raport cu z_{k-1} și obținem o sumă unde în primul termen intră φ_k nederivat, iar în restul termenilor intră derivatele lui φ_k. Nu ne interesează decît termenul care conține pe φ_k care este:

$$\frac{p_k \alpha_k^{n_k} \prod_1^{k-1} \alpha_i^{n_i-1}}{(n_k p_k)! \prod_1^{k-1} (n_i p_i - 1)} \left\{ \left[\left[\Phi \Delta_{k-1} \begin{vmatrix} (\nu_1) \\ (\nu_2) \\ \vdots \\ (\nu_{k-1}) \end{vmatrix} \right]'_{z_k} \varphi_k \right\}^{(\nu_k)} =$$

$$= \frac{p_k \alpha_k^{n_k}}{(n_k p_k)!} \left\{ \left[\frac{\prod_1^{k-1} \alpha_i^{n_i-1}}{\prod_1^{k-1} (n_i p_i - 1)!} \left| \Phi \Delta_{k-1} \begin{vmatrix} (\nu_1) \\ (\nu_2) \\ \vdots \\ (\nu_{k-1}) \end{vmatrix} \right]'_{z_k} \varphi_k \right\}^{(\nu_k)}.$$

Ținînd cont că:

$$\left[\frac{\prod_1^{k-1} \alpha_i^{n_i-1}}{\prod_1^{k-1} (n_i p_i - 1)!} \Phi \Delta_{k-1} \begin{vmatrix} (\nu_1) \\ (\nu_2) \\ \vdots \\ (\nu_{k-1}) \end{vmatrix} \right]$$

este termenul care se referă la ecuațiile $P_1, P_2, \ldots P_{k-1}$, putem scrie după 6) termenul general referitor la acestea astfel:

$$\frac{\prod_1^{k-1} \alpha_i^{n_i}}{\prod_1^{k-1} (n_i p_i)!} \left[(Q_{k-1}^k)'_{z_k} \varphi_k \right] \begin{vmatrix} (\nu_1) \\ (\nu_2) \\ \vdots \\ (\nu_{k-1}) \end{vmatrix},$$

Deci termenul seriei Lagrange generalizate care conține pe φ_k este:

$$\frac{p_k \prod_1^{k} \alpha_i^{n_i}}{\prod_1^{k} (n_i p_i)!} \left[(Q_{k-1}^k)'_{z_k} \varphi_k \right] \begin{vmatrix} (\nu_1) \\ (\nu_2) \\ \vdots \\ (\nu_k) \end{vmatrix} \qquad (20)$$

S-a notat cu Q_{k-1}^k termenii din dezvoltarea în serie a k—1 ecuații, obținute din ecuațiile $P_1, P_2, \ldots P_{k-1}$, P_k din care s-a scos ecuația P_k În același mod notăm Q_{k-1}^s termenii din dezvoltarea în serie a k—1 ecuații obținute din 1) din care s-a scos ecuația P_s.

Rezultatele obținute permit aflarea seriei generalizate 6) a lui Lagrange, adică a expresiilor Q_k.

Formula 20) dă coeficienții funcțiilor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ Astfel pentru φ_s formula devine:

$$\frac{p_k \prod_1^k \alpha_i^{n_i}}{\prod_1^k (n_i p_i)!} \left[(Q_{k-1}^s)'_{z_s} \varphi_s \right]^{\begin{matrix}(\nu_1)\\(\nu_2)\\\vdots\\(\nu_k)\end{matrix}} \tag{21}$$

Pentru aflarea lui Q_k procedăm astfel:

Aflăm coeficientul lui φ_1 făcînd în 21) $s=1$. Termenul în φ_1 este:

$$\delta_{k-1}^0 = p_1 (Q_{k-1}^1)'_{z_1} \varphi_1$$

Pentru a afla suma incompletă a termenilor, care conțin pe φ_2 (deoarece o parte din termenii cu φ_2 intră în δ_{k-1}^0) facem în 21), $s=2$ și calculăm expresia: $p_2 (Q_{k-1}^2)'_{z_2} \varphi_2$ din care reținem numai termenii care nu conțin pe φ_1. Suma acestor termeni o notăm cu δ_{k-1}^1. Acest procedeu se justifică, deoarece termenii care conțin pe φ_1 au intrat toți în δ_{k-1}^0. Pentru aflarea sumei incomplete a termenilor care conțin pe φ_3 facem în 21) $s=3$ și calculăm expresia $p_3 (Q_{k-1}^3)'_{z_3} \varphi_3$ din care reținem numai suma termenilor ce nu conțin pe φ_1 și φ_2.

Această sumă o notăm cu δ_{k-1}^2. Am lăsat la oparte termenii ce conțin pe φ_1 și φ_2, deoarece aceștia au intrat în δ_{k-1}^0 și δ_{k-1}^1. etc. În modul acesta calculăm suma incompletă a termenilor care conțin pe φ_j astfel: se face în 21) $s=j$ și se calculează expresia $p_j (Q_{k-1}^j)'_{z_j} \varphi_j$ din care se reține numai suma termenilor ce nu conțin pe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{j-1}$ Această sumă se notează cu δ_{k-1}^{j-1} În cele din urmă aflăm suma incompletă ce conține pe φ_k făcînd în 21) $s=k$ se calculează expresia $p_k (Q_{k-1}^k)'_{z_k} \varphi_k$ din care se reține suma termenilor ce nu conțin pe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{k-1}$.

Această sumă se notează cu δ_{k-1}^{k-1}.

Seria Lagrange generalizată pentru sistemul 1) este:

$$\sum_{r=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r}, \cdots 3_{kr}) = \sum_{n_1, n_2, \ldots n_k = 0}^{\infty} \cdot \frac{\prod_1^k \alpha_i^{n_i}}{\prod_1^k (n_i p_i)!} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \delta_{k-1}^j \right]^{\begin{matrix}(n_1 p_1 - 1)\\(n_2 p_2 - 1)\\\cdots\\(n_k p_k - 1)\end{matrix}} \tag{22}$$

Se constată că seria 22) pentru k ecuații se obține direct din seria pentru $k-1$ ecuații.

Toți termenii δ_{k-1}^j se obțin din expresia $p_{j+1} (Q_{k-1}^{j+1})'_{z_{j+1}} \varphi_{j+1}$ prin permutări circulare ținîndu-se cont de observațiile specificate mai sus.

Metoda indicată simplifică considerabil dezvoltarea în serie Lagrange, deorece numărul termenilor ce ar trebui calculați direct, crește foarte mult cu numărul ecuațiilor.

Astfel pentru cazul a 3 ecuații calculul direct ar duce la cercetarea a cca. 180 termeni, pe cînd prin metoda dată nu trebuie să se calculeze decît 3 termeni.

APLICAȚII

În cele ce urmează, vom arăta modul de aplicare a celor precedente, precum și diferite utilizări practice ale seriei Lagrange generalizate.

În toate cazurile vom presupune condițiile 2) ale lui Rouché, îndeplinite.

1° Seria lui Lagrange pentru o ecuație P_1.

$$\sum_{r=1}^{p_1} \Phi(3_{1r}) = p_1 \Phi(a_1) + p_1 \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1}}{(n_1 p_1)!} [\Phi' f_1]^{(n_1 p_1 - 1)}, \qquad (23)$$

găsită deja anterior.

2° Seria lui Lagrange pentru un sistem de 2 ecuații P_1 și P_2.

Avem

$$Q_1^1 = p_2 \Phi'_{z_2} \varphi_2$$

$$\delta_1^0 = p_1 p_2 [\Phi'_{z_2} \varphi_2]'_{z_1} \varphi_1 = p_1 p_2 (\Phi''_{z_1 z_2} \varphi_2 + \Phi'_{z_2} \varphi'_{2 z_1}) \varphi_1$$

$$Q_1^2 = p_1 \Phi'_{z_1} \varphi_1$$

Din termenii $p_1 p_2 [\Phi'_{z_1} \varphi_1]'_{z_2} \varphi_2$ obținem

$$\delta_1^1 = p_1 p_2 \Phi'_{z_1} \varphi'_{1 z_2} \varphi_2$$

Astfel seria Lagrange este:

$$\sum_{r=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r}) = p_1 p_2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}}{(n_1 p_1)! (n_2 p_2)!} [(\Phi''_{z_1 z_2} \varphi_2 + \Phi'_{z_2} \varphi'_{2 z_1}) \varphi_1 +$$

$$+ \Phi'_{z_1} \varphi'_{1 z_2} \varphi_2]^{(n_1 p_1 - 1)}_{(n_2 p_2 - 1)} \qquad (24)$$

În această serie nu se vor face operațiile de derivare pentru $n_2 = 0$ când ordinul derivatei apare negativ.

Exemplu $n_1 = 0$ dă $n_1 p_1 - 1 = -1$ și paranteza devine:

$$(\varphi_1 = f_1^{n_1} = 1)$$

$$[\Phi''_{z_1 z_2} f_2^{n_2} + \Phi'_{z_2} \varphi_{2 z_1}]^{(-1)}_{(n_2 p_2 - 1)} = [(\Phi'_{z_2} \varphi_2)^{(1)}_{z_1}]^{(-1)}_{(n_2 p_2 - 1)} = [\Phi'_{z_2} \varphi_2]^{(n_2 p_2 - 1)}$$

deoarece ordinul de derivare în raport cu z_1 este $1 - 1 = 0$.

Presupunem $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, avem $\varphi_1 = f_1^{n_1} = 1$, $\varphi_2 = f_2^{n_2} = 1$ și rezultă:

$$[(\Phi''_{z_1 z_2} \varphi_2 + \Phi'_{z_2} \varphi'_{2 z_1}) \varphi_1 + \Phi'_{z_1} \varphi'_{1 z_2} \varphi_2]^{(-1)}_{(-1)} = [\Phi^{(1)}_{z_1 z_2}]^{(-1)}_{(-1)} = \Phi$$

3° Seria Lagrange pentru 3 ecuații:

$$P_1(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - a_1)^{p_1} - \alpha_1 f_1(z_1, z_2, z_3)$$
$$P_2(z_1, z_2, z_3) = (z_2 - a_2)^{p_2} - \alpha_2 f_2(z_1, z_2, z_3)$$
$$P_3(z_1, z_2, z_3) = (z_3 - a_3)^{p_3} - \alpha_3 f_3(z_1, z_2, z_3)$$

Avem:

$$Q_2^1 = p_2 p_3 \left[(\Phi''_{z_2 z_3} \varphi_3 + \Phi'_{z_3} \varphi'_{3z_2}) \varphi_2 + \Phi'_{z_3} \varphi'_{2z_3} \varphi_3 \right]$$
$$\delta_2^0 = p_1 p_2 p_3 \left[\Phi''_{z_2 z_3} \varphi_2 \varphi_3 + \Phi'_{z_3} \varphi'_{3z_2} \varphi_2 + \Phi'_{z_3} \varphi'_{2z_3} \varphi_2 \right]'_{z_1} \varphi_1$$

Valorile lui δ_2^1 și δ_2^2 se obțin prin permutări circulare din δ_2^0 excluzîndu-se din fiecare, termenii aflați în precedentii:

$$\delta_2^1 = p_1 p_2 p_3 \left[\Phi''_{z_1 z_3} \varphi'_{1z_2} \varphi_3 + \Phi'_{z_3} \varphi'_{3z_1} \varphi'_{1z_2} + \Phi''_{z_1 z_2} \varphi'_{1z_3} \varphi_3 + \right.$$
$$\left. + \Phi'_{z_1} \varphi''_{1z_3 z_2} \varphi_3 + \Phi'_{z_1} \varphi'_{1z_3} \varphi'_{3z_2} \right] \varphi_2$$
$$\delta_2^2 = p_1 p_2 p_3 \left[\Phi'_{z_2} \varphi'_{2z_1} \varphi'_{1z_3} + \Phi'_{z_1} \varphi'_{1z_2} \varphi'_{2z_3} \right] \varphi_3$$

Seria Lagrange este:

$$\sum_{r=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r}, 3_{3r}) = p_1 p_2 p_3 \sum_{n_1, n_2, n_3 = 0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \alpha_3^{n_3}}{(n_1 p_1)!\,(n_2 p_2)!\,(n_3 p_3)!} \left[(\Phi''_{z_2 z_3} \varphi_2 \varphi_3 + \right.$$
$$+ \Phi'_{z_3} \varphi'_{3z_2} \varphi_2 + \Phi'_{z_2} \varphi'_{2z_3} \varphi_3)'_{z_1} \varphi_1 + \left[\Phi''_{z_1 z_3} \varphi'_{1z_2} \varphi_3 + \Phi'_{z_3} \varphi'_{3z_1} \varphi'_{1z_2} + \right.$$
$$\left. \left. + (\Phi'_{z_1} \varphi'_{1z_3} \varphi_3)'_{z_2} \right] \varphi_2 + (\Phi'_{z_2} \varphi'_{2z_1} \varphi'_{1z_3} + \Phi'_{z_1} \varphi'_{1z_2} \varphi'_{2z_3}) \varphi_3 \right]^{\substack{(n_1 p_1 - 1) \\ (n_2 p_2 - 1) \\ (n_3 p_3 - 1)}} \tag{25}$$

4° Să cercetăm seria Lagrange în cazul particular cînd în sistemul 1) avem

$$f_1 = f_1(z_1), \qquad f_2 = f_2(z_2), \cdots f_k = f_k(z_k)$$

Seria este:

$$\sum_{r=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r}, \cdots 3_{kr}) = p_1 p_2 \cdots p_k \sum_{n_1, n_2, \ldots n_k = 0}^{\infty} \frac{\prod_1^k \alpha_i^{n_i}}{\prod_1^k (n_i p_i)!} \left[\Phi^{(k)}_{z_1 z_2 \ldots z_k} f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots f_1^{n_k} \right]^{\substack{(n_1 p_1 - 1) \\ (n_2 p_2 - 1) \\ \cdots\cdots \\ (n_k p_k - 1)}} \tag{26}$$

5° Generalizarea seriei Lagrange permite să găsim funcții simetrice de rădăcinile unei ecuații. Metoda se pretează la multe aplicații și rezolvă

pe această cale diverse probleme de funcții simetrice (Waring și Cauchy au dat metode pentru ecuații algebrice).

Pentru a găsi o funcție de rădăcinile unei ecuații se face în sistemul 1):

$$a_1 = a_2 = \cdots a_k = a\,, \qquad p_1 = p_2 = \cdots p_k = m\,, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_k = \alpha$$

$$f_1 = f(z_1)\,,\ f_2 = f(z_2)\,,\ \cdots f_k = f(z_k)$$

și seria devine:

$$\sum_{r=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r}, \cdots 3_{kr}) = m^k \sum_{n_1, n_2, \ldots n_k = 0}^{\infty} \frac{\alpha^{\Sigma n_i}}{\prod_1^k (n_i m)!} \left[\Phi^{(k)}_{z_1 z_2 \ldots z_k} f^{n_1}(z_1) f^{n_2}(z_2) \cdots \right.$$

$$\left. \cdots f(z_k) \right]_{\begin{matrix}(n_1 m-1)\\(n_2 m-1)\\ \cdots\\(n_k m-1)\end{matrix}} \tag{27}$$

Să facem o aplicație pentru ecuația:

$$z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_{m-1} z + A_m = 0 \tag{28}$$

Punem: $\alpha_1 = \alpha_2 = -A_1$

$$f_1(z_1) = z_1^{m-1} + \frac{A_2}{A_1} z_1^{m-2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{A_1} z_1 + \frac{A_m}{A_1}$$

$$f_2(z_2) = z_2^{m-1} + \frac{A_2}{A_1} z_2^{m-2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{A_1} z_2 + \frac{A_m}{A_1}$$

Fie $3_1, 3_2, \cdots 3_m$ rădăcinile ecuației 28), ne propunem să găsim:

$$\Sigma\, 3_j^q\, 3_i^q$$

În 27) facem $\Phi = z_1^q z_2^q$ și obținem:

$$\sum 3_j^q 3_i^q = q^2 m^2 \sum_{n_1, n_2 = 0}^{q} \frac{(-A_1)^{n_1+n_2}}{(n_1 m)!\,(n_2 m)!} \left[z_1^{q-1} z_2^{q-1} f^{n_1}(z_1) f^{n_2}(z_2) \right]_{\begin{matrix}(n_1 m-1)\\(n_2 m-1)\end{matrix}}^{z_1 = z_2 = 0} \tag{29}$$

Cum avem:

$$\left[z_1^{q-1} z_2^{q-1} f^{n_1}(z_1) f^{n_2}(z_2) \right]_{\begin{matrix}(n_1 m-1)\\(n_2 m-1)\end{matrix}}^{z_1 = z_2 = 0} =$$

$$= [(q-1)!]^2\, C^{q-1}_{n_1 m-1}\, C^{q-1}_{n_2 m-1} \left[f^{n_1}(z_1) \right]_{z_1=0}^{(n_1 m-q)} \left[f^{n_2}(z_2) \right]_{z_2=0}^{(n_2 m-q)}$$

rezultă :

$$\sum 3_i^p 3_i^q = q^2 \sum_{n_1, n_2=0}^{q} \frac{(-A_1)^{n_1+n_2}}{(n_1 m-q)!\,(n_2 m-q)!\,n_1 m_1} \left[f_1^{n_1}(z_1)\, f_2^{n_2}(z_2) \right]^{\binom{n_1 m-q}{n_2 m-q}} \qquad (30)$$

Termenii în care $n_1 m - q < 0$ sau $n_2 m - q < 0$ se vor considera zero.

În 30) se cuprinde și suma $\sum_1^m z_i^{2q}$, care se poate calcula ușor, apoi se scade din 30) și rezultatul se împarte cu 2.

6° Cele precedente se pot aplica la metoda lui Lobacevski pentru rezolvarea unei ecuații numerice și permit extinderea acestei metode.

Astfel pe această cale se pot calcula direct sumele :

$$-B_1 = z_1^q + z_2^q + \cdots + z_m^q$$

$$(-1)^2 B_2 = (z_1 z_2)^q + (z_1 z_3)^q + \cdots + (z_{m-1} z_m)^q$$

. . . . . .

$$(-1)^m B_m = (z_1 z_2 \cdots z_m)^q$$

Metoda permite să luăm pentru q un număr suficient de mare care poate fi și diferit de 2^s.

Institutul Politehnic București
Catedra de matematică

О РЯДЕ ЛАГРАНЖА

(Крамкое содержание)

Работа состоит из двух частей.

1) В первой части рассматривается случай одного уравнения и обобщается ряд, если внутри окружности уравнение имеет p корней.

2) Во второй части рассматривается система уравнений

$$(z_i - a_i)^{p_i} = \alpha_i f_i (z_1, z_2 \ldots z_k) = 0; \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

где функции f_i голоморфны в окрестностях точек $a_1, a_2, \ldots a_k$, из плоскостей $z_1, z_2, \ldots z_k$, а параметры α_i удовлетворяют условиям Руше.

Вопрос обощается аналогичным образом как в первой части и ставится вопрос о нахождении ряда Лагранжа упорядоченного по $\pi \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \ldots \alpha_k^{n_k}$. После установления некоторых своиств ряда Лагранжа этот ряд находится.

ON LAGRANGE SERIES

(Summary)

The paper contains two parts :

1. The first part deals with the case of an equation and the generalization of the series is done whenproots are possible inside the cercle.

2. In the second part a system of equation is considered :

$$(x_i - a_i)^{p_i} - \alpha_i f_i(z_1, z_2 \ldots z_k) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

Where the functions f_i are holomorphe next to the points $a_1, a_2 \ldots, a_k$ from the planes $z_1, z_2 \ldots, z_k$ and the parameters α_i controle Rouché's conditions.

As in the first part the problem is held for a general one and the problem of finding out the Lagrange series, ranged after $\Pi\alpha_1^n + \alpha_2^{n_2} \ldots \alpha_k^{n_k}$ arises.

After estableshing some of the Lagrange series properties this series is found out.

SUR LA SÉRIE LAGRANGE

(Résumé)

L'ouvrage contient deux parties :

a) Dans la première partie on généralise la série Lagrange pour une seule équation. On considère l'équation :

$$(z - a)^p - \alpha f(z) = 0,$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe dans un domain $\overline{D}$ borné par un cercle C étant une fonction holomorphe dans un domain D borné par un cercle C avec le centre a, tandis que sur ce cercle on a

$$|\alpha| < \left| \frac{(z - a)^p}{f(z)} \right|$$

Si on considère une fonction $\varphi_{(z)}$ holomorphe en $\overline{D}$, on trouve la série Lagrange généralisé.

b) Dans la deuxième partie on considère la série généralisée, d'une manière analogue, pour une système d'équations et on trouve son dévélopement d'après les parametres du système.

On considère le système

$$P_j(z_1, z_2, \ldots z_k) = (z_j - a_j)^{p_j} - \alpha_j f_j(z_1, z_2 \ldots z_j) = 0 \quad {\scriptstyle j = 1, 2, \ldots k}$$

ou z_i sont des variables complexes, f_j des fonctions holomorphes dans les domaines fermés, bornés par les cercles C_j avec les centres a_j situés chaqunne dans un plan complexe. Sur les circomférances de ces cercles sont satisfaites les conditions de Rouché.

$$|\alpha_j| < \frac{|(z_j - a_j)^{p_j}|}{|f_j|}$$

Le système admet des racines $3_{1r}, 3_{2r}, \ldots 3_{kr}$, $(r = 1, 2, \ldots p)$ situés à l'intérieur de cercles C_j en nombre $p = p_1 p_2 \ldots p_k$ Si on considère une

fonctions holomorphe $\Phi(z_1, z_2 \ldots z_k)$ dans les domains C_j on trouve que dans l'intérieur de ces cercles on a

$$\sum_{n=1}^{p} \Phi(3_{1r}, 3_{2r} \ldots 3_{kr}) = \sum_{n_1, n_2 \ldots n_k = 0}^{\infty} \frac{\prod_1^k \alpha_i^{ni}}{\prod_1^k (n_i p_i)!} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \delta_{k-1}^{j} \right]^{\substack{(n_1 p_1 - 1) \\ (n_2 p_2 - 1) \\ \cdots \\ (n_k p_k - 1)}}$$

Le simbole $[\ ]^{m_i}$ montre que l'expression située en paranthèse se dérive en raport avec z_i, m_i fois et après ces opérations on fait $z_i = a_i$ Dans la paranthèse δ_{k-1}^{j} se trouve de la manière suivante:

On note par Q_s^{k-1} les termes du développement en série Lagrange des $k-1$ équations qui s'obtient de $P_1, P_2, \ldots P_k$ en éliminant P_s

On considère la formule:

$$\frac{p_k \prod_1^k \alpha_i^{ni}}{\prod_1^k (n_i p_i)!} \left[(Q_{k-1}^{s})'_{zs} \varphi_s \right]^{\substack{(n_1 p_1 - 1) \\ (n_2 p - 1) \\ \cdots \\ (n_k p_k - 1)}}$$

On trouve le coeficient du φ_1, en faisant en 3), $s=1$ et le terme qui contient $f_1^{n_1} = \varphi_1$ est: $\delta_{k-1}^{0} = p_1 (Q_{k-1}^{1})'_{z_1} \varphi_1$

On fait en 3), $s=2$ et on calcule l'expression $p_2 (Q_{k-1}^{2})'_{z_2} \varphi_2$ de laquelle on retient seulment les termes qui ne contienent pas φ_1. Le coeficient de $f_2^{n_2} = \varphi_2$ ainsi obtenu est noté δ_{k-1}^{1}

En général on fait en 3), $s=j$ et on calcule l'expression $p_j (Q_{k-1}^{j})'_{zj} \varphi_j$ de laquelle on retient seulment la somme des termes qui ne contienent pas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{j-1}$ qui est noté δ_{k-1}^{j-1}

Dans le travail sont doné 13 applications.

ÜBER DIE LAGRANGE-SCHE REIHE

(Zusammenfassung)

a) In ersten Teill wird die Lagrange-sche Reihe für eine Gleichung veralgemeinert.

b) Im zweiten Teil wird ein Gleichungssystem, in welchen die Rouché — bedingungen erfülten sind, betrachtet, für welchen man die Lagrange-sche Reiche gefordert wird.

Das Problem wird als gleichartig wie im ersten Teil veralgemeinert betrachtet und nach Feststellung einiger Eigenschaften wird die Lagrange-sche Reihe ermittelt, geordnet nach den Gleichungs — Parametern.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

POLUL DE INERȚIE ÎN MIȘCAREA CICLOIDALĂ ȘI INTERPRETAREA LUI IN MIȘCAREA DE ȘURUB *

NICOLAE I. MANOLESCU, AL. STOENESCU, DUMITRU BOIANGIU

1. *Introducere.*

Polul de inerție este după cum se știe [1] punctul fix din plan prin care trece rezultanta unică a forțelor de inerție a unui solid în mișcare plană, la diferite stări de viteze și accelerații.

Polul de inerție are o deosebită însemnătate în dinamica mașinilor, deoarece permite determinarea stării de mișcare a unei mașini sub acțiunea forțelor exterioare date [2],

2. *Polul de inerție în mișcarea cicloidală.*

Se va studia acest punct în mișcarea caracteristică plană cînd atît baza cît și rostogolirea sînt curbe cunoscute de gradul *2* sau *1* (Cercuri respectiv drepte).

2.1. *Polul de inerție în mișcarea epicicloidală* (fig. 1).

Determinarea dreptei suport a rezultantei unice a forțelor de inerție a unui solid în mișcare epicicloidală (de exemplu o roată dințată planetară) a cărui rostogolitoare este cercul *C* (în cazul nostru cercul de divizare al roții planetare) se determină prin metoda cunoscută a reducerii dinamice la două mase punctiforme plasate; una în centrul instantaneu al accelerațiilor *J* și a doua în centrul de oscilație *K* al rostogolitoarei în raport cu J considerat fix.

Dreapta suport va trece prin punctul *K* și va fi paralelă cu *WJ'* unde *W* este centrul (polul) inflexiunilor, iar *J'* punctul unde dreapta

---

* Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din I.P.B. din 17—18 dec. 1960.

1 *N. I. Manolescu* și *D. Maros.* Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinematica și dinamica. Editura Tehnică, 1958, pag. 36.

2 *D. Maros.* O determinare grafico-analitică a repartiției accelerațiilor la mecanisme sub acțiunea unui sistem de forțe pentru o poziție și o repartiție cunoscută de viteze. Buletinul Inst. Politehnic Cluj, 1959, pag. 480.

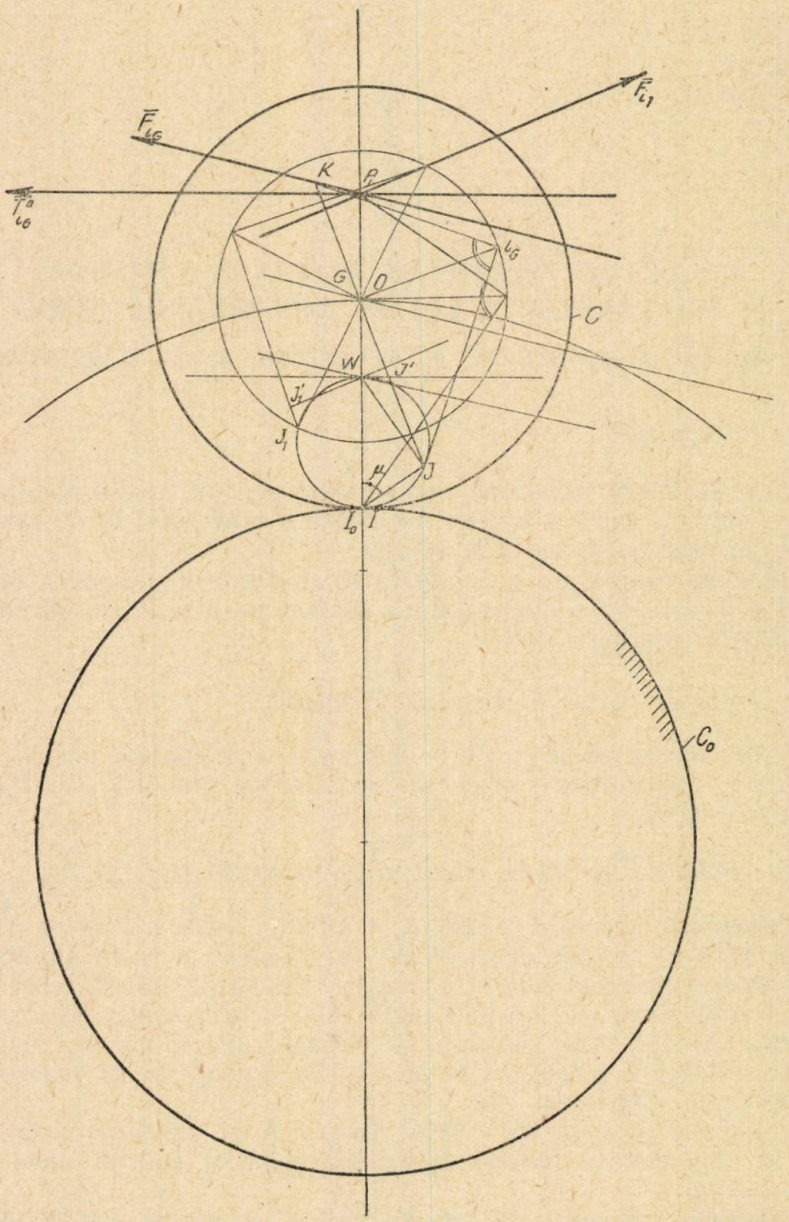


Fig. 1. Pentru aceeași poziție a centrului de greutate al roții (rostogolitoare) și diferite valori ale accederatei unghiulare ε_1 polul de inerție este fix și depinde numai de mărimea masei rostogolitoarei.

JG intersectează cercul inflexiunilor. Se vede ușor că WJ' face cu JG unghiul μ unde $\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Dreapta suport a forței de inerție taie raza vectoare principală IW în punctul fix P_i (Polul de inerție).

Demonstrația rezultă imediat observînd că tr. $GWJ' \sim$ tr. GKP de unde:

$$\frac{GK}{GJ'} = \frac{GP_i}{GW} \text{ și deci } GP_i = GW\frac{GK}{GJ'} \tag{a}$$

Dar cum conform construcției geometrice pe baza căruia se află punctul K avem:

$$GK = \frac{i_G^2}{GI}$$

unde: i_G este raza de girație a roții planetare corespunzătoare centrului G de greutate. Înlocuind în (a) și observînd că:

$GJ'.\ GJ = GW.GI$ se obține

$$GP_i = \frac{i_G^2}{GI} = \frac{i_G^2}{R} \tag{1}$$

unde R — raza rostogolitoarei (constantă în tot timpul mișcării).

Formula (1) arată că rezultanta unică a forțelor de inerție în mișcarea epicicloidală trece printr-un punct fix P_i aflat pe dreapta care unește centrul instantaneu de rotație (I) cu centrul de greutate G. Acest punct este fix pentru orice valoare a accelerației unghiulare ε și depinde numai de dimensiunile și mărimea razei rostogolitoarei (roata planetară).

În fig. 1 sînt arătate 3 poziții ale dreptei suport a forței de inerție rezultante unice, corespunzătoare poziției centrului instantaneu al accelerațiilor pe cercul inflexiunilor (J; J_0 confundat cu I și J_1).

Poziția lui P_i este importantă și ne dă posibilitatea aflării momentelor încovoetoare în brațele port sateliți ale mecanismelor planetare diferențiale ca și la aflarea presiunilor dinamice pe flancurile dinților angrenajelor.

2.2. *Polul de inerție în mișcarea cicloidală* (fig. 2).

În cazul cînd baza devine o dreaptă, se obține mișcarea cicloidală clasică.

Rezultanta unică a forțelor de inerție este în acest caz paralelă cu baza și se află față de aceasta la distanța:

$$P_iI = R + \frac{i_G^2}{R} \tag{2}$$

Formula 2) este evidentă, deoarece acceleraţia lui G (care în acest caz particular este şi centrul inflexiunilor şi centrul rostogolitoarei) este paralelă cu baza, G avînd o traiectorie rectilinie orizontală.

Este suficient deci să se facă construcţia grafică corespunzătoare lui $\varepsilon=0$ (deci cînd J coincide W) şi se obţine polul de inerţie P_i pe dreapta IGW.

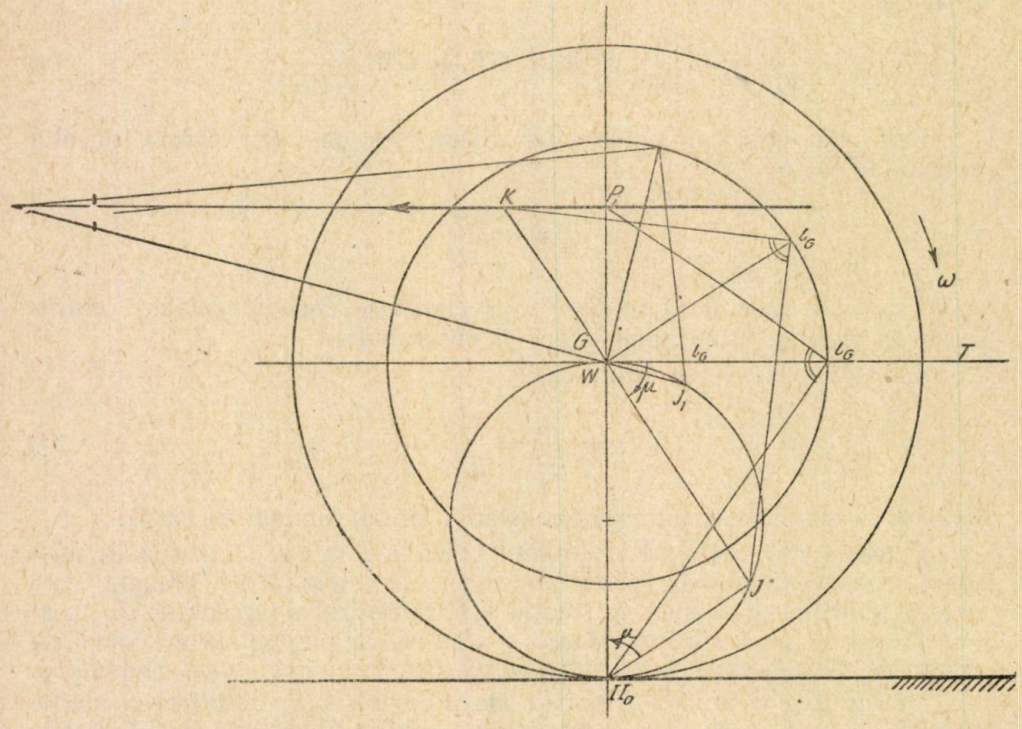


Fig. 2. Mişcarea cicloidală. Rezultanta unică a forţelor de inerţie a rostogolitoarei este întotdeauna paralelă cu baza pentru orice valoare a acceleraţiei unghiulare ε.

2.3. *Polul de inerţie în mişcarea hipocicloidală* (fig. 3).

Construcţia lui P_i este analogă cu aceea din mişcarea epicicloidală.

O situaţie specială apare în cazul cînd raza R_0 a bazei este egală cu diametrul rostogolitoarei, ($2R=d$) şi cînd masa acesteia din urmă este astfel aleasă încît raza ei de giraţie i_G în raport cu centrul de greutate G este egală cu R.

Cercul inflexiunilor se confundă în acest caz cu rostogolitoarea ($2R=d$), deoarece se ştie că toate punctele de pe rostogolitoare descriu drepte ce trec prin centrul O_0 al bazei (care este în acelaşi timp şi centrul inflexiunitar W.

Din construcţie rezultă în plus că *polul de inerţie P_i este fix pentru orice poziţie a rostogolitoarei în timpul ciclului cinematic.*

Rezultanta unică a forțelor de inerție a rostogolitoarei se rotește în jurul polului de inerție și în mișcarea hipocicloidală pentru diferite poziții ale centrului de greutate G și a momentului de inerție i_G ale rostogolitoarei.

2.4. *Influența masei elementului asupra poziției polului de inerție.* Este evident că efectul forțelor de inerție este cu atît mai mare cu cît, la aceeași

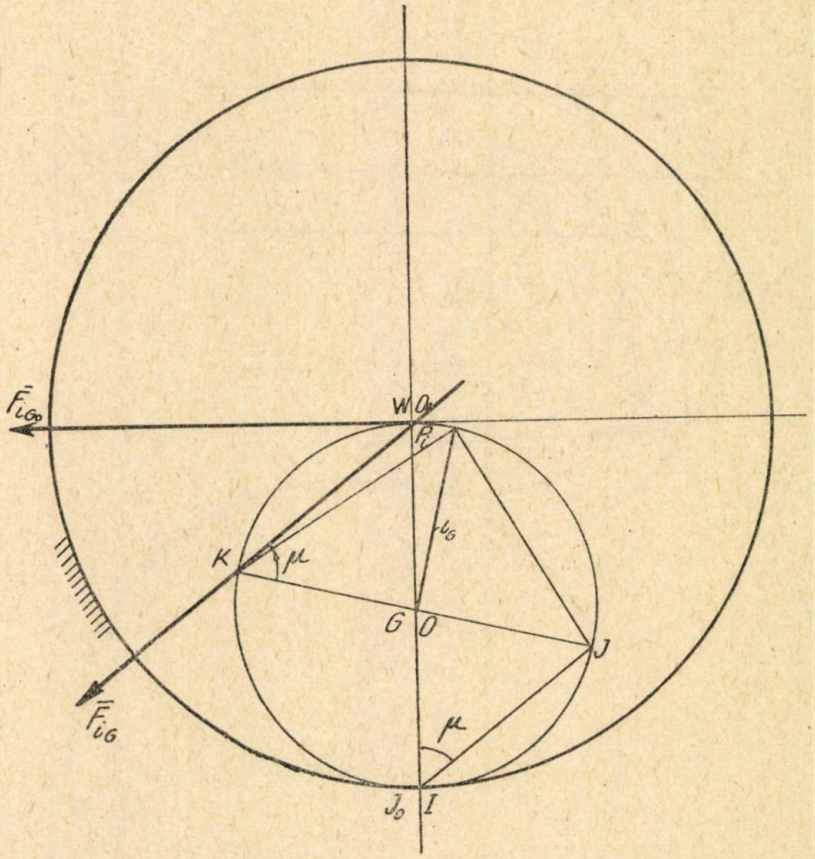


Fig. 3. Polul de inerție în mișcarea hipocicloidală în cazul particular cînd $R_0 = 2R = 2i_G$

P_i trece prin centrul bazei O_0 pentru orice valoare a accelerației ε și orice poziție a rostogolitoarei în timpul ciclului cinematic.

stare de accelerație, masa elementului este mai mare și deci raza de girație i_G în raport cu centrul de greutate este mai mare.

Acest lucru apare evident, atît din formulele (1) și (2), cît și din construcția polului de inerție în cazul mișcărilor epicicloidale și cicloidale (fig. 4 și 5).

Din aceste construcții se vede că pentru aceeași stare de accelerație poziția lui P_i se depărtează de centrul de greutate G cu cît raza de girație i_G este mai mare (crește). F_{iG} rămîne evident tot timpul paralelă cu ea însăși la aceeași valoare a lui ε.

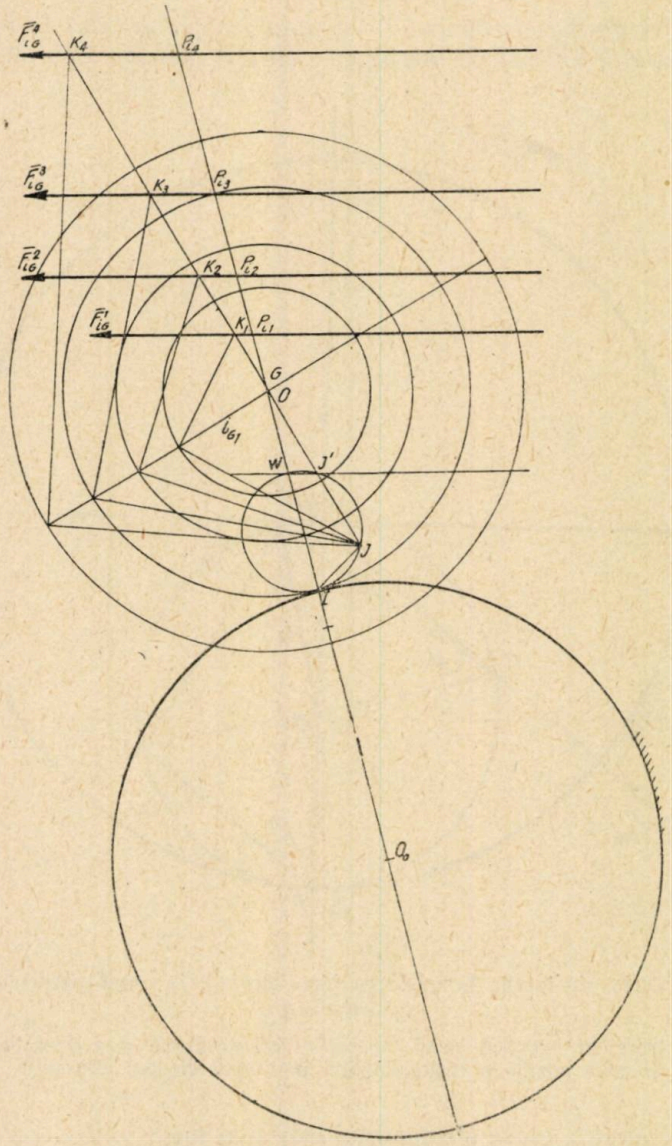


Fig. 4. Variația poziției polului de inerție P_i la aceiași stare de accelerație și diferite valori ale masei elementului în mișcarea epicicloidală. $i_{G1} \ldots i_{G4}$ razele de girație; $P_{i1} \ldots P_{i4}$ polul de inerție corespunzător lui $i_{G1} \ldots i_{G4}$

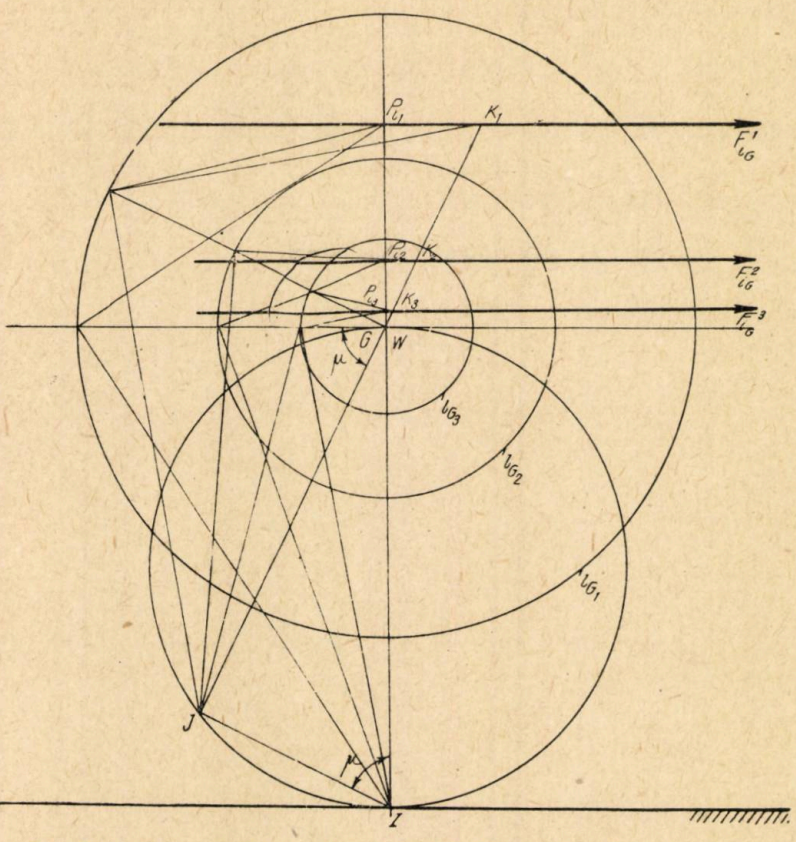


Fig. 5. Variația poziției polului de inerție P_i pentru diferite valori ale razei de girație i_G a elementului.

3. *Interpretarea polului de inerție în mișcarea de șurub.*

3.1. *Polul de inerție în mișcarea plană determinat cu ajutorul a două forțe de inerție parțiale.*

Într-o lucrare anterioară [3] s-a arătat cum este posibilă determinarea poziției polului de inerție cu ajutorul rezultantelor parțiale ale forței de inerție rezultantă unică și anume:

— una care nu depinde de ε,
— alta care depinde de ε, (fig. 6)
— Prima rezultantă parțială (care nu depinde de ε) este:

$$\bar{F}'_i = -m(\bar{a}_1 - \omega^2 \cdot \bar{r}_G) = m\omega^2(\bar{d} - \bar{r}_G)$$

[3] *Al. Stoenescu, N. I. Manolescu, D. Boiangiu,* Cîteva observații asupra polului de inerție.
(Buletinul Institutului Politehnic București nr. 1, 1960, pag. 19—27 (în limba rusă).

sau

$$\bar{F}_i' = -m\omega^2 \overline{GW} \tag{3}$$

unde: $\bar{r}_G = \overline{IG}$ — vectorul de poziție al lui G față de I (centrul instantaneu de rotație)

$d = IW$ — diametrul cercului inflexiunilor.

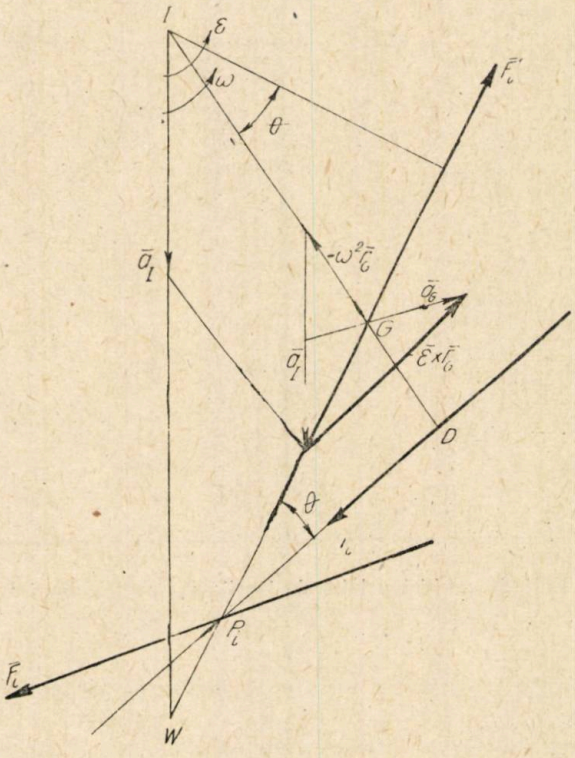


Fig. 6. Aflarea polului de inerție cu ajutorul celor două rezultante parțiale ale forțelor de inerție:

F_i' — care nu depinde de ε

F_i'' — care depinde de ε

Intersecția acestora determină pe P_i

Această rezultantă parțială trece prin G și dreapta suport trece prin centrul inflexiunilor.

A doua rezultantă parțială $\bar{F}_i''$ are expresia:

$$\bar{F}_i'' = -m\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_G \tag{4}$$

Dreapta suport a acestei rezultante parțiale trece printr-un punct D dat de vectorul de poziție (cu origina în G) :

$$\overline{GD} = \frac{\overline{F_i''} \times \overline{\mathfrak{M}_i''}}{F_i''^2}$$

Știind că $\mathfrak{M}_i'' = m i_G^2 \varepsilon$ și $F_i'' = m r_G \varepsilon$

rezultă :

$$GD = \frac{i_G^2}{r_G} \tag{5}$$

Această metodă arată că punctul D este centrul de oscilație al masei m a mobilului în raport cu punctul I considerat fix.

Rezultanta totală este :

$\overline{F_{iG}} = \overline{F_i'} + \overline{F_i''}$ și trece prin punctul de intersecție Pi al celor două componente $\overline{F_i'}$ și $\overline{F_i''}$ a cărui poziție este dată de relația :

$$GP_i = \frac{GD}{\sin\theta} = \frac{i_G^2}{r_G \sin\theta} = \frac{i_G^2}{GK} \tag{6}$$

adică tocmai formula (1) în care $GK = R$

3.2. *Forțele de inerție în mișcarea de șurub.*

Se ia un element în mișcarea de șurub.

Pe axa mișcării considerată ca axă z se ia un punct I a cărui accelerație $\bar{a}_I$ este dirijată după aceeași axă z după care sînt dirijate și $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$.

Centrul de greutate se va lua pe axa Iy pentru a putea studia un caz mai general (fig. 7).

Accelerația lui G este

$$\bar{a}_G = \bar{a}_I + (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_G) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

sau :

$$\bar{a}_G = -\varepsilon r_G \bar{i} - \omega^2 r_G \bar{j} + a_I \cdot \bar{k}$$

Dar în mișcarea de șurub accelerația unui punct de pe axa centrală a mișcării de șurub (în cazul de față punctul I) este :

$$\bar{a}_I = \frac{p}{2\pi} \bar{\varepsilon} \tag{7}$$

unde p este pasul mișcării de șurub.

În acest caz $\bar{a}_G$ devine:

$$\bar{a}_G = -\varepsilon r_G \bar{i} - \omega^2 r_G \bar{j} + \frac{p}{2\pi}\varepsilon \bar{k} \tag{8}$$

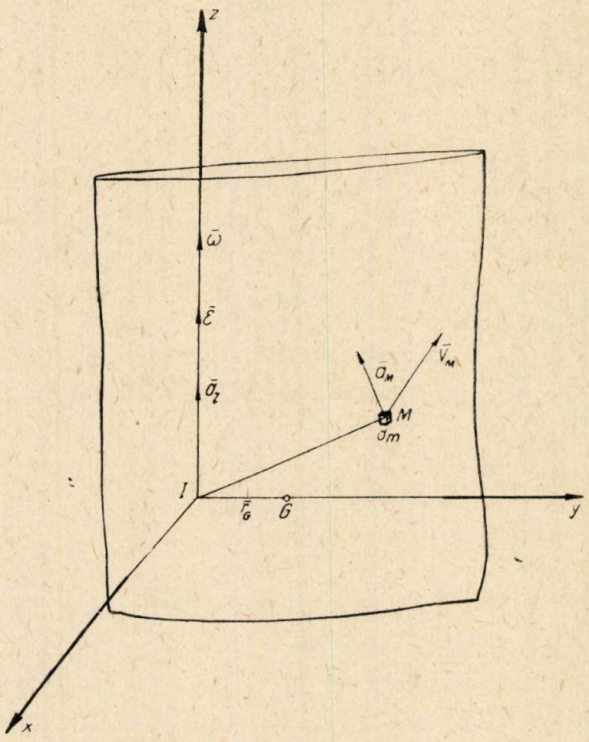


Fig. 7

Forța de inerție rezultantă este evident:

$$\bar{F}_{iG} = = \sum \bar{a} \Delta m = m r_G \varepsilon \bar{i} + m r_G \omega^2 \bar{j} - \varepsilon \frac{mp}{2\pi} \bar{k} \tag{9}$$

Se va proceda acum la descompunerea acestei forțe în cele două componente parțiale, una care nu depinde de ε și a doua care depinde de ε aflîndu-se pentru fiecare în parte torsorul minimal.

3.2.1. *Forțele de inerție care nu depind de* ε

a. Rezultanta parțială a forțelor de inerție care nu depind de ε este:

$$\bar{F}_i = m r_G \omega^2 \bar{j} \tag{10}$$

Această rezultantă este cuprinsă în planul $y\ I\ z$ și este paralelă cu axa y.

b. Suma $\overline{\mathfrak{M}}_i'$ a momentelor acestei forțe în raport cu origina I este dată de expresia :

$$\overline{\mathfrak{M}}_i' = \sum \bar{r} \times [-\Delta m \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] = -\sum \Delta m \bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})]$$

Făcîndu-se calculele [1]) rezultă :

$$\overline{\mathfrak{M}}_i' = -I_{yz}\,\omega^2\,\bar{i} + I_{zx}\,\omega^2 \bar{j} \tag{11}$$

Rezultanta parțială $\overline{F}_i'$ trece prin punctul N' de pe axa centrală, dat de vectorul de poziție :

$$\overline{IN'} = \bar{r}' = \frac{\overline{F}_i' \times \overline{\mathfrak{M}}_i'}{F_i'^2} = \frac{I_{yz}}{m r_G}\,\bar{k} \tag{12}$$

Cuplul minim C_i' corespunzător este :

$$C_i' = \frac{\overline{F}_i' \cdot \overline{\mathfrak{M}}_i'}{\overline{F}_i'} = I_{zx}\,\omega^3 \tag{13}$$

Perechea $(\overline{F}_i', C_i')$ este astfel torsorul minimal al forțelor de inerție care nu depind de ε.

3.2.2. *Forțele de inerție care depind de* ε

$$\overline{Fi}'' = m\,r_G\,\varepsilon\,\bar{i} - \frac{m\,p}{2\pi}\,\varepsilon\,\bar{k} \tag{14}$$

Suma $\overline{\mathfrak{M}}_i''$ a momentelor forțelor de inerție care depind de ε în raport cu origina este dată de expresia :

$$\overline{\mathfrak{M}}_i'' = \sum \bar{r} \times (-\Delta m \cdot \bar{a}_1) + \sum \bar{r} \times [-\Delta m (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})]$$

Făcînd calculele rezultă [2]) :

$$\overline{\mathfrak{M}}_i'' = \varepsilon \left(I_{zx} - \frac{m\,r_G\,p}{2\pi} \right) \bar{i} + I_{yz}\,\varepsilon\,\bar{j} - I_z\,\varepsilon\,\bar{k} \tag{15}$$

Rezultanta $\overline{F}_i''$ trece prin punctul N'' de pe axa sa centrală dat de vectorul de poziție :

$$\overline{IN''} = \bar{r} = \frac{\overline{F}_i'' \times \overline{\mathfrak{M}}_i''}{\overline{F}_i''^2}$$

[1]) Vezi anexa nr. 1.
[2]) Vezi anexa nr. 2.

Făcînd calculele se obține [1])

$$\bar{r}'' = \frac{1}{m\left(r_G^2 + \frac{p^3}{4\pi^2}\right)}\left[\frac{p}{2\pi} I_z \bar{i} + r_G I_z \bar{j} + \left(r_G I_{yz} - \frac{p^2}{4\pi^2} m r_G + \frac{p}{2\pi} I_{zx}\right)\bar{k}\right] \quad (16)$$

Mărimea cuplului minim C_i'' corespunzător este [1])

$$C_i'' = \frac{F_i'' \cdot \mathfrak{M}_i''}{F_i''}$$

Înlocuind rezultă :

$$C_i'' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}\left[I_z \frac{p}{2\pi} + I_{zx} r_G - \frac{mp}{2\pi} r_G^2\right] \quad (17)$$

(F_i'', C_i'') este deci torsorul minimal al forțelor de inerție care depind de ε.

Se vede ușor că forțele parțiale de inerție $\bar{F}_i'$ și $\bar{F}_i''$ sînt perpendiculare ; prima $\bar{F}_i'$ fiind situată în planul yIz și dirijată după axa Iy (în sensul lui I) intersectînd axa Iz în punctul N' de coordonate $(0,0, \frac{Iyz}{mr_G})$:

A doua $\bar{F}_i''$ se află într-un plan paralel cu planul xIz și dirijată în sensul pozitiv al lui $\bar{i}$.

Unghiul pe care-l face $\bar{F}_i''$ cu planul Iy este (fig. 7) :

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\frac{mp}{2\pi}\varepsilon}{m r_G \varepsilon} = \frac{p}{2\pi r_G} \quad (18)$$

3.2.3. *Punctul unde rezultanta parțială* $\bar{F}_i''$ *înțeapă planul* yIz *în care se află rezultanta* $\bar{F}_i'$.

S-a văzut că punctul N'' pe unde trece dreapta suport a forței de inerție parțiale $\bar{F}_i''$ are drept coordonate :

$$N''\left[\frac{p \cdot I_z}{2\pi m\left(r_G^2 + \frac{p^3}{4\pi^2}\right)} ; \frac{r_G \cdot I_z}{m\left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)} ; \frac{r_G \cdot I_{yz} + \frac{p}{2\pi} I_{zx} - \frac{p^2}{4\pi^2} m r_G}{m\left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)}\right]$$

sau prescurtat

$$N''\ (x'', y'', z'')$$

[1]) Vezi anexa nr. 3.

Din fig. 7. rezultă că punctul P_i unde $\overline{F_i''}$ înțeapă planul yIz are drept coordonată z_p expresia :

$$z_p = z'' + x'' \operatorname{tg} \Psi$$

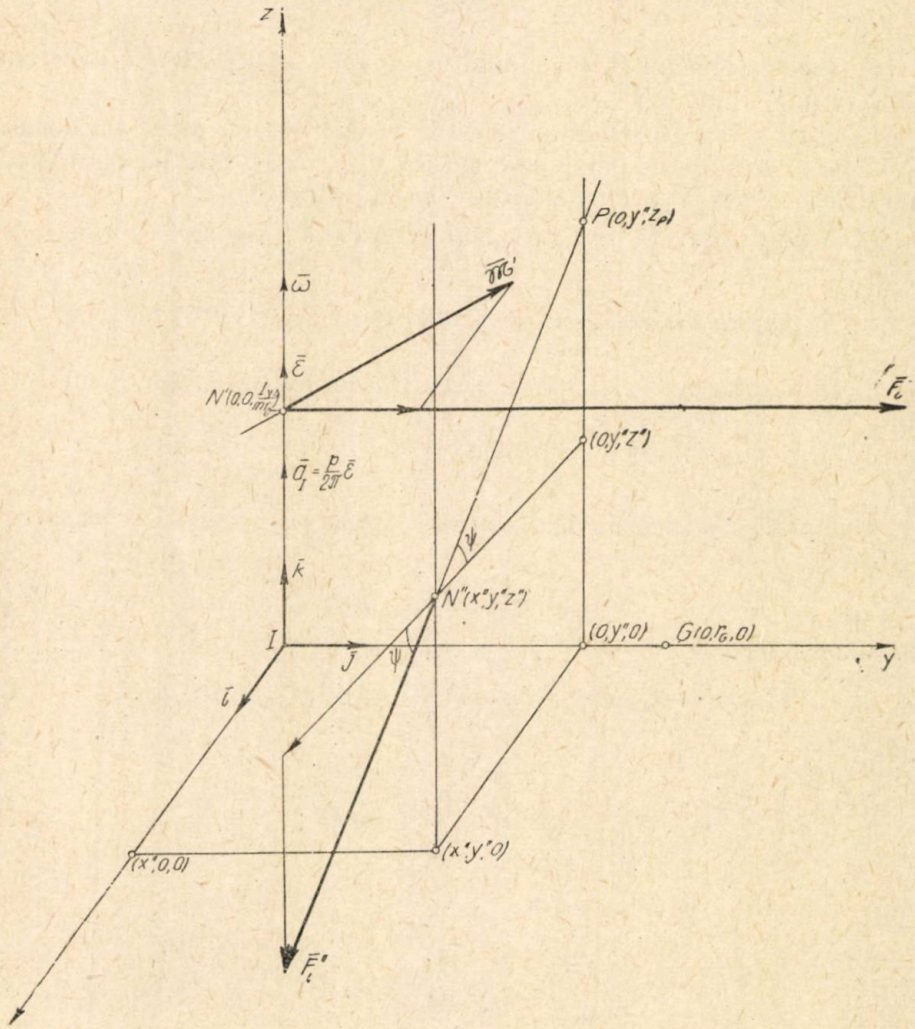


Fig. 8

sau făcînd înlocuirile se obține :

$$z_p = \left[r_G\, I_{yz} + \frac{p}{2\pi}\, I_{zx} - \frac{p^2}{4\pi^2}\, m\, r_G \right] \frac{1}{m\left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} \right)} + \frac{p\, I_z \cdot \frac{p}{2\pi r_G}}{2\pi m \left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} \right)}$$

sau :

$$z_p = \frac{1}{m\left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)}\left[r_G\, I_{yz} + \frac{p}{2\pi}\, I_{zx} + \frac{p^2}{4\pi^2 r_G} I_z - \frac{p^2}{4\pi^2}\, m\, r_G\right] \tag{19}$$

Se vede că punctul P_i nu se află pe dreapta suport a lui $\overline{F}_i'$, distanța dintre el și $\overline{F}_i'$ fiind $|z_p - z'|$.

Ceea ce este însă important este că poziția acestui punct nu depinde de valoarea accelerației unghiulare ε. Mai mult, însăși direcția ei în spațiu este independentă de ε, după cum se constată din (18).

$\overline{F}$ are deci o direcție fixă în spațiu pentru orice valoare a lui ε.

4. *Reducerea tuturor forțelor de inerție în P_i*

Forța de inerție rezultantă a mișcării este după cum s-a văzut :

$$\overline{F}_{iG} = \overline{F}_i' + \overline{F}_i'' = m\, r_G\, \varepsilon\, \overline{i} + m\, r_G\, \omega^2\, \overline{j} - \frac{mp}{2\pi}\, \varepsilon \cdot \overline{k}$$

Suma $\overline{\mathfrak{M}}_{ip}$ a momentelor tuturor forțelor de inerție în raport cu P_i este :

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ip} = \overline{\mathfrak{M}}_i' - \overline{IP}_i \times \overline{F}_i' + \overline{C}_i'' \tag{20}$$

Efectuînd calculele se obține [1])

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ip} = (-I_{yz}\, \omega^2 + m\, r_G\, z_p\, \omega^2 + C_{ix}'')\, \overline{i} + I_{zx}\, \omega^2\, j - C_{iz}''\, \overline{k} \tag{21}$$

unde :

$$C_{ix}'' = \frac{\varepsilon \cdot r_G}{r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\left[I_z\, \frac{p}{2\pi} + I_{zx}\, r_G - \frac{mp}{2\pi} r_G^2\right] \tag{22}$$

$$C_{iz}'' = \frac{\varepsilon\, \frac{p}{2r_G}}{r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\left[I_z\, \frac{p}{2\pi} + I_{zx} \cdot r_G - \frac{mp}{2\pi}\, r_G^2\right] \tag{23}$$

În concluzie în mișcarea de șurub cu $p = \text{const}$ și $r_G \neq 0$ nu există un punct analog polului de inerție P_i din mișcarea plană, deoarece în orice punct al spațiului există un $\mathfrak{M}_{ip}$ moment al forțelor de inerție dat de formula (20) și cele două rezultate parțiale $\overline{F}_i'$ și $\overline{F}_i''$ nu se intersectează.

[1]) Vezi anexa nr. 4.

Dacă G coincide cu I adică se află pe axa mișcării de șurub, atunci:

$$I_{yz} = I_{zx} = 0 \text{ de unde rezultă:}$$

a) $\overline{\mathfrak{M}}_i' = 0; \quad \overline{F}_i' = 0; \quad \overline{C}_i' = 0$

b) $\overline{F}_i'' = -\frac{mp}{2\pi} \varepsilon \overline{k}$ și

$$\overline{\mathfrak{M}}_i'' = -I_z \varepsilon \overline{k}$$

Valoarea lui $\overline{\mathfrak{M}}_i''$ este deci aceeași din mișcarea unui solid în jurul unei axe fixe avînd centrul de greutate plasat pe aceasta și axa fiind de simetrie.

De asemeni din (21) rezultă:

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ip} = -I_x \varepsilon \overline{k}$$

lucru evident, deoarece P_i coincide cu G'.

Anexa nr. 1

Calculul lui $\overline{\mathfrak{M}}i'$, $\overline{r}'$ și $\overline{C}i'$

a. Calculul lui $\overline{\mathfrak{M}}_i'$

Avem: $\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{\omega}(\overline{\omega} \cdot \overline{r}) - \omega^2 \overline{r}$

dar

$$\overline{\omega} = \omega \overline{k}$$

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$

deci

$$(\overline{\omega} \cdot \overline{r}) = \omega z$$

$$\overline{\omega}(\overline{\omega} \cdot \overline{r}) = \omega^2 z\overline{k}$$

astfel că:

$$\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = -\omega^2 (x\overline{i} + y\overline{j})$$

deci:

$$\overline{r} \times [\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})] = \omega^2 (yz\overline{i} - zx\overline{j})$$

Atunci:

$$\overline{\mathfrak{M}}_i' = -\sum \Delta m \overline{r} \times [\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})] = -I_{yz} \omega^2 \overline{i} + I_{zx} \omega^2 \overline{j} \qquad (11)$$

b. Calculul lui $\bar{r}'$

$$\bar{r}' = \frac{\bar{F}_i' \times \bar{\mathfrak{M}}_i'}{\bar{F}_i'^2} = \frac{1}{\bar{F}_i'^2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ o & m r_G \omega^2 & o \\ -I_{yz}\omega^2 & I_{zx}\omega^2 & o \end{vmatrix} = \frac{m r_G \omega^4}{m^2 r_G^2 \omega^4} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ o & 1 & o \\ -I_{yz} & I_{zx} & o \end{vmatrix}$$

$$\bar{r}' = \frac{I_{yz}}{m r_G} \bar{k} \tag{12}$$

c. Calculul cuplului minim C_i'

$$C_i' = \frac{\bar{F}_i' \cdot \bar{\mathfrak{M}}_i'}{F_i'} = \frac{1}{m r_G \omega^2} (m r_G \omega^2 \bar{j}) (-I_{yz}\omega^2 \bar{i} + I_{zx}\omega^2 \bar{j})$$

$$C_i' = I_{zx}\omega^2 \tag{13}$$

Anexa nr. 2

Calculul lui $\bar{\mathfrak{M}}_i''$

$$\bar{\mathfrak{M}}_i'' = \sum \bar{r} \times (-\Delta m \cdot \bar{a}_1) + \sum \bar{r} \times [-\Delta m (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})]$$

a) $$\sum \bar{r} \times (-\Delta m \cdot \bar{a}_1) = -(\sum \bar{r} \cdot \Delta m) \times \bar{a}_1 = -m \bar{r}_G \times \bar{a}_1 =$$

$$= -m r_G \bar{j} \times \frac{p}{2\pi} \varepsilon \bar{k} = -\varepsilon \frac{m r_G \cdot p}{2\pi} \bar{i}$$

b) $$\sum \bar{r} \times [-\Delta m (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})] = -\sum \Delta m \bar{r} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})$$

$$\bar{r} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) = r^2 \bar{\varepsilon} - (\bar{r} \cdot \bar{\varepsilon}) \cdot \bar{r}$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \qquad \varepsilon = \varepsilon \bar{k}$$

$$(\bar{r} \cdot \bar{\varepsilon}) = z \cdot \varepsilon$$

$$\bar{r} \cdot (\bar{r} \cdot \bar{\varepsilon}) = (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \cdot z \cdot \varepsilon = (zx\bar{i} + yz \cdot \bar{j} + z^2 \bar{k}) \varepsilon$$

$$r^2 \cdot \bar{\varepsilon} - (\bar{r} \cdot \bar{\varepsilon}) \cdot \bar{r} = (x^2 + y^2 + z^2) \varepsilon \bar{k} - (zx\bar{i} + yz\bar{j} + z^2 \bar{k}) \varepsilon =$$

$$= -zx\varepsilon \bar{i} - yz\varepsilon \bar{j} + (x^2 + y^2) \varepsilon \bar{k}$$

deci :

$$-\sum \Delta m \bar{r} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) =$$

$$= \varepsilon \bar{i} \sum \Delta m \cdot zx + \varepsilon \bar{j} \sum \Delta m\, yz - \varepsilon \bar{k} \sum (x^2 + y^2) \Delta m =$$

$$= I_{zx} \varepsilon \bar{i} + I_{yz} \varepsilon \bar{j} - I_z \varepsilon \bar{k}$$

Din a) și b) rezultă :

$$\overline{\mathfrak{M}}_i'' = \varepsilon\left(I_{zx} - \frac{m r_G p}{2\pi}\right)\cdot \bar{i} + I_{zz}\,\varepsilon\,\bar{j} - I_z\,\varepsilon\,\bar{k} \tag{15}$$

Anexa nr. 3

Calculul vectorului de poziție $\bar{r}''$

$$\bar{r}'' = \frac{\overline{F}_i'' \times \overline{\mathfrak{M}}_i''}{\overline{F}_i''^2} = \frac{m\,\varepsilon^2}{m^2\varepsilon^2\left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_G & -\frac{p}{2\pi} & 0 \\ -\frac{m r_G p}{2\pi} + I_{zx} & I_{yz} & -I_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{m\left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_G & -\frac{p}{2\pi} & 0 \\ I_{zx} - \frac{m r_G p}{2\pi} & I_{yz} & -I_z \end{vmatrix}$$

deci :

$$\bar{r}'' = \frac{1}{m\left(r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)}\left[\frac{p}{2\pi} I_z\,\bar{i} + r_G I_z\,\bar{j} + \left(r_G I_{yz} - \frac{m r_G p^2}{4\pi^2} + \frac{p}{2\pi} I_{zx}\right)\bar{k}\right] \tag{16}$$

Calculul cuplului minim.

$$C_i'' = \frac{\overline{F}_i''\cdot\overline{\mathfrak{M}}_i''}{\overline{F}_i''} = \frac{m\cdot r_G\,\varepsilon\,\bar{i} - \frac{mp}{2\pi}\varepsilon\,\bar{k}}{m\,\varepsilon\sqrt{r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}\cdot\left[\left(I_{zx} - \frac{m r_G p}{2\pi}\right)\varepsilon\,\bar{i} + I_{yz}\,\varepsilon\,\bar{j} - I_z\,\varepsilon\,\bar{k}\right]$$

deci :

$$C_i'' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}\left[r_G\left(I_{zx} - \frac{m r_G p}{2\pi}\right) + \frac{p}{2\pi} I_z\right] \tag{17}$$

Anexa nr. 4

Calculul lui $\overline{\mathfrak{M}}_{ip}$

Expresia :

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ip} = \overline{\mathfrak{M}}_i' - \overline{IP}_i \times \overline{F}_i' + \overline{C}_i'' \tag{20}$$

se calculează după cum urmează :

a) $\overline{\mathfrak{M}}_i' = -I_{yz}\,\omega^2\,\overline{i} + I_{zx}\,\omega^2\,\overline{j}$

b) $$\overline{IP}_i \times \overline{F}_i' = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & \dfrac{r_G \cdot I_z}{m\left(r_G^2 + \dfrac{p^2}{4\pi^2}\right)} & z_p \\ 0 & m r_G \cdot \omega^2 & 0 \end{vmatrix} = m r_G\,\omega^2\,z_p\,\overline{i}$$

c) $$\overline{\mathfrak{M}}_i'' = \varepsilon\left(I_{zx} - \frac{m r_G\,p}{2\pi}\right)\overline{i} + I_{yz}\,\varepsilon\,\overline{j} - I_z\,\varepsilon\,\overline{k}$$

$$\overline{F}_i'' = m r_G\,\varepsilon\,\overline{i} - \frac{mp}{2\pi}\,\varepsilon\,\overline{k}$$

Cuplul de inerție minim C_i''

$$C_i'' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{r_G^2 + \dfrac{p^2}{4\pi^2}}}\left[I_z\,\frac{p}{2\pi} + I_{zx}\,r_G - \frac{mp}{2\pi}\,r_G^2\right] \tag{17}$$

Componentele lui după axele I_x și I_z sînt date de :

$$C_{ix}'' = C_i''\cos\Psi \quad \text{respectiv} \quad C_{iz}'' = C_i''\sin\Psi$$

dar cum $\operatorname{tg}\Psi = \dfrac{p}{2\pi r_G}$ rezultă :

$$\cos\Psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{p^2}{4\pi^2 r_G^2}}} = \frac{r_G}{\sqrt{r_G^2 + \dfrac{p^2}{4\pi^2}}}$$

$$\sin\Psi = \frac{\dfrac{p}{2\pi}}{\sqrt{r_G^2 + \dfrac{p^2}{4\pi^2}}}$$

de unde :

$$C''_{ix} = \frac{\varepsilon r_G}{r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}} \left[I_z \frac{p}{2\pi} + I_{zx} r_G - \frac{mp}{2\pi} r_G^2 \right] \tag{22}$$

$$C''_{iz} = \frac{\varepsilon \frac{p}{2\pi}}{r_G^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}} \left[I_z \cdot \frac{p}{2\pi} + I_{zx} \cdot r_G - \frac{mp}{2\pi} r_G^2 \right] \tag{23}$$

$$\overline{C''_i} = C''_{ix} \cdot \overline{i} - C_{iz} \cdot \overline{k}$$

Deci $\overline{\mathfrak{M}}_{ip}$ este :

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ip} = \left(- I_{yz} \omega^2 + m r_G z_p \omega^2 + C''_{ix} \right) \overline{i} + I_{zx} \omega^2 \overline{j} - C''_{iz} \overline{k} \tag{21}$$

Catedrele de mecanisme și mecanică
Institutul Politehnic București

ИНЕПЦИОННЫЙ ПОЛЮС В ЦИКЛОИДАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ И ЕГО ИНЕТЕРПРЕТАЦИЯ В ВИНТОВОМ ДВИЖЕНИИ

(Краткое содержание)

Инепционным полюсом, как известно, является неподвижная точка плоскости, через которую проходит единая равнодействующая инерционных сил твердого тела в плоском движении при различных состояниях скоростей и ускорений.

В работе даны прямые доказательства для определения положения инерционного полюса в эпициклоидальном, циклоидальном и гипоциклоидальном движении.

Общий метод, применяемый в плоском движении, пользуется частичными составляющими инерционной силы — одной, забисящей от углового ускорения ε, и второй, не зависящей от него.

Точка пересечения этих двух частичных инерционных сил является именно инерционным полюсом P_i.

Этот метод применяется и в винтовом движении, имеющим шаг $p = \text{const}$. Находится некоторая точка P_i где плоскость, образованная осью винтового движения и центром тяжести G соприкасается с равнодействующей $\bar{F}''_i$, зависящей от ε. Положение этой точки не зависит от ε.

Уточняется, что в случае винтового движения две частичные равнодействующие не пересекаются.

В заключении, в пространственном движении не существует точки P_i подобной инерционному полюсу в плоском движении.

THE INERTIA POLE IN THE CYCLOIDAL MOTION AND IS INTERPRETATION IN THE SCREW MOTION

(Summary)

The inertia pole is, as it is known, the fixed point of a plan through which the unic resultant of the inertia forces of a solid (link) pass in the plane motion in various states of velocities and accelerations.

In the paper are given direct demonstrations for determining the position of the inertia pole in epicycloidal, cycloidal and hypocycloidal motion.

A general method utilised in the plane motion is based on the partial components of the inertia forces: one of them depends on the ε angular acceleration and the second is independend of it.

The intersection point of these two partial inertia forces is P_i the inertia pole.

This method is also used in the screw motion with $p=$const. A point P_i is found where the plane formed by the screw motion axis and the center of gravity G is crossed by F_i'' the resultant which depends on ε. The position of this point does not depend on ε.

It is to be pointed out that the two partial resultant do not intersect in case of the screw motion.

The conclusion drawn is there is no similarity between the point P_i in the spatial motion and the inertia pole P_i of the plane motion.

LE POLE D'INERTIE DANS LE MOUVEMENT CYCLOIDAL ET SON INTERPRÉTATION DANS LE MOUVEMENT DE VIS

(Résumé)

Le pôle d'inertie est le point fixe dans le plan par lequel passe la résultante unique des forces d'inertie d'un solide en mouvement plan aux différents états de vitesses et accélérations.

On donne des démonstrations directes pour la d termination de la position du pôle d'inertie dans les mouvements épicycloïdales, cycloïdales et hipocycloïdales.

Une méthode générale qui s'applique dans le mouvement plan utilise les composantes partielles de la force d'inertie: la première qui dépend de l'accélération angulaire ε et la deuxième qui ne dépend pas de celle-ci. Le point d intersection de ces deux forces d'inertie est le pôle d'inertie P_i.

On applique cette méthode dans le mouvement de vis avec le pas $p=$const.

On trouve un point P_i ou le plan formé par l'axe du mouvement de vis et le centre de gravité G est percé par la résultante F_i'' qui dépend de ε.

La position de ce point ne dépend pas de la valeur de l'accélération angulaire ε.

On précise qu'en cas du mouvement de vis les deux résultantes ne font pas d'intersection.

Par conséquant dans le mouvement spatial il n'existe pas un point P_i semblable au pôle d'inertie P_i du mouvement plan.

DER TRÄGHEITSPOL IN DER ZYKLOIDALEN BEWEGUNG UND DESSEN AUSLEGUNG IN DER SCHRAUBENBEWEGUNG

(Zusammenfassung)

Wie es bekanntist der Trägheitspol der feste Punkt in der Ebene, wo bei verschiedenen Zustände der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wie es bekannt ist der Trägheitskräfte eines starren Körpers in ebenen Bewegung läuft.

In den Vortrag man gibt die direkte Ableitungen für die Bestimmung des Trägheitsplespositionen in der epizykloidale, zykloidale und hypozykloidale Bewegung.

Durch die allgemenie Methode die für ebene Bewegung benutzt ist, wird die einzige Resultante der Trägheitskräfte in zwei Komponenten geteilt und zwar :

— in eine die nicht von ε abhängt,

— und die andere die von ε abhängt.

Diese zwei Teilkomponenten schneiden sich im Trägheitspol P_i. Diese Methode benutzt man für die Schraubenbewegung mit den konstantem Gang p und damit findet einen Punkt P_i wo die Resultante $\bar{F}_i''$ die von ε abhängt die Ebene die mit der Acse der Schraubenbewegung und mit dem Schwerpunkt festgestellt ist sticht.

Dadurch ist est bestimut das in der Schraubenbewegung die zwei Teilkomponenten sich nicht unterschneiden.

In der Raumbewegung, einen Punkt P_i änlich wie in der Ebenebewegung existiert es nicht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

APPLICATIONS DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES VIS DANS LA MÉCANIQUE THÉORIQUE *

par RADU VOINEA et MIHAI ATANASIU

Dans un ouvrage antérieur [1] on a expose une théorie géométrique des vis. On entend par „vis" un ensemble (Δ, s) formé par un axe Δ (l'axe de la vis) et un parametre scalaire s (paramètre de la vis). Une vis peut être caractérisée analytiquement par 6 coordonnées homogènes u, v, w, l, m, n. Les trois premières, u, v, et w représentent les projections de l'amplitude de la vis sur trois axes carthésiens et les trois dernières l, m, n représentent les moments résultants par rapport aux mêmes axes. La notion de „vis" que nous avons introduite diffère de la définition classique par l'amplitude qui cesse d'être une caractéristique. Au point de vue analytique, tandis que la vis au sens classique est caractérisée par 6 coordonnées déterminées, la vis au sens que nous avons proposé [1] est caractérisée, comme plus haut, par 6 coordonnées *homogènes*.

Dans le même ouvrage [1] on a étudié les ensembles linéaires de vis. Ces ensembles ont été caractérisés par leur rang. On entend par le rang d'un ensemble de p vis, le rang de la matrice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p & v_p & w_p & l_p & m_p & n_p \end{Vmatrix}$$

En analysant les configurations des axes des vis d'un ensamble de rang r on a obtenu les résultats montrés dans le tableau no. 1.

On a analysé séparément les ensembles de vis de même paramètre et les ensembles de vis de paramètres différents.

Dans notre ouvrage [1] on a indiqué de nombreux cas particuliers qui présentent une grande importance pratique.

---

* Communication présentée à la VI-ième session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (le 17—18 decembrie 1960).

TABLEAU No. 1

Configuration des axes centraux des vis

Le rang r	Vis de même paramètre	Vis de paramètres différents
0	—	—
1	Confondus	Une seule vis
2	Faisceau plan	Confondus ou les génératrices de la même surface de Ball (cylindroïde)
3	Génératrices de la même famille, d'une quadrique	Congruence du quatrième degré
4	Congruence du premier degré	Complexe quadratique
5	Complexe du premier degré	Quelconques
6	Quelconques	Quelconques

Dans la communication que nous présentons maintenent nous allons montrer de quelle manière la théorie géométrique des vis permet une exposition générale de certains problémes de mécanique théorique, problèmes qui sont utilisés souvent dans la théorie des mécanismes. Certains des résultats que nous avons obtenus sont déjà connus. Le but de notre communication est seulement celui de montrer l'efficacité de la théorie géométrique des vis dans la résolution des problèmes de la mécanique théorique et de la théorie des mécanismes.

1. *Manière très générale de formuler les conditions d'équilibre d'un corps rigide.* Considérons un corps rigide et un système de forces dont la résultante $\bar{R}$ et le moment résultant $\bar{M}_0$ par rapport au point O ont les projections respectivement $R_x, R_y, R_z, M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}$, Les conditions pour-que le système de forces soit en équilibre peuvent être exprimées d'une manière très générale à l'aide du principe du travail virtuel, en supposant qu'on donne au rigide 6 mouvenments hélicoidaux infinitésimaux. Soient $\delta\theta_{xi}$, $\delta\theta_{yi}$, $\delta\theta_{zi}$, δu_{xi}, δu_{yi}, δu_{zi}, respectivement les trois angles de rotation et les trois translations du rigide dans ces mouvements. Les équations d'équilibre seront :

$$R_x \cdot \delta u_{xi} + R_y \cdot \delta u_{yi} + R_z \cdot \delta u_{zi} + M_{ox} \cdot \delta\theta_{xi} + M_{oy} \cdot \delta\theta_{yi} + M_{oz} \cdot \delta\theta_{zi} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (2)$$

A cause du mouvement hélicoïdal les six déplacements infinitésimaux $\delta\theta_{xi}, \ldots, \delta u_{zi}$ ne sont pas indépendants. On peut les remplacer par quantités finies, qui définissent *la vis attachée au mouvement helicoïdal.* Soient $u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i$ les coordonnées homogènes de cette vis. Les équations (2) peuvent être écrites sous la forme :

$$R_x l_i + R_y m_i + R_z n_i + M_{ox} u_i + M_{oy} v_i + M_{oz} w_i = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (3)$$

Le système (3) est linéaire et homogène en R_x, R_y, R_z, M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}. La condition d'équilibre du système de forces demande que le système (3) n'ait que les solutions banales :

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0,\ M_{ox} = 0,\ M_{oy} = 0,\ M_{oz} = 0.$$

Il est nécessaire et suffisant que le déterminant du système soit toujours différent de zéro, c. à. d. :

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & u_1 & v_1 & w_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & u_2 & v_2 & w_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & u_3 & v_3 & w_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 & u_4 & v_4 & w_4 \\ l_5 & m_5 & n_5 & u_5 & v_5 & w_5 \\ l_6 & m_6 & n_6 & u_6 & v_6 & w_6 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4)$$

Du point de vue de la théorie géométrique des vis, la condition (4) est équivalente à celle qui exprime que *le rang de l'ensemble des vis attachées aux six mouvements hélicoïdaux soit égal à 6.*

Le rang d'une matrice rectangulaire formée par p lignes du déterminant Δ ($p=6$) doit être égal à p, car, autrement, on peut prouver, à l'aide de la règle de Laplace que le déterminant Δ est égal à zéro.

Il résulte des conditions géométriques négatives pour la configuration des axes centraux des 6 vis attachées aux mouvement hélicoïdaux : trois axes ne doivent pas appartenir à un même cylindroïde de Ball, quatre axes ne doivent pas apartenir à une même congruence du quatrième degré, cinq axes ne doivent pas appartenir à un même complexe quadratique. Lorsque les 6 vis ont le même paramètre s (le cas particulier $s=0$ correspond à six équations de moments par raport à 6 axes), les 6 axes doivent satisfaire ces conditions :

— deux axes ne doivent pas être confondus (cas évident) ;

— trois axes ne doivent pas appartenir à un même faisceau plan ;

— quatre axes ne doivent pas appartenir à la même famille de génératrices d'une quadrique, en particulier ne doivent pas être concurrents ou coplanaires ;

— cinq axes ne doivent pas appartenir à la même congruence du premier degré, en particulier ne doivent pas rencontrer deux droites ;

— les six axes ne doivent pas appartenir au même complexe du premier degré, en particulier ne doivent pas recontrer la même droite ou être parallèles au même plan.

On peut trouver des cas particuliers intéressants, en supposant que l'un ou plusieurs de ces axes sont jetés à l'infini. Les équations d'équilibre respectives deviennent des équations de projections sur la normale du plan qui contient l'axe à l'infini.

Par exemple, on ne peut pas écrire 4 équations de projection car cela revient à écrire 4 équations de moments par rapport à quatre droites situées

dans le plan à l'infini de l'espace, donc par rapport à quatre droites coplanaires. Autre exemple : l'équation de projection sur une direction normale à un plan est toujours une consêquence des trois équations de moments écrites par rapport à trois droites de ce plan, car elle est équivalente à une équation de moments par rapport à la droite à l'infini du plan, donc coplanaire avec les trois premières, etc.

2. *La configuration des axes centraux de n systèmes de forces en équilibre.* Ce problème généralise le problème connu de la configuration des supports de n forces en équilibre. Soient $u_1, v_1, w_1, l_1, m_1, n_1 \ldots\ldots, u_n, v_n, w_n, l_n, m_n, n_n$, les projections de la résultante et du moment résultant des systèmes. Les conditions d'équilibre pour des systèmes ayant les mêmes axes centraux et les mêmes paramètres peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0\\
&\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0\\
&\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n = 0\\
&\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_n l_n = 0\\
&\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_n m_n = 0\\
&\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \cdots + \lambda_n n_n = 0
\end{aligned} \qquad (5)$$

ou $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ sont des paramètres. Pour qu'il existe des systèmes de forces en équilibre, il est nécessaire que les paramètres $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ soient diférents de zéro. Puisque le système (5) est linéaire et homogène en $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ le rang r de la matrice des coefficients $u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i$ doit être inférieur a n.

On arrive ainsi à la condition que la rang r de l'ensemble des vis qui correspondent aux systèmes donnés doit être inferieur à n. Pour $n > 6$ il ne résulte aucune condition restrictive car r est toujours inferieur à 6. Donc pour que trois, quatre ou cinq sistèmes de forces soient en équilibre il est nécessaire que leurs axes centraux appartiennent respectivement à la même surface de Ball, à la même congruece du quatrième degré ou au même complexe quadratique. Lorsque les paramètres s des vis qui correspondent aux systèmes des forces sont égaux, on trouve les conditions, connues par exemple pour le cas de n forces en équilibre (une force est, au point de vue de la théorie des vis, une vis à paramètre $s=0$). Ces conditions pour 2, respectivement 3, 4, 5, 6 pareils système sont : que leurs axes centraux soient confondus, respectivement les rayons d'un même faisceau plan, les génératrices de la même nappe d'une quadrique réglée les droites d'une même congruence du premier degré, les droites d'un même complexe quadratique. Lorsque l'on considera des droites à l'infini de l'espace (qui correspondent au cas des couples), on arrive à des conditions intéressantes. Par exemple, pour que deux forces et un couple forment un système en équilibre il est nécesaire que les deux forces ainsi que les forces du couple soient situées dans le même plan. Le support de l'axe

central peut être considéré, au point de vue de la géométrie projective, la droite à l'infini du plan. Les supports des deux forces doivent rencontrer cette droitte, donc ils doivent être parallèles.

3. *Les conditions d'équilibre d'un corp rigide à six appuis.*

Soient R_x, R_y, R_z, M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}, les projections de la résultante et du moment résultant du système des forces qui agissent sur un rigide appuyé sur six appuis et soient $N_1 \ldots N_6$ les réactions dues à ces appuis. Les conditions d'équilibre seront :

$$\begin{aligned}
N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots + N_6 u_6 + R_x &= 0 \\
N_1 v_1 + N_2 v_2 + \cdots + N_6 v_6 + R_y &= 0 \\
N_1 w_1 + N_2 w_2 + \cdots + N_6 w_6 + R_z &= 0 \\
N_1 l_1 + N_2 l_2 + \cdots + N_6 l_6 + M_{ox} &= 0 \\
N_1 m_1 + N_2 m_2 + \cdots + N_6 m_6 + M_{oy} &= 0 \\
N_1 n_1 + N_2 n_2 + \cdots + N_6 n_6 + M_{oz} &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

ou u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i sont respectivement les projections des vecteurs unitaires des supports des réactions et leurs moments par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz. Ces projections peuvent être considérées comme coordonnées homogènes des six supports des réactions. La condition d'équilibre du rigide est équivalente à celle de la compatibilité du système (6). Mais cette dernière condition exige que la matrice Δ formée avec les coefficients des inconnues $N_1 \ldots N_6$ ait le même rang que la matrice Δ_1 formée avec ces coefficients et les termes libres $R_x, \ldots, M_{oz}$ Si la première matrice a le rang $r=6$, la deuxième a aussi le rang 6 et le rigide se trouve en équilibre quel que soit le système des forces données, qui lui est appliqué. La condition que la matrice formée par les coefficients des inconnues ait le rang $r=6$, s'exprime par les mêmes conditions négatives pour les supports des réactions que celles du paragraphe no. 4, établies dans le cas des vis à même paramètre, c. à. d. : deux supports ne doivent pas être confondus, trois supports ne doivent pas appartenir à un même faisceau plan, etc.

Losque le rang de la matrice Δ est inférieur à 6, le rigide ne reste plus en équilibre, quel que soit le système des forces données. La condition que la matrice Δ_1 ait le même rang que la matrice Δ est équivalente, du point de vue géométrique, à la condition que la vis qui correspond au système des forces données fasse partie du même ensemble linéaire de vis que les supports des réactions. Mais, conformément à la théorie des systèmes d'équations linéaires, dans ce cas, les inconnues $N_1 \ldots N_6$ restent indéterminées.

Par exemple, si les 6 supports des réactions sont concurrents le rigide ne reste en équilibre que lorsque le système des forces données est équivalent à une force unique dont le support passe aussi par le point de concurrence des supports des réactions.

La Chaire de Mécanique
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *R. Voinea, M. Atanasiu:* Contributions à la théorie géométrique des vis, Buletinul Institutului Politehnic București, Tom XXI, fasc. 3, 1959.

ПРИМЕНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВИНТОВ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(краткое содержание)

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой авторы разрабатывали теории множеств геометрических винтов.

В работе показаны применения в теоретической механике этой теории к следующим вопросам: к формулировке условий равновесия твердого тела, к изучению конфигурации центральных осей некоторого числа системы сил находящихся в равновесии, а также к изучению равновесия твердого тела, подвергаемого связям шестью точечными опорами.

APPLICATIONS OF THE GEOMETRICAL THEORY OF SCREWS IN THEORETICAL MECHANICS

(Summary)

This paper is a continuation of the study [1] where the authors have constructed a theory of the multitudes of geometrical screws. In the paper are shown the applications of this theory in theoretical mechanics in such problems as: the formulation of the conditions of equilibrium of a rigid body, the study of the configuration of the central axes of a certain number of forces in equilibrum, as welt as the study of the equilibrium of a rigid solid subjected to constraints due to six punctiform supports.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES VIS DANS LA MÉCANIQUE THÉORIQUE

(Résumé)

Cet article est une continuation de l'article [1] dans lequel on construit une théorie des ensambles des vis géométriques. On montre dans cet article les applications de cette théorie en mécanique théorique pour la formulation des conditions d'équilibre d'un solide rigide, l'étude de la

configuration des axes centraux d'un nombre quelconque de systèmes de forces en équilibre, ainsi que l'étude de l'équilibre d'un solide rigide soumis à des liaisons par six appuis punctiformes.

ANWENDUNG DER GEOMETRISCHEN THEORIE DER SCHRAUBEN IN DER THEORETISCHEN MECHANIK

(Zusammenfassung)

Vorliegende Arbeit stellt eine Nachfolge der Arbeit [1] dar, in welcher, die Verfasser eine Mengen-Theorie der geometrischen Schrauben auseinandergelegt haben. In der vorliegenden Arbeit, werden die Anwendungen dieser Theorie (im Rahmen der theoretischen Mechanik) auf die volgenden Problemen dargestellt :

— Vorlegung der Gleichgewichts — Bediengungen eines starren Gebildes ;

— Studieren des Ausschews der zentralen Achsen einer gewissen Anzahl von, in Gleichgewicht stehenden, kräftesystemen ;

— Sovie studieren des Gleichgewichtes eines starrenkörpers, welcher, durch 6 verbindenden puncktförmigen Stutzen beansprucht wird.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

CONSIDERAȚII CU PRIVIRE LA TEORIA GENERALĂ A LEGĂTURILOR SOLIDULUI

MIHAI ATANASIU

I. Introducere

Noțiunea de legătură a unui solid apare în mecanica teoretică odată cu studiul echilibrului și mișcării solidului rigid, studiu, care — după cum se știe — formează preocuparea de bază a acestei discipline.

Vom înțelege prin solid supus la legături un corp obligat să rămînă pentru o mulțime finită sau infinită de poziții ale sale în contact cu un alt corp care, la rîndul său, se poate afla în repaos sau în mișcare, oricare ar fi sistemul de forțe care îi este aplicat.

Noțiunea de legătură a apărut din necesitatea practică de a se studia echilibrul și mișcarea corpurilor întîlnite în tehnică (elementele mecanismelor, organe de mașini, elementele de construcții), corpuri care nu se află în general libere, izolate în spațiu ci sînt îmbinate unele cu altele în diferite moduri.

Rezultatele mecanicii teoretice privind echilibrul și mișcarea corpurilor supuse la legături își găsesc o largă aplicare într-o serie de discipline tehnice dintre care cele mai importante sînt rezistența materialelor, statica construcțiilor și teoria mecanismelor. Astfel, stabilirea condițiilor la limită în problemele privind studiul deformațiilor și stabilității, aflarea gradului de nedeterminare statică al unei structuri, studiul structural și cinetostatic al lanțurilor cinematice, pentru a cita numai cîteva din cele mai importante probleme ale acestor discipline, nu se poate face fără aplicarea rezultatelor mecanicii teoretice privind echilibrul și mișcarea solidului rigid supus la legături.

Este însă de remarcat faptul că studiul legăturilor solidului așa cum este prezentat în mecanica teoretică pune în evidență o serie de neajunsuri datorită cărora el poate fi aplicat numai în unele cazuri izolate, foarte simple. Ca urmare a acestui fapt disciplinele tehnice îndreptățite să folosească rezultatele mecanicii clasice din teoria legăturilor solidului fie au recurs la o serie de simplificări de natură să permită aplicarea acestor

---

* Comunicare prezentată la a VII-a sesiune științifică a cadrelor didactice din I.P.B. 7—8 aprilie 1962).

rezultate la o serie de cazuri practice, simplificări care uneori introduc aproximații apreciabile, fie au dezvoltat singure teoria legăturilor pentru nevoile disciplinei respective, fie au recurs — datorită insuficienței acestor rezultate — la metode empirice ca de exemplu în teoria mecanismelor și a mașinilor unde mobilitatea anumitor mecanisme spațiale complexe nou construite, se determină pe bază experimentală pe macheta mecanismului respectiv.

Prezentarea simplă a legăturilor solidului prin înlocuirea lor cu unul sau mai multe reazeme punctuale, folosirea în calcule a componentelor torsorului de reducere a interacțiunilor celor două corpuri care se îmbină printr-o legătură în locul mulțimii interacțiunilor care apare în legătura respectivă, constituie procedee simplificatoare folosite curent în mecanica clasică, dar care nu convin tuturor situațiilor întîlnite în disciplinele tehnice menționate mai sus. Din acest motiv se mai întîlnesc încă în aceste discipline o serie de procedee de calcul și formule valabile numai în anumite cazuri particulare, foarte restrînse ca număr în raport cu cazurile întîlnite curent în practică, formule care conduc în anumite cazuri la rezultate eronate, procedee de calcul care introduc complicații inutile sau, în sfîrșit, metode de calcul inaplicabile în toate cazurile datorită lipsei unui criteriu privind suficiența lor. Unele exemple privind aceste situații vor fi prezentate în cuprinsul lucrării.

Nu este însă mai puțin adevărat și faptul că o serie de cazuri simple de legături care sînt studiate de mecanica teoretică și la care sînt reduse cazurile practice mai complicate întîlnite în disciplinele menționate mai sus, satisfac într-o bună măsură cerințele acestor discipline ; aceasta a și constituit unul dintre motivele pentru care nu există încă o metodă generală pentru analiza și mai ales pentru sinteza cinetostatică a unei legături.

Pentru a preciza tema prezentei lucrări ne vom referi la legătura unui corp ca obligația geometrică a acestuia de a rămîne în contact cu un alt corp în punctele unui anumit element geometric (punct, curbă, suprafață) pe care l-am numit *zona de contact* a legăturii respective. Ea este alcătuită din totalitatea punctelor comune celor două corpuri aflate în contact sau din mulțimea punctelor rezultînd din intersecția mulțimilor punctelor elementelor geometrice ale celor două corpuri care participă la contact.

Această obligație geometrică a corpului supus la legături atrage după sine două consecințe care joacă un rol hotărîtor în studiul legăturii respective și anume :

— o consecință de natură cinematică ce constă în limitarea numărului mobilităților relative a celor două corpuri în sensul că numărul parametrilor geometrici care definesc poziția lor relativă este mai mic decît în cazul cînd între cele două corpuri n-ar exista legătura considerată,

— o consecință de natură fizică (statică) ce constă în apariția unor acțiuni reciproce a căror orientare este determinată de forma geometrică a zonei de contact a legăturii respective, modulele lor fiind determinate de forțele exterioare aplicate celor două corpuri în contact.

Între aceste două elemente — mulțimea mobilităților relative și mulțimea acțiunilor reciproce — există o strînsă legătură care permite determinarea ambelor categorii de elemente pentru diferite forme ale zonei de contact, cu consecințe importante privind înlăturarea neajunsurilor menționate mai sus; studiul acestor două elemente și al relațiilor dintre ele formează ceea ce am denumit *cinetostatica legăturilor unui solid.*

Studiul legăturilor solidului efectuat în mecanica clasică prezintă în mod disparat aceste două elemente fără a oferi un criteriu general și totodată practic pentru punerea lor în evidență; din acest motiv exemplificarea concluziilor acestui studiu se face pe o serie de cazuri particulare la care determinarea acestor elemente se face cu ușurință datorită simplității legăturilor respective.

Ne propunem ca, folosind principiile mecanicii clasice și cele ale mecanicii analitice, precum și o dezvoltare teoretică originală — teoria mulțimilor de șuruburi geometrice [7], [8] — să elaborăm un studiu general al legăturilor solidului cu ajutorul căruia să poată fi determinate fără dificultate cele, două elemente — mulțimea mișcărilor relative și mulțimea acțiunilor reciproce a două corpuri îmbinate printr-o legătură — considerînd ca element caracteristic al unei legături, un element geometric ușor de determinat pentru fiecare legătură și anume forma geometrică a zonei de contact a legăturii respective.

Pentru o anumită formă geometrică a zonei de contact se determină mulțimea mișcărilor posibile permise de legătura respectivă.

Această metodă permite o clasificare a legăturilor solidului după singurul element caracteristic: *forma geometrică a zonei de contact.*

Concluziile teoretice ale lucrării își găsesc aplicație la o serie de cazuri practice întîlnite în disciplinele rezistența materialelor, statica construcțiilor și teoria mecanismelor. În prezenta lucrare se tratează stadiul actual și unele aspecte ale problemei semnalate mai sus, urmînd ca într-o lucrare viitoare să fie arătată o metodă generală de rezolvare.

II. Scurt istoric al dezvoltării teoriei legăturilor solidului rigid.

După cum am arătat mai sus, mecanica teoretică studiază doar cîteva cazuri simple de legături ale solidului rigid, cazuri cu ajutorul cărora disciplinele care folosesc rezultatele mecanicii teoretice aproximează toate problemele tratate la aceste discipline. Acest lucru este precizat și în lucrarea [6] la pag. 632, par. 3, intitulat „Ecuații de mișcare în cazul solidului cu legături: ecuația generală". Aci se arată că „în general, sub acest titlu se tratează solidul cu axă fixă, solidul cu un punct fix și solidul alunecînd pe un plan. Practica însă impune și alte legături, care nu sînt tratate decît sporadic și în ipoteze cu totul speciale. De exemplu, tehnica cere cîte odată soluția problemei mișcării unui solid care are un punct obligat să descrie o traiectorie dată, să se afle pe o suprafață etc.". În aceeași lucrare, în continuare, se arată astfel că: „Rezolvarea efectivă a sistemului de ecuații astfel stabilit, este de obicei legată de mari dificultăți, mai ales din cauză că cele două probleme, una de aflare a parame-

trilor cinematici ai mișcării $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$, cealaltă a determinării torsorului reacțiunilor $(\bar{R}, \bar{M}_0)$ — problema cinetostatică — sînt indisolubil legate între ele. Numai rareori cele două probleme se pot despărți una de alta, pentru a putea fi tratate separat".

Mecanica neputînd oferi deci o metodă generală pentru studiul legăturilor solidului rigid care intervin în practică în construcția de mașini, în teoria mecanismelor etc., disciplinele numite au fost obligate să dezvolte această teorie pînă la nivelul necesităților ridicate de problemele pe care ele le tratau. Prima disciplină interesată în aplicarea rezultatelor mecanicii teoretice din domeniul teoriei legăturilor solidului, este rezistența materialelor. Din examinarea problemelor tratate în cadrul acestei discipline se poate trage concluzia că pentru o bună parte din aceste probleme, aproximațiile oferite de teoria legăturilor solidului din cadrul mecanicii teoretice, nu devin supărătoare. Pentru anumite probleme speciale, cum ar fi spre exemplu repartiția eforturilor unitare în punctele zonei de contact a două corpuri, rezistența materialelor dispune pe de o parte de aportul matematicii, al teoriei elasticității, iar pe de altă parte de o serie de metode experimentale, astăzi foarte bine puse la punct, cu ajutorul cărora se pot obține rezultate practice de o valoare incontestabilă. Anumite inconveniente ale teoriei legăturilor, așa cum este ea prezentată în mecanica teoretică, pot fi observate însă și în cadrul acestei discipline, spre exemplu în ce privește determinarea gradului de hiperstaticitate al unui solid considerat în primă aproximație ca rigid și în special în determinarea gradului de hiperstaticitate al sistemelor de corpuri. Aceste inconveniente sînt înlăturate prin examinarea separată a unui număr restrîns de cazuri particulare, care se întîlnesc în practica curentă. Din acest motiv în rezistența materialelor nu vom găsi un studiu special al legăturilor solidului, în scopul obținerii unor rezultate aplicabile la oricare tip de legătură a unui solid. Disciplinele la care se resimte cel mai mult insuficiența concluziilor mecanicii în ce privește teoria legăturilor, sînt teoria mecanismelor și statica construcțiilor. Aceasta se explică prin aceea că aceste două discipline tratează probleme legate de studiul echilibrului și mișcarea sistemelor de corpuri. Legăturile solidului, sau „cuplele cinematice" cum sînt denumite ele în teoria mecanismelor, constituie elemente de bază componente ale mecanismelor sau ale structurilor studiate în statica construcțiilor, avînd rolul de îmbinare între elementele acestor mecanisme sau structuri. Cuplele cinematice prezintă deci o importanță excepțional de mare pentru analiza structurală a mecanismelor și a sistemelor de corpuri studiate în statica construcțiilor și de aceea în literatura de specialitate se acordă o mare atenție studierii problemelor legate de teoria acestor cuple cinematice. Sub acest raport problemele legate de teoria legăturilor care sînt studiate în teoria mecanismelor și în statica construcțiilor, prezintă elemente comune, am putea spune chiar identice. Deoarece în teoria mecanismelor intervin atît probleme legate de studiul echilibrului sistemelor de corpuri, cît și de studiul mișcării acestora, pe cînd în statica construcțiilor intervin mai mult probleme legate de studiul echilibrului sistemelor, este natural ca în teoria mecanismelor să găsim o continuare aprofundată a studiilor mecanicii teoretice cu privire la teoria legăturilor în scopul obținerii unor rezul-

tate generale, capabile să cuprindă diversitatea de cuple cinematice întîlnite în practica construcției de mașini.

După cum arată A. I. Tainov în lucrarea [5], începutul teoriei științifice a cuplelor cinematice a fost făcut de genialul învățat rus, academicianul P. L. Cebîșev. Astfel în lucrarea O параллелограммах apărută în anul 1870 se face pentru prima dată caracterizarea cuplelor cinematice după numărul condițiilor de legătură impuse de către ele mișcării relative a organelor unui mecanism. În lucrarea Theoretische Kinematik a lui F. Reuleux apărută în anul 1875, se face împărțirea cuplelor cinematice în cuple inferioare și cuple superioare. O dată cu aceasta s-a făcut începutul clasificării cuplelor cinematice după caracterul contactului dintre cele două elemente pe care le îmbină o asemenea cuplă. În anul 1883 apare lucrarea Theoretische Maschinenlehre a lui F. Grasshof în care se cercetează diferite cazuri de mișcare relativă a elementelor îmbinate prin cuple cinematice de diferite tipuri. Mai tîrziu, în anul 1887 învățatul rus profesor P. O. Somov, în lucrarea O степенях свободы кинематической цепи a dezvoltat ideile lui Cebîșev privind formarea mecanismelor spațiale. Adevăratul întemeietor al teoriei suplelor cinematice este considerat însă marele învățat rus H. I. Hochman, care în lucrarea Кинематика машин tipărită în anul 1890 a dat o interpretare multilaterală cuplelor cinemetice. Ideile științifice expuse în această lucrare formează și astăzi baza teoriei contemporane a cuplelor cinematice. În ultimul timp teoria cuplelor cinematice a luat o mare dezvoltare prin lucrările școlii sovietice din domeniul teoriei mecanismelor și a mașinilor. Dintre lucrările mai importante în acest domeniu vom cita lucrările profesorului A. P. Malîșev, acad. I. I. Artobolevski, prof. H. T. Ketov și I. I. Kolcin, prof. V. V. Dobrovolski, prof. I. F. Moroșkin, candidat în științe tehnice A. I. Tainov. După cum arată chiar A. I. Tainov, în lucrarea citată, cu toate aceste realizări teoria cuplelor cinematice nu are pînă în prezent o rezolvare completă ; ea cuprinde o serie întreagă de probleme nerezolvate și de situații care comportă încă discuții. Astfel, de exemplu, prof. A. P. Malîșev consideră posibil să se construiască un total de 324 de cuple cinematice distincte, dintre care numai 99 pot avea o realizare practică. Acad. I. I. Artobolevski consideră că trebuie să se obțină în total 14 cuple cinematice simple, 10 cuple elicoidale și un număr nelimitat de cuple compuse. După cum arată autorul, numai o parte dintre aceste cuple pot fi realizate constructiv. Acad. prof. V. V. Dobrovolski afirmă că teoretic este posibil să se construiască 60 de cuple cinematice, dar că forma lor constructivă poate fi concretizată numai pentru o parte dintre ele. Din aceste discuții rezultă că diferiții autori nu au pînă în prezent o părere unitară în ce privește atît partea teoretică, cît și realizarea practică constructivă a cuplelor cinematice. O asemenea situație limitează desigur posibilitatea aplicării rezultatelor obținute, la cazurile practice întîlnite, introducînd inconveniente serioase în special în ce privește sinteza, adică proiectarea unei cuple cinematice, care să satisfacă condiții impuse dinainte. Lipsa de generalitate a unor rezultate sau complexitatea altora care le face de-a dreptul inaplicabile în cazuri practice, au avut repercursiuni serioase asupra dezvoltării teoriei generale a

echilibrului și mișcării sistemelor de corpuri, în special a sistemelor spațiale. Continuarea acestor studii s-a făcut prin aplicarea a o serie întreagă de metode matematice moderne la analiza mișcării relative și a interacțiunilor celor două corpuri în contact îmbinate printr-o cuplă cinematică. O trecere în revistă a acestor metode, asupra cărora nu vom insista aci, este arătată în articolul profesorului F. Freunenstein [1].

III. Stadiul actual al teoriei legăturilor solidului

În cele ce urmează ne vom referi de asemenea tot la rezultatele obținute de cercetătorii din domeniul teoriei mecanismelor, deoarece, după cum am văzut, ele sînt cele mai complete pînă la ora actuală. Ca observație generală vom remarca faptul că analiza cinetostatică a cuplelor cinematice conține o serie de elemente calitative, precum și o serie de observații de natură geometrică, care reduc generalitatea procedeelor de analiză cinetostatică a unei cuple. În esență problema fundamentală a analizei cinetostatice a unei legături (cuple cinematice) revine în teoria mecanismelor la determinarea așa numitei „clase" a legăturii respective. Această clasă exprimă proprietățile cinematice ale unei cuple, proprietăți care se caracterizează printr-un număr de grade de libertate în mișcarea relativă a celor două elemente pe care le îmbină cupla respectivă, sau printr-un număr de condiții de legătură introduse de către cuple în mișcarea relativă a celor două elemente; după numărul care-l exprimă clasa unei anumite cuple cinematice se poate face o clasificare a acestor cuple independentă de restul clasificărilor constructive care au la bază forma geometrică a zonei de contact a celor două corpuri. Astfel, dacă notăm prin S numărul de parametri ai mișcării libere relative a celor două corpuri, prin k numărul condițiilor de legătură introduse de cupla cinematică asupra mișcării relative a celor două elemente și prin i numărul gradelor de libertate ale mișcării relative a celor două elemente, din considerații cinematice simple, rezultă că aceste mărimi sînt legate între ele prin relația simplă:

$$S = h + i \tag{1}$$

Din examinarea acestei relații rezultă că drept clasă a unei cuple poate fi luat oricare dintre numerele i sau k. Unii autori denumesc drept clasă a unei cuple numărul i, iar alții numărul k. Este ușor de observat că fiecare din aceste numere poate varia între 1 și 5, astfel încît cele două elemente îmbinate prin cupla respectivă, să nu fie libere unul față de celălalt sau imobilizate, cazuri în care cupla nu ar mai avea sens.

În lucrarea [3] prof. I. F. Moroșkin folosind metodele algebrei liniare, arată că proprietatea caracteristică a unei cuple constă în realizarea unei transformări liniare a spațiului de la un element la altul. Astfel, folosind drept parametri geometrici pentru caracterizarea mișcării relative a unui element față de celălalt coordonatele punctuale ale originii unui sistem de axe solidar cu unul dintre elemente, față de sistemul de axe solidar cu cel de al doilea element și unghiurile lui Euler ale primului sistem față de cel de al doilea, el denumește drept clasă a unei

cuple rangul transformării liniare a spațiului primului element în sistemul celui de al doilea realizat de cupla respectivă. Aplicînd aceste rezultate la studiul sistemelor de corpuri simple supuse la legături olonome, prof. I. F. Moroșkin a obținut o serie de rezultate de o generalitate remarcabilă. Astfel în lucrările [3] și [4] se studiază natura geometrică a lanturilor simple închise și deschise (problema cercetării structurale) rezolvîndu-se odată cu aceasta și problema clasificării sistemelor citate mai sus. Au mai fost efectuate și o serie de alte cercetări în domeniul teoriei legăturilor solidului ; ele nu sînt citate aci deoarece nu vizează în mod direct expunerea care urmează.

IV. Problemele de bază ale teoriei legăturilor și dificultățile legate de rezolvarea lor

În cele ce urmează vom face o trecere succintă în revistă a principalelor probleme ridicate de teoria legăturilor solidului, a modului în care sînt rezolvate aceste probleme în mecanica teoretică, precum și a dificultăților întîmpinate în aplicarea rezultatelor mecanicii teoretice la problemele practice ridicate de rezistența materialelor, teoria mecanismelor și statica construcțiilor.

a) *Legătura dintre mișcare și reacțiuni.* Să considerăm bara AB din fig. 1 ; ea poate ocupa orice poziție în planul xOy nefiind supusă nici unei legături. Poziția acestei bare poate fi determinată în raport cu sistemul de axe xOy din planul său, cu ajutorul a trei parametri geometrici independenți, coordonatele x_A, y_A ale extremității sale A și unghiul φ dintre

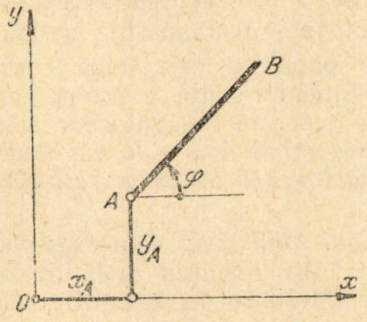


Fig. 1

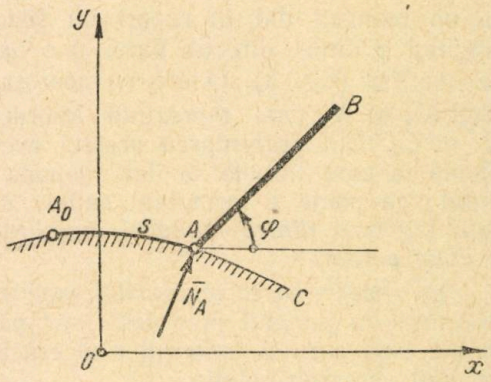


Fig. 2

direcția barei și o paralelă la axa Ox dusă prin extremitatea sa A. Acești trei parametri definesc poziția barei AB la un moment dat în raport cu sistemul xOy. Dacă obligăm bara AB ca să rămînă în contact cu curba fixă C, situată în același plan (fig. 2), numărul parametrilor geometrici independenți care definesc poziția barei AB la un moment dat în raport cu același sistem de axe, scade la doi și anume arcul $A_0A = s$, măsurat de la

o poziție fixă A_0 de pe curba C și unghiul φ dintre direcția barei și o paralelă la axa Ox dusă prin extremitatea sa A. Datorită contactului dintre bara AB și curba fixă C, în punctul A va apare însă o forță $\bar{N}_A$ care reprezinte interacțiunea barei cu curba C. Să obligăm acum bara AB să rămînă în contact cu ambele extremități ale sale respectiv cu curbele C_1 și C_2 situate în planul xOy. Se constată că în acest caz numărul parametrilor geometrici independenți care definesc poziția barei AB

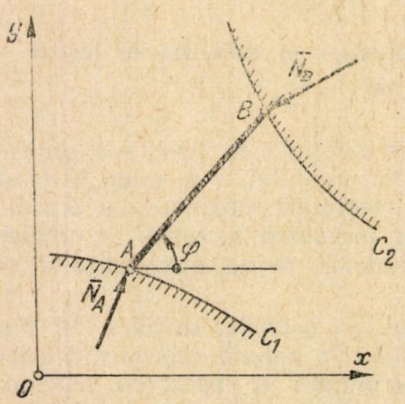


Fig. 3

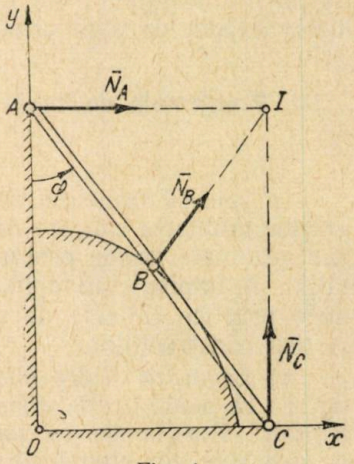


Fig. 4

la un moment dat în raport cu sistemul de axe xOy scade la unul: unghiul φ dintre direcția barei și o paralelă dusă prin extremitatea sa A la axa Ox (fig. 3). Odată cu aceasta se constată însă apariția a două forțe $\bar{N}_A$ și $\bar{N}_B$ care reprezintă interacțiunile barei cu cele două curbe C_1 și C_2. Din prezentarea acestui exemplu simplu rezultă o primă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor solidului; ea poate fi formulată astfel: *cum se exprimă într-o formă generală legătura dintre numărul mobilităților relative și acțiunile reciproce a două corpuri?*

b) *Determinarea legăturilor pasive ale unui solid rigid.* Din exemplul prezentat la punctul precedent s-ar părea că între numărul mobilităților m ale unui corp și numărul r al reacțiunilor introduse de legăturile sale în plan ar exista relația:

$$m + r = 3 \tag{2}$$

Această relație nu este însă valabilă în cazul general al unui corp liber sau supus la legături într-un același plan. Pentru a arăta aceasta este suficient să considerăm exemplul simplu din fig. 4. În acest caz bara AB este obligată să se deplaseze în planul xOy, astfel încît trei puncte ale sale, extremitățile A și C, precum și punctul B situat la mijlocul său, sînt obligate să se afle pe trei curbe fixe, respectiv axele Ox,

Oy și cercul cu centrul în O, de rază egală cu jumătatea lungimii barei AC. În acest caz numărul reacțiunilor introduse de legăturile solidului, este egal cu trei, iar poziția barei poate fi determinată față de sistemul xOy cu ajutorul unui singur parametru, unghiul φ. Relația (1) nu mai este deci respectată. Odată cu aceasta se observă că una din legăturile A, B sau C poate fi înlăturată fără ca mobilitatea barei AC să se modifice. Asemenea legături care pot fi înlăturate, fără a modifica mobilitatea

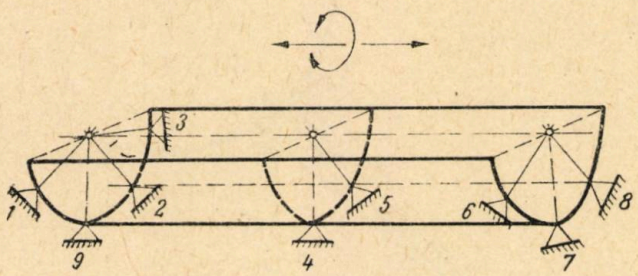


Fig. 5

solidului respectiv, sînt denumite *legături pasive*; Ele influențează numai gradul de nedeterminare statică al corpului respectiv. În fig. 5 este arătată o placă de formă semicilindrică supusă la legături prin nouă reazeme punctuale. Placa are două grade de mobilitate, adică poziția sa față de un sistem de axe $Oxyz$ poate fi determinată la un moment dat cu ajutorul a doi parametri geometrici independenți. Din examinarea acestui caz se observă că numărul legăturilor pasive este de cinci, adică pot fi înlăturate cinci reazeme punctuale, fără ca mobilitatea plăcii să se modifice. Cu această ocazie este interesant de observat că pentru păstrarea mobilității barei nu pot fi înlăturate oricare din cele cinci reazeme; pot rămîne astfel de exemplu, reazemele 1, 2, 6, 7 dar nu pot rămîne reazemele 1, 9, 2, 3. Din examinarea acestor exemple apare o altă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor solidului; ea poate fi formulată astfel: *care este criteriul general cu ajutorul căruia pot fi puse în evidență legăturile pasive ale unui solid rigid?*

c) *Determinarea legăturilor critice ale unui solid rigid.* În general vom înțelege prin legătură critică a unui solid rigid, acea legătură la care numărul gradelor de libertate ale solidului respectiv, în ceea ce privește deplasările sale finite, nu coincide cu numărul gradelor de mobilitate ale aceluiași solid în ceea ce privește deplasările sale infinitezimale, în vecinătatea unei anumite poziții. Ca exemplu de legătură critică să considerăm bara OA din fig. 6, articulată în punctul O și simplu rezemată în A pe curba fixă C, astfel încît normala la curba C în punctul A să coincidă cu direcția barei OA. O asemenea legătură este o legătură critică pentru bara OA, deoarece punctul A nu poate efectua deplasări finite pe curba C, dar el nu este împiedicat să se deplaseze în pozițiile A' și A'' situate pe tangenta în A la curba C. Se spune că bara OA este imobilă „în mare" dar este mobilă „în mic". Un alt exemplu este arătat

în fig. 7. Aci bara AB este obligată să păstreze cele două extremități ale sale în contact cu curbele fixe C_1 și C_2 situate în planul său, astfel încît normala în A la curba C_1, normala în B la curba C_2 și direcția AB să coincidă. După cum se observă, în acest caz bara este imobilizată pentru

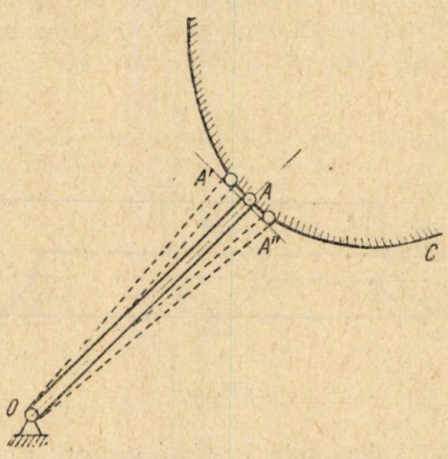


Fig. 6

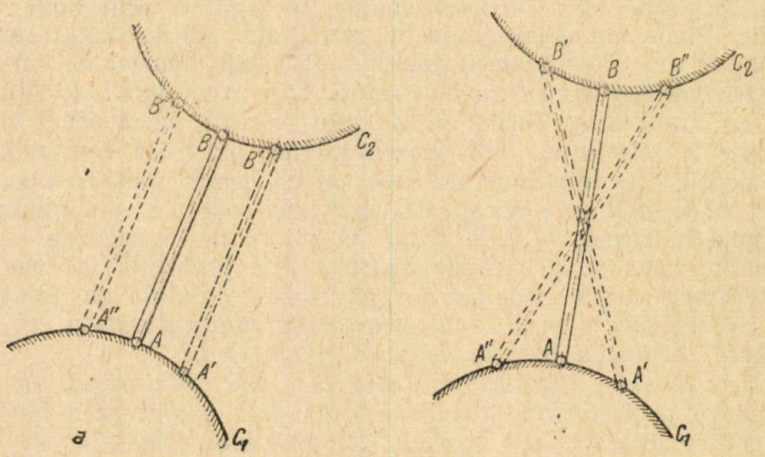


Fig. 7

deplasările finite, dar în ce privește deplasările infinitezimale ea are două grade de mobilitate. Să considerăm acum exemplul arătat în fig. 8. În acest exemplu luat din statica construcțiilor placa P este supusă la șase legături în spațiu reprezentate prin pendulele $O_1A_1 \ldots O_6A_6$. Dacă în exemplele arătate în fig. 6 și 7 legăturile critice ale corpurilor puteau fi găsite relativ ușor cu ajutorul unor observații geometrice simple, în cazul reprezentat în fig. 8 acest lucru nu mai este cu putință. Desigur, în practică se întîlnesc și alte cazuri similare acestuia, în care legăturile critice

ale unui corp nu mai pot fi determinate decît cu ajutorul unor raționamente, de natură geometrică sau cinematică destul de anevoioase. Din prezentarea acestor exemple rezultă o altă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor solidului. Ea poate fi formulată

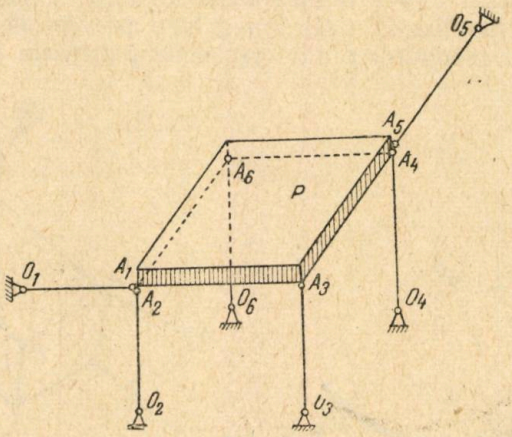


Fig. 8

astfel : *care este criteriul general și totodată practic, cu ajutorul căruia se pot recunoaște legăturile critice ale unui solid rigid?*

d) *Determinarea gradului de hiperstaticitate al unui corp.* Din mecanica solidului rigid este cunoscut faptul că, dacă un corp este supus la legături prin reazeme punctuale în număr mai mare decît trei în plan,

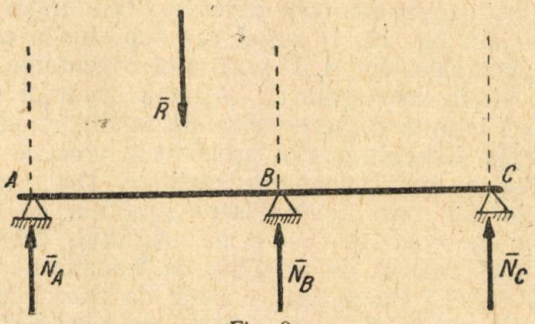


Fig. 9

sau decît șase în spațiu, el este static nedeterminat, adică sistemul ecuațiilor de echilibru nu poate fi rezolvat astfel încît să rezulte valori unice ale reacțiunilor reazemelor. Cu această ocazie trebuie remarcat și faptul că un solid rigid poate fi static nedeterminat, fără ca el să fie imobilizat de legături. Să considerăm, spre exemplu, cazul grinzii continui pe trei reazeme punctuale *A*, *B*, *C*, întîlnit curent în rezistența materialelor (fig. 9). Suporturile celor trei reacțiuni introduse de reazeme, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ și $\bar{N}_C$

sînt coplanare și paralele. Pentru ca echilibrul acestei grinzi să fie posibil, trebuie ca forțele exterioare care sînt aplicate să se reducă la forța unică $\bar{R}$ situată în planul în care se află grinda și suporturile celor trei reacțiuni. În acest caz este ușor de observat faptul că grinda este odată static nedeterminată, fără a fi însă strict imobilizată de cele trei reazeme A, B și C. Nedeterminarea statică a grinzii provine de la aceea că cele trei suporturi ale reacțiunilor din reazemele punctuale A, B și C se află

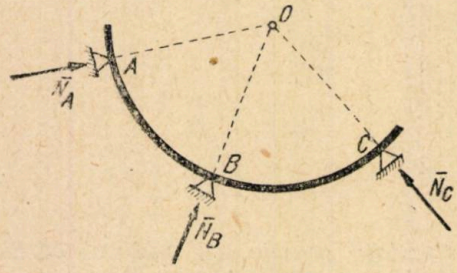


Fig. 10

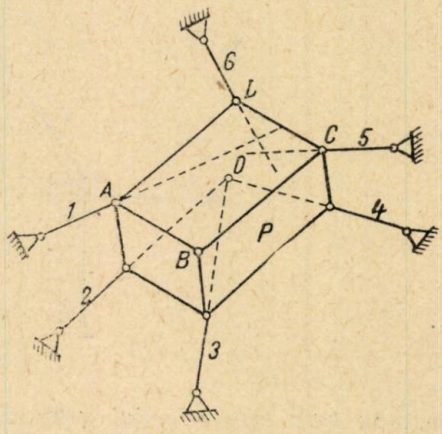


Fig. 11

într-o configurație geometrică specială și anume ele sînt coplanare și paralele; grinda nu ar fi fost static nedeterminată dacă suporturile acestor reacțiuni ar fi fost coplanare însă oarecare. O situație similară întîlnim și la bara curbă din fig. 10. În acest caz suporturile celor trei reacțiuni ale reazemelor punctuale, din A, B și C, sînt concurente într-un punct O; bara este odată static nedeterminată. Aflarea gradului de hiperstaticitate al unui corp, încă înainte de rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru, prezintă un interes deosebit pentru problemele practice întîlnite în rezistența materialelor și în statica construcțiilor. Dacă însă în exemplele simple prezentate mai sus, determinarea gradului de hiperstaticitate al corpurilor respective poate fi făcută cu ușurință, deoarece pot fi ușor observate care din ecuațiile de echilibru se transformă în identități, trebuie remarcat faptul că există însă o serie de cazuri în special spațiale, la care acest lucru nu mai este cu putință; în asemenea cazuri răspunsul nu poate fi căpătat decît prin cercetarea rangului matricii sistemului ecuațiilor de echilibru al corpului respectiv. Un asemenea exemplu luat din statica construcțiilor [2] este arătat în fig. 11. Placa P este supusă la legături prin șase reazeme simple, desenate schematic prin pendulele $1, \ldots 6$. Cele șase reazeme sînt astfel dispuse, încît direcțiile reazemelor 1, 5, 6 sînt coplanare oarecari în planul $ABCD$ al plăcii, iar reazemele 2, 3, 4 au direcțiile concurente într-un punct O, situat pe același plan. În acest caz, ca de altfel în multe asemenea cazuri similare întîlnite în sta-

tica construcțiilor, nu mai este cu putință aflarea directă a gradului de hiperstaticitate al corpului respectiv prin simpla examinare a configurației direcției reazemelor sale. Din examinarea acestor exemple simple rezultă o nouă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor solidului. Ea poate fi formulată astfel: *care este criteriul general pe baza căruia se poate stabili gradul de hiperstaticitate al unui solid rigid din examinarea configurației geometrice a suporturilor reacțiunilor introduse de reazemele solidului respectiv?*

e) *Determinarea clasei unei cuple cinematice.* După cum este cunoscut, clasa unei legături (cuple cinematice) reprezintă numărul mișcărilor relative interzise de cupla respectivă sau, mai general, numărul relațiilor de legătură independente introduse de cupla respectivă între parametrii geometrici care definesc poziția relativă a două corpuri, dacă ele ar fi libere. De cele mai multe ori, cuplele cercetate în teoria mecanismelor sînt astfel alcătuite încît printr-o alegere convenabilă a sistemului de referință (sistem solidar cu unul din corpuri față de care se repereză mișcarea relativă a celuilalt corp) pot fi puse ușor în evidență mișcările

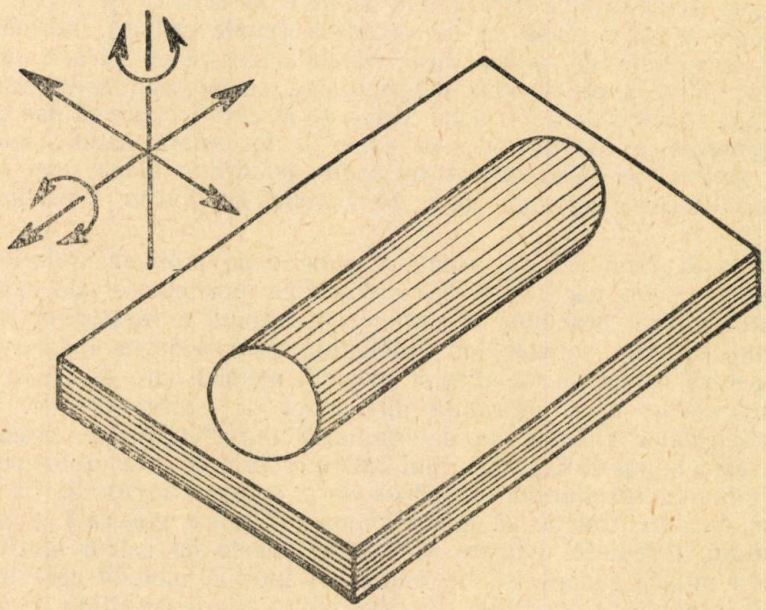


Fig. 12

relative interzise de cupla respectivă, sau chiar anumite relații între parametrii care definesc poziția relativă a celor două corpuri. Un asemenea exemplu este arătat în fig. 12. În această figură este reprezentat contactul dintre o suprafață cilindrică și o suprafață plană. Prin alegerea sistemului de referință, astfel încît planul a două dintre axele sale să coincidă cu planul unuia din corpurile care alcătuiesc cupla (prisma) se pot observa ușor cele două mișcări relative interzise de cupla respec-

tivă : translația perpendiculară pe fața prismei aflată în contact cu cilindrul și rotația în jurul unei axe situate în acest plan și perpendiculară pe generatoarea de contact a cilindrului cu planul. Dacă însă sistemul de axe ales este oarecare, numărul mișcărilor relative permis de orice cuplă, este de șase. În acest caz se poate însă arăta că între aceste mișcări există un număr de relații care nu poate depăși cifra șase și care face ca mișcările relative considerate să nu mai fie independente între ele. Un exemplu similar este cel al cuplei șurub-piuliță, la care dacă sistemul de referință este ales astfel încît una din axele sale să coincidă cu axa geometrică comună a șurubului și piuliței, se poate observa ușor că există două mișcări relative, o translație și o rotație avînd vectorii dirijați în lungul acestei axe și între care există o relație de dependență. Acestea sînt cazurile întîlnite curent în practică ; ele sînt cazuri simple, la care alegerea convenabilă a unui sistem de referință pentru reperarea mișcărilor relative, combinată cu observarea intuitivă, geometrică, a acestor mișcări, rezolvă în mod satisfăcător determinarea clasei unei anumite cuple cinematice. Dar din însăși observarea acestui procedeu, rezultă lipsa sa de generalitate, fără a mai adăuga la aceasta și faptul că pot exista cuple a căror clasă să fie variabilă (cuple critice). Formele constructive imaginate de proiectanții mecanismelor, pun adesea probleme complicate în ceea ce privește determinarea clasei unei asemenea cuple cinematice. Rezultă de aci o nouă întrebare la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor ; ea poate fi formulată astfel : *care este criteriul general în baza căruia se poate determina clasa unei legături (cuple cinematice) a unui corp, în funcție de forma constructivă a acesteia?*

În cele de pînă aci am semnalat o serie de probleme referitoare la determinarea unor caracteristici cinetostatice importante ale corpurilor supuse la legături, probleme la care teoria actuală a legăturilor solidului nu dă un răspuns satisfăcător, înțelegînd prin aceasta indicarea unei metode pentru determinarea acestor mărimi, metodă care să fie în același timp generală și ușor aplicabilă din punct de vedere practic. Dar în afara problemelor ridicate de determinarea caracteristicilor cinetostatice ale unui corp supus la legături, mai există o serie de alte probleme legate de determinarea reacțiunilor introduse de o anumită legătură. În această problemă, la care trebuie să dea răspuns tot teoria generală a legăturilor solidului, trebuiesc indicate asemenea metode de calcul efectiv, care să evite o muncă laborioasă de multe ori inutilă, metodă care să îndeplinească totodată și condițiile de rigurozitate și generalitate. După cum ne este cunoscut, în special pentru tehnicieni, asemenea metode sînt de o mare importanță deoarece ele conduc la economie substanțială de timp în efectuarea anumitor calcule necesare în proiectare. În cele ce urmează vom indica două asemenea probleme.

f) *Alegerea ecuațiilor care condiționează echilibrul unui solid rigid sau elastic.* Din statică este cunoscut faptul că ecuațiile de echilibru ale unui solid rigid sau elastic, pot fi scrise față de sisteme de referință arbitrar alese. De asemenea mai este cunoscut faptul că se pot scrie pentru un același solid rigid un număr oricît de mare de ecuații de

echilibru, dar că nu oricare asemenea sisteme de ecuații pot fi folosite pentru a condiționa echilibrul unui solid rigid sau elastic. Mai exact spus, orice ecuație de echilibru scrisă pentru un anumit solid rigid sau elastic, constituie o condiție necesară de echilibru, dar nu oarecare asemenea ecuație constituie totodată și o condiție suficientă de echilibru. Intr-adevăr, dacă examinăm cazul simplu al grinzii din fig. 13 (grindă dreaptă articulată în A și simplă rezemată în B) la care considerăm sistemul ecuațiilor de echilibru:

$$\Sigma M_A = 0,\ \Sigma M_B = 0,\ \Sigma M_C = 0, \tag{3}$$

constatăm că am scris cele trei ecuații folosite la studiul echilibrului unui corp supus acțiunii unui sistem de forțe coplanare. Este știut însă faptul că ecuațiile acestui sistem nu constituie condiții suficiente de echilibru pentru solidul considerat deoarece una din ecuațiile acestui sistem este o consecință a celelalte două.

Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească sistemul ecuațiilor de echilibru al unui corp, pentru ca ele să constituie condiții suficiente de echilibru pentru corpul respectiv, sînt cunoscute:

— ecuațiile de echilibru trebuie să fie independente între ele;

— ecuațiile de echilibru nu trebuie să se reducă la identități;

— fiecare din ecuații trebuie să conțină cel puțin una din necunoscute.

Teoria generală a legăturilor solidului deși formulează aceste condiții pe care trebuie să le îndeplinească sistemul ecuațiilor de echilibru la un corp, nu indică totuși o metodă generală cu posibilități practice de aplicare pentru scrierea acelor ecuații care îndeplinesc condițiile arătate mai sus. Din acest motiv apare o nouă întrebare la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor solidului; ea poate fi formulată în felul următor: *care trebuie să fie configurația axelor față de care se scriu ecuațiile de echilibru ale unui corp, astfel încît aceste ecuații să constituie condiții suficiente de echilibru pentru corpul respectiv?*

g) *Determinarea unei anumite forțe de legătură dintr-o ecuație de echilibru care conține o singură necunoscută.* Pentru sistemele static

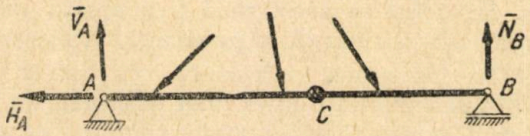


Fig. 13

determinate aceasta constituie una din problemele importante, deoarece scopul final al scrierii ecuațiilor de echilibru, îl constituie determinarea reacțiunilor reazemelor în vederea dimensionării acestora. Odată scris sistemul ecuațiilor de echilibru, rezolvarea acestuia se face cu ajutorul metodelor algebrei liniare. De multe ori însă, în problemele practice, este nevoie să se calculeze o anumită reacțiune, fără a scrie întreg sistemul ecuațiilor de echilibru. Aceasta este cu putință dacă se găsește o

asemenea axă față de care scriind o anumită ecuație de echilibru, în această ecuație nu va apare decît reacțiunea căutată. Intr-o formă simplă, elementară, acest procedeu este cunoscut din mecanica teoretică, unde la studiul echilibrului sistemelor articulate plane (grinzi cu zăbrele), este cunoscut sub denumirea de „metoda secțiunilor" și servește la determinarea eforturilor interioare în barele unei asemenea grinzi. În fig. 14 este arătat acest procedeu. Pentru determinarea eforturilor interioare în

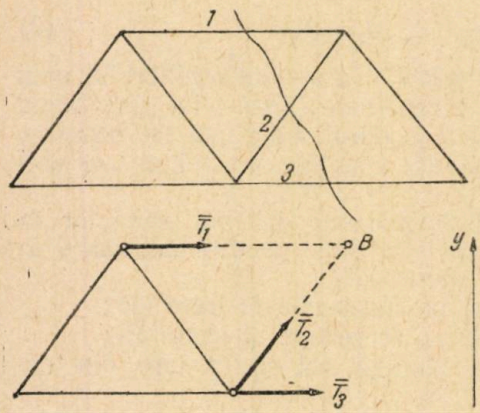


Fig. 14

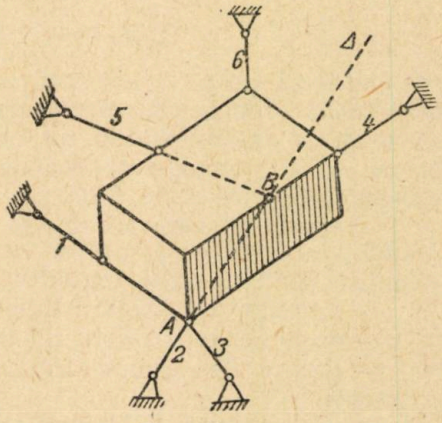


Fig. 15

barele 1, 2 și 3 ale grinzii cu zăbrele din această figură, se procedează astfel: pentru determinarea efortului interior T_1 se scrie ecuația de momente a tuturor forțelor care acționează una din părțile grinzii în raport cu punctul de intersecție al celelaltor două eforturi (A); pentru determinarea efortului interior T_3 se scrie ecuația de momente în raport cu punctul de intersecție al direcțiilor celorlalte două eforturi $\bar{T}_1$ și T_2 (B); pentru determinarea efortului interior $\bar{T}_2$ se scrie o ecuație de proiecție pe perpendiculara comună direcțiilor celorlalte două eforturi care sînt paralele, $\bar{T}_1$ și T_3. Se obțin în acest mod trei ecuații independente, care conțin fiecare numai cîte o singură necunoscută. Aplicarea acestui procedeu la determinarea eforturilor interioare, în barele unei grinzi cu zăbrele, oferă avantajul simplității și al unei rapidități de calcul. De aceea extinderea lui la problemele spațiale, unde numărul de necunoscute este mai mare decît în plan și deci avantajele acestei metode se fac mai bine resimțite, constituie și astăzi obiectul cercetărilor de mecanică. Acest procedeu este foarte apreciat la rezolvarea problemelor spațiale din statica construcțiilor. În fig. 15 este arătată o problemă de statica construcțiilor, care se rezolvă în general prin aplicarea acestui procedeu. În această figură este arătat un corp supus la legături printr-un sistem de șase reazeme spațiale, reprezentate prin pendulele 1,...6 [2]. Să presupunem că se cere determinarea reacțiunii reazemului 6; pentru aceasta, deoarece direcțiile reazemelor 1, 2 și 3 sînt concurente în punctul A, iar direcțiile

reazemelor 4 și 5 sînt de asemenea concurente în punctul B, se observă ușor că unind aceste două puncte se obține o dreaptă Δ față de care scriind ecuația de momente, singura necunoscută care va apare în această ecuație va fi reacțiunea reazemului 6. După cît se observă, procedeul este foarte simplu, deoarece el evită scrierea întregului sistem al ecuațiilor de echilibru în număr de șase. În tratatele de statica construcțiilor sînt arătate o serie de asemenea cazuri particulare, unde datorită configurației speciale a reazemelor, aplicarea acestui procedeu se face mai ușor sau mai complicat, prin examinarea fiecărui caz în parte. Este însă de observat faptul că nu se indică o metodă generală în baza căreia să se poată aplica acest procedeu pentru o dispoziție oarecare a reazemelor solidului. Rezultă de aci o nouă întrebare la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor solidului; ea poate fi formulată astfel: *care este procedeul general în baza căruia, pentru un solid static determinat, să se poată determina o anumită reacțiune, dintr-o ecuație care conține această reacțiune drept singură necunoscută?*

Am semnalat în cele de pînă aci o serie de probleme de o deosebită importanță pentru tehnică; odată cu aceasta a reieșit desigur și lipsa de generalitate a procedeelor puse la dispoziție de teoria generală a legăturilor solidului în ceea ce privește studiul cinetostatic al unei legături, fapt pe de-a întregul explicat prin aceea că la analiza cinetostatică a unei legături, este folosită mult metoda intuirii mișcărilor relative și a interacțiunilor în locul unui procedeu general. Această metodă indicată de mecanica teoretică pentru cazurile simple de legături ale solidului, este folosită în continuare și la disciplinele de specialitate, deoarece pentru cazurile curent întîlnite la aceste discipline, ea dă rezultate mulțumitoare. O serie de cazuri dificile întîlnite, precum și munca laborioasă de cercetare a unor cazuri particulare importante pentru practică, au condus la revizuirea acestui procedeu; lucrarea de față se situează pe această linie.

V. Unele particularități ale mărimilor care definesc starea cinetostatică relativă a două corpuri

Din cele de mai sus rezultă faptul că metodele pentru analiza cinetostatică a unei legături puse la dispoziție de către teoria generală a legăturilor solidului, prezintă interes atît pentru mecanica teoretică, cît și pentru o serie de discipline de mare importanță tehnică, cum ar fi rezistența materialelor, statica construcțiilor și teoria mecanismelor; este însă de observat faptul că nu toate disciplinele menționate mai sus au fost interesate în dezvoltarea ambelor aspecte (aspectul cinematic și aspectul interacțiunilor) ale analizei cinetostatice a unei legături. Astfel, în rezistența materialelor este dezvoltat mai mult aspectul interacțiunilor, fapt justificat prin aceea că această disciplină se preocupă de dimensionarea pieselor care alcătuiesc legătura. În statica construcțiilor a fost dezvoltat aspectul interacțiunilor la cazuri ceva mai complicate decît cele întîlnite în rezistența materialelor, precum și aspectul cinematic în ce privește în

special aflarea eforturilor interioare cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale și determinarea legăturilor critice ale sistemelor de corpuri. În teoria mecanismelor a fost dezvoltat mai mult aspectul cinematic legat de determinarea mobilității lanțurilor cinematice. Mecanica teoretică se ocupă cu studiul ambelor aspecte, însă aplicate la o serie de cazuri mult prea simple în raport cu necesitățile practice. În această lucrare ne propunem să studiem ambele aspecte sub forma lor cea mai generală, astfel încît rezultatele obținute să poată fi aplicate deopotrivă în toate disciplinele menționate mai sus. În acest scop ne propunem să aplicăm la studiul cinetostatic al unei legături, o parte teoretică nouă intitulată teoria mulțimilor de șuruburi geometrice, teorie care are la bază o noțiune nouă, *șurubul geometric*. Această teorie are la bază o serie de particularități ale mărimilor care definesc starea cinetostatică relativă a două corpuri îmbinate printr-o legătură; vom prezenta aceste particularități în cele ce urmează.

a) *Caracterizarea stării cinetostatice relative a două corpuri.* Să considerăm două corpuri aflate în repaus sau în mișcare și între care există o legătură. În mecanica clasică starea cinetostatică relativă a acestor două corpuri, este caracterizată pe de o parte prin mulțimea tuturor interacțiunilor dintre cele două corpuri, iar pe de altă parte printr-un număr n de parametri geometrici scalari independenți — unghiuri sau distanțe — care definesc poziția relativă a celor două corpuri. Acest mod de a caracteriza starea cinetostatică relativă a două corpuri prezintă o serie de neajunsuri; într-adevăr, datorită faptului că pentru

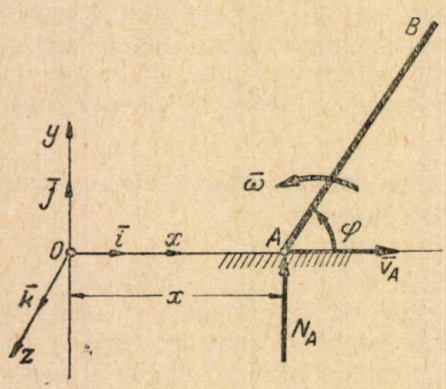


Fig. 16

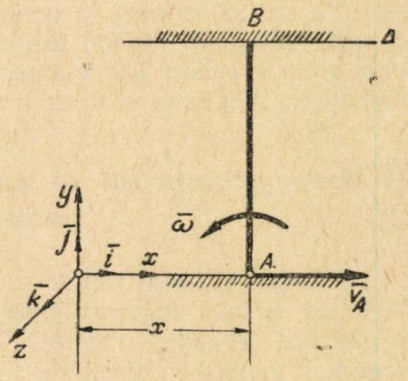


Fig. 17

caracterizarea celor două categorii de mulțimi — interacțiuni și mișcare relativă — se folosesc mărimi de natură diferită (pentru interacțiuni se folosesc mărimi vectoriale, iar pentru mișcarea relativă se folosesc mărimi scalare) nu poate fi pus în evidență caracterul lor de reciprocitate, de interdependență; de asemenea, din același motiv, la studiul mișcărilor relative nu pot fi puse în evidență legăturile critice. Pentru înlăturarea acestor neajunsuri la caracterizarea poziției relative a două corpuri, vom

folosi în locul parametrilor geometrici scalari, parametri cinematici scalari. În acest mod atît mulțimea interacțiunilor, cît și mulțimea vitezelor relative poate fi reprezentată la un moment dat prin mărimi de aceeași natură și anume prin mărimi vectoriale. Astfel, definirea stării cinetostatice a barei AB din fig. 16, pentru poziția reprezentată în această figură (bara se află în planul xOy și reazemă cu extremitatea A pe axa Ox) se face prin mărimile vectoriale $\bar{N}_A\ (0, N_{Ay}, 0)$ pentru interacțiunile și $\bar{v}_A\ (v_{Ax}, 0, 0), \omega\ (0, 0, \omega_z)$ pentru determinarea poziției momentane, ultimele înlocuind mărimile (x, φ) folosite în mecanica clasică pentru a caracteriza poziția acestei bare.

Este ușor de observat că în acest mod se pot pune în evidență și legăturile critice ale unui corp, deoarece cu ajutorul parametrilor cinematici scalari se pot determina deplasările infinitezimale relative a două corpuri într-o anumită poziție, deplasări al căror număr diferă în acest caz de la o poziție la alta a corpului respectiv, deci care nu pot fi puse în evidență cu ajutorul parametrilor geometrici scalari. Într-adevăr, dacă examinăm mișcarea barei AB din fig. 17, obligată să se deplaseze în planul xOy, astfel încît extremitatea sa A să rămînă în contact cu axa Ox, iar extremitatea B să parcurgă o dreaptă Δ paralelă cu axa Ox situată față de aceasta la o distanță egală cu lungimea barei AB, vom observa că numărul parametrilor geometrici necesari pentru definirea poziției barei este de unul (distanța x), în timp ce numărul parametrilor cinematici scalari, este doi și anume ω_z, v_{Ax}, mișcarea barei în acest moment fiind definită de vectorii $\bar{\omega}\ (0, 0, \omega_z)$ și $\bar{v}_{Ax}(v_{Ax}, 0, 0)$. Legătura barei este o legătură critică pentru orice poziție a sa; diferența dintre numărul parametrilor geometrici independenți și cel al parametrilor cinematici independenți, care caracterizează poziția sa momentană pun în evidență acest fapt.

Cu această precizare s-a observat că noțiunea de stare cinetostatică relativă a două corpuri, devine o noțiune legată de o anumită poziție relativă a celor două corpuri sau — ceea ce este tot una — de un anumit moment al mișcării relative a celor două corpuri.

b) *Rolul modulelor vectorilor interacțiuni și viteze relative în caracterizarea stării cinetostatice relative a două corpuri.* Să considerăm două corpuri aflate în repaus sau în mișcare și între care există o legătură; să presupunem că asupra acestor corpuri acționează un sistem de forțe exterioare dat. Din mecanica teoretică este cunoscut faptul că mulțimea vectorilor care reprezintă interacțiunile exercitate între cele două corpuri, este determinată din punctul de vedere al orientării, ca și al configurației lor, de forma geometrică a zonei de contact dintre cele două corpuri și de natura legăturii respective (unilaterală sau bilaterală), iar din punctul de vedere al modulelor de către forțele exterioare aplicate celor două corpuri în contact. De asemenea se cunoaște faptul că mulțimea vectorilor care reprezintă vitezele relative posibile a celor două corpuri este determinată din punctul de vedere al orientării și al configurației tot de forma geometrică a zonei de contact, iar din punctul de vedere al modulelor de către sistemul forțelor exterioare care acționează cele două corpuri consi-

derate. Este însă ușor de observat faptul că factorul determinant în aprecierea gradului de mobilitate relativă a celor două corpuri, cît și a gradului de nedeterminare statică, îl constituie nu modulele vectorilor care alcătuiesc mulțimea interacțiunilor sau a vectorilor care alcătuiesc mulțimea mișcărilor relative posibile, ci numărul și configurația suporturilor vectorilor care alcătuiesc aceste două mulțimi. Pentru a

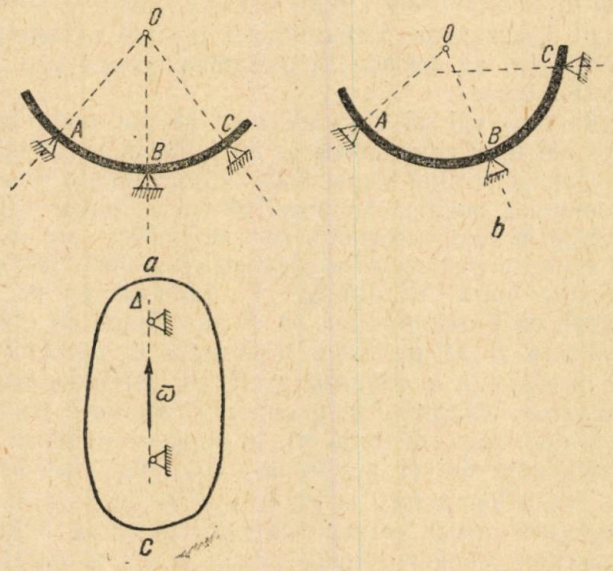


Fig. 18

exemplifica această afirmație este suficient să examinăm cazurile simple prezentate în fig. 18. Astfel, în cazul barei curbe din fig. 18 a, examinînd numărul reacțiunilor reazemelor punctuale A, B și C cît și configurația lor (concurente în O și coplanare), putem spune că oricare ar fi valorile modulelor acestor reacțiuni bara este odată static nedeterminată, pe cînd în cazul barei reprezentate în fig. 18 b, numărul reacțiunilor reazemelor punctuale este tot trei, dar deoarece suporturile lor alcătuiesc o altă configurație (coplanare oarecare) bara este static determinată. În ce privește importanța modulelor vectorilor viteză, în caracterizarea mișcării relative a două corpuri, se poate spune același lucru ca și în cazul modulelor vectorilor interacțiuni; pentru aceasta vom examina cazul mișcării unui solid cu axă fixă reprezentat în fig. 18 c. În acest caz este ușor de observat că oricare ar fi modulul vectorului viteză unghiulară ω care caracterizează mișcarea unui asemenea corp, vector situat pe axa fixă a solidului, poziția sa momentană poate fi caracterizată printr-un singur parametru cinematic, deci el are un singur grad de mobilitate.

Din cele de mai sus rezultă o proprietate importantă a vectorilor care caracterizează interacțiunile a două corpuri, respectiv mișcarea lor

relativă, atunci cînd sînt supuse unei legături: pentru analiza cinetostatică a unei legături, factorul determinant îl constituie numărul vectorilor interacțiune și al vectorilor viteză relativă și configurația lor geometrică.

c) *Mulțimi de interacțiuni și viteze relative posibile și mulțimi de interacțiuni și viteze relative reale la un moment dat.* Este cunoscut faptul că legăturile întîlnite curent în practică sînt legături continui, la care contactul dintre cele două corpuri care se îmbină în legătura respectivă, se efectuează de-a lungul unei suprafețe care este alcătuită din mulțimea punctelor comune celor două corpuri aflate în contact. În anumite cazuri simple, această suprafață poate fi aproximată cu ajutorul unui element geometric avînd o dimensiune mai mică (o curbă sau un punct). După cît este cunoscut din practică, aproximarea oricărei legături cu ajutorul legăturii punctuale — așa cum procedează mecanica teoretică — nu convine oricînd. De aceea în cele ce urmează ne vom ocupa în mod special de contactul continuu dintre două corpuri. În acest caz este evident faptul că vectorii interacțiune dintre cele două corpuri în contact, alcătuiesc o mulțime infinită de vectori ale căror suporturi sînt chiar normalele la porțiunea de suprafață comună celor două corpuri aflate în contact, în punctele acestei suprafețe; presupunem deci în mod implicit că aceste normale există. Din examinarea mulțimii acestor normale, care reprezintă suporturile interacțiunilor, rezultă faptul important că la un moment dat se poate face o distincție între mulțimea tuturor normalelor care reprezintă suporturile vectoriilor interacțiune posibile la un moment dat și mulțimea normalelor care reprezintă totalitatea suporturilor vectoriilor interacțiune, care se transmit în mod real la un moment dat și care, de fapt, formează o submulțime a primeia. Pentru lămurirea acestor idei, să examinăm cîteva cazuri simple. Să considerăm contactul a două sfere; zona de contact în cazul acestei legături este formată dintr-o porțiune de suprafață sferică, ce reunește punctele comune celor două sfere aflate în contact la momentul considerat. Mulțimea tuturor normalelor în punctele acestei suprafețe comune, denumită zonă de contact, reprezintă totalitatea suporturilor vectorilor interacțiune care se transmit la un moment dat între cele două corpuri. Să considerăm acum cazul contactului a două prizme realizat de-a lungul unei muchii foarte ascuțite AB reprezentată în figura 19 a (contact de-a lungul unei curbe). În acest caz datorită conformației legăturii, mulțimea tuturor reacțiunilor care pot fi transmise la un moment dat între cele două corpuri este formată din totalitatea vectoriilor ale căror suporturi sînt normalele segmentului AB (fig. 19 b). Datorită însă modului în care este alcătuită legătura, apare o deosebire între mulțimea reacțiunilor care se pot transmite între cele două corpuri (reacțiuni posibile) și mulțimea reacțiunilor care se transmit în mod efectiv între aceste corpuri (reacțiuni transmise în mod real) Într-adevăr să considerăm punctul O situat pe segmentul AB; în acest punct este cu putință transmiterea oricărei din reacțiunile al cărei suport întîlnește normal segmentul AB în acest punct. O asemenea afirmație este echivalentă în cazul acestei legături cu o nedeterminare în ceea ce privește interacțiunea transmisă în acest punct și care trebuie să fie una singură. Rezultă

deci că în punctele segmentului AB se transmite numai cîte o singură reacțiune din mulțimea reacțiunilor ale căror suporturi intersectează normal acest segment în fiecare din punctele sale. Aceste reacțiuni alcătuiesc de asemenea o mulțime infinită, care este o submulțime a mulțimii reac-

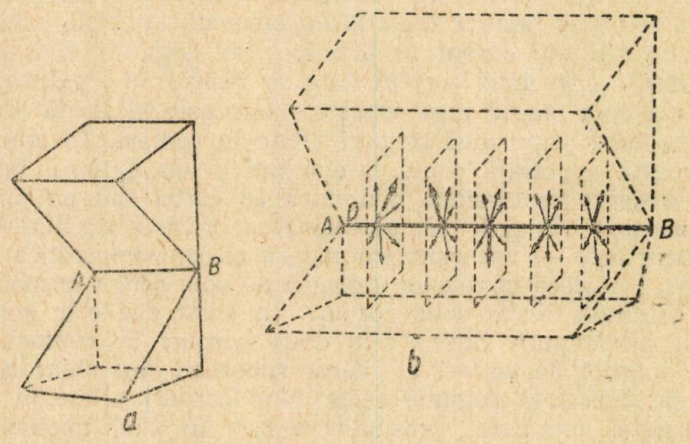


Fig. 19

țiunilor posibile. Situația se petrece în mod analog în ceea ce privește mișcările relative care au loc între cele două corpuri, care se îmbină printr-o legătură. Într-adevăr să considerăm cazul simplu al mișcării a două prizme la care zona de contact este formată dintr-o porțiune de suprafață plană reprezentată în fig. 20. Din mecanica teoretică este cunoscut faptul

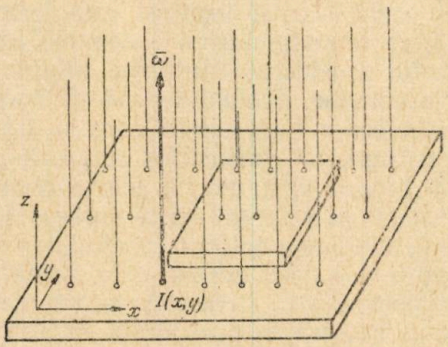


Fig. 20

că mișcarea relativă a acestor două corpuri este determinată cu ajutonul a trei parametri independenți și anume valoarea vitezei unghiulare relative a celor două corpuri în contact (suportul vectorului viteză unghiulară relativă fiind dirijat în lungul normalei comune în punctele zonei de contact, deci avînd o direcție fixă în spațiu) și coordonatele x, y ale punc-

tului I de intersecție al suportului vectorului viteză unghiulară relativă $\bar{\omega}$ cu planul zonei de contact, în raport cu un sistem de axe xOy situat în acest plan. Este însă de precizat faptul că o asemenea caracterizare a mișcării relative a celor două corpuri în contact este valabilă în ce privește mișcarea reală relativă a celor două corpuri, care are loc la un moment dat, dar nu în ce privește mișcarea posibilă relativă a celor două corpuri. Într-adevăr, din fig. 20 se observă faptul că oricare dintre normalele la planul zonei de contact poate servi drept suport pentru un anumit vector viteză unghiulară, care ar reprezenta o mișcare posibilă a celor două corpuri. Rezultă deci că în acest caz particular suporturile vectoriilor viteză unghiulară relativă instantanee care ar caracteriza o mișcare relativă posibilă a celor două corpuri, alcătuiesc o mulțime infinită de drepte paralele cu direcția fixă a normalei la planul zonei de contact într-unul din punctele sale. Mișcarea relativă reală a celor două corpuri, care are lor la un moment dat, are drept suport o submulțime a mulțimii mișcărilor posibile, care în acest caz se reduce la un singur element. Această distincție pe care o facem între mulțimea interacțiunilor și a vitezelor relative posibile și mulțimea interacțiunilor și a vitezelor relative care se realizează la un moment dat într-o legătură care îmbină două corpuri, ultima constituind o submulțime a primeia, va constitui de asemenea un element caracteristic al părții teoretice care va fi expusă în cele ce urmează.

d) *Legături echivalente din punct de vedere static și din punct de vedere cinematic.* Din cele arătate la punctul precedent rezultă faptul că în analiza cinetostatică a unei legături trebuie făcută distincție între mulțimea interacțiunilor și a vitezelor relative posibile și mulțimea interacțiunilor și a vitezelor relative reale. Într-o formă elementară, puțin vizibilă, această distincție este făcută și în mecanica teoretică, precum și în disciplinele care îi folosesc rezultatele, din domeniul teoriei generale a legăturilor. Ea este însă subordonată scopului rezolvării practice a problemelor puse în cadrul acestor discipline sub aspectul determinării modelelor vectorilor interacțiune sau viteză relativă dintr-un sistem de ecuații determinat. Să considerăm, spre exemplu, cazul contactului a două corpuri de-a lungul unei suprafețe cilindrice, caz care poate fi aproximat prin contactul a două cercuri reprezentînd intersecția unui plan perpendicular pe axa cilindrului de contact cu zona de contact. În acest caz mulțimea reacțiunilor posibile transmise între aceste două corpuri și mulțimea reacțiunilor reale coincide. În scopul transformării acestei probleme dintr-o problemă static nedeterminată într-una static determinată se înlocuiește mulțimea infinită a reacțiunilor transmise în mod real între cele două corpuri, prin două reacțiuni care constituie două din elementele acestei mulțimi; se obține astfel legătura reprezentată în fig. 21 b, care constituie de fapt o aproximație a legăturii inițiale prin două reazeme punctuale, legătură pe care o vom denumi *static echivalentă* primeia. Este însă de observat faptul că alegerea elementelor care reprezintă interacțiunile transmise între cele două corpuri în cazul legăturii static echivalente, nu se face la întîmplare. Mai mult chiar, aceste elemente nu pot fi alese întotdeauna astfel încît legătura static echi-

valentă să fie determinată din punct de vedere static. Prima condiție pe care trebuie să o satisfacă aceste elemente, este aceea ca ele să aparțină mulțimii inițiale a interacțiunilor din cazul legăturii reale, deci ca suporturile sale să se afle într-o aceeași configurație geometrică (în cazul nostru concurente și coplanare). O a doua condiție este aceea ca numărul lor să aibe o valoare bine determinată în raport cu configurația suporturilor.

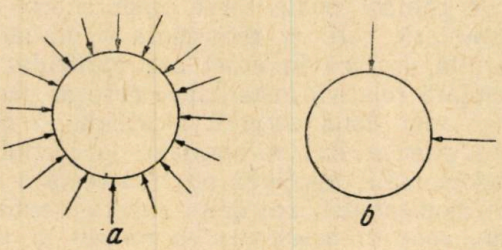


Fig. 21

După cum vom vedea în cele ce urmează fiecare configurație geometrică a suporturilor unei mulțimi de vectori este caracterizată printr-un număr denumit *rangul mulțimii* respective. Anticipînd o serie de rezultate, vom spune că numărul interacțiunilor, legăturii static echivalente, trebuie să fie egal cu rangul mulțimii interacțiunilor legăturii reale. De observat faptul că în acest caz numărul interacțiunilor legăturii static echivalente este egal cu numărul componentelor torsorului de reducere al sistemului de vectori interacțiune ai legăturii reale.

Un alt exemplu este arătat în fig. 22, În acest caz, care reprezintă contactul a două prisme de-a lungul unei porțiuni de plan s-au reprezentat

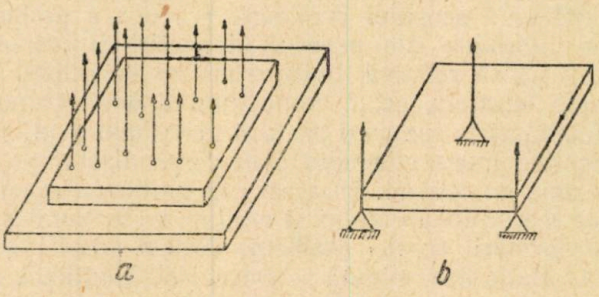


Fig. 22

vectorii interacțiune ai celor două corpuri în contact. Suporturile acestor vectori formează o mulțime de drepte paralele în spațiu. După cum se va vedea în cele ce urmează, rangul unei asemenea mulțimi de drepte este egal cu trei ; acesta este de altfel și numărul interacțiunilor în cazul legăturii static echivalente, acestea fiind reprezentate în fig. 22 b. (legătura static echivalentă este reprezentată prin trei vectori interacțiune ale căror

suporturi se află în aceeași configurație ca și vectorii interacțiune ai legăturii inițiale). Problemele nu sînt diferite în ce privește mișcarea relativă a celor două corpuri în contact. Într-adevăr, dacă examinăm cazul articulației sferice reprezentată în fig. 23, vom constata că mișcările relative posibile ale celor două elemente aflate în contact, pot fi caracterizate printr-o mulțime de vectori viteză unghiulară ale căror suporturi sînt concu-

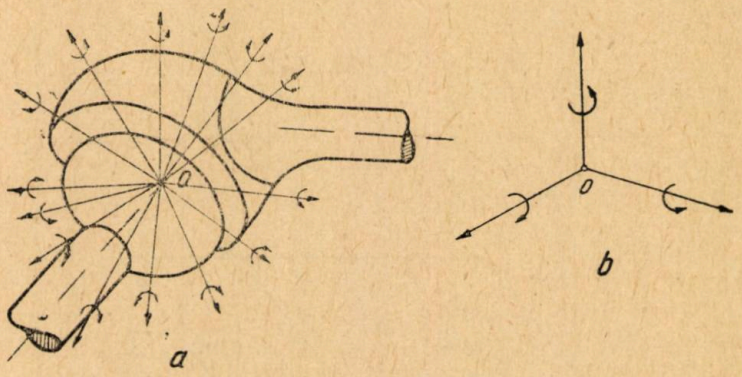


Fig. 23

rente într-un punct O din spațiu (centrul porțiunii de sferă care formează zona de contact). Studiul cinematic al mișcării relative al acestor două corpuri efectuat în mecanica teoretică, ia în considerare numai trei vectori viteză unghiulară din totalitatea vectorilor care reprezintă mișcările relative posibile ale celor două corpuri. Legătura astfel obținută este o legătură *cinematic echivalentă* primeia. Acești trei vectori reprezintă totodată și componentele torsorului de reducere al sistemului de vectori, care reprezintă totalitatea vectorilor viteză unghiulară din mișcările relative posibile. Din aceste exemple se constată că distincția efectuată în mecanica teoretică între starea cinetostatică posibilă a unei legături și stările cinetostatice reale ale aceleiași legături, este efectuată în mod neunitar, lipsit de generalitate.

e) *Echivalența ecuațiilor de proiecție și a ecuațiilor de moment în raport cu o axă, pentru sistemele de vectori avînd torsorul nul.* Metodele mecanicii teoretice privind rezolvarea problemelor de statica, cinematica și dinamica solidului supus la legături, au la bază două noțiuni importante din algebra vectorilor alunecători și anume noțiunea de proiecție a unui vector pe o axă și noțiunea de moment al unui vector în raport cu o axă. Fără ajutorul acestor două noțiuni nu este cu putință determinarea componentelor torsorului de reducere al unui sistem de vectori într-un punct oarecare din spațiu și nici scrierea condițiilor ca sistemul de vectori dat să fie echivalent cu sistemul nul (așa numitele „condiții de echilibru"). Atît operația de reducere a unui sistem de vectori într-un punct din spațiu, cît și operația de echivalență a unui sistem de vectori dat cu sistemul nul, își găsesc aplicații deosebite în toate domeniile mecanicii teoretice (statică, cinematică și dinamică). Din acestea cea mai răspîndită metodă este

aceea a echivalenței unui sistem de vectori cu sistemul nul ; ea se aplică în statică la studiul echilibrului corpurilor, în dinamică la studiul mișcării corpurilor (sub forma metodei cinetostatice sau a principiului lui d'Alembert). iar în cinematică la studiul mișcării relative a corpurilor. Ecuațiile acestei metode sînt denumite ecuații de echilibru ale sistemului de vectori considerat. Examinînd structura acestor ecuații pentru un sistem de vectori oare-

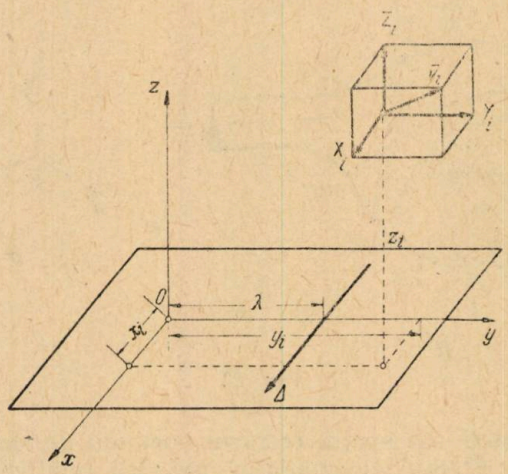


Fig. 24

care în spațiu, constatăm faptul că din totalul de șase ecuații care pot fi scrise în acest caz, trei sînt ecuații de proiecții ale vectorilor sistemului considerat pe axele unui sistem triortogonal, iar celelalte trei sînt ecuații de proiecții ale momentelor vectorilor sistemului considerat în raport cu originea O a sistemului de axe, pe axele aceluiaș sistem. Această structură oarecum neomogenă a sistemului ecuațiilor de echilibru produce o serie de dificultăți la studiul echilibrului și mișcării unui solid, dificultăți care se observă mai ales în interpretarea fizică a rezultatelor obținute în urma rezolvării acestui sistem de ecuații. În scopul înlăturării acestor neajunsuri, vom arăta în cele ce urmează, că orice ecuație de proiecție pe o axă este echivalentă cu ecuația de momente în raport cu dreapta de la infinit a planului normal pe axa considerată (a se vedea și lucrarea [6], pag. 155). Într-adevăr, să considerăm un vector $\bar{v}_i$ aparținînd unui sistem de vectori alunecători (fig. 24). Alegînd un sistem de axe $Oxyz$ proiecțiile vectorului considerat pe axele acestui sistem sînt X_i, Y_i și Z_i. Să considerăm în planul xOy ale acestui sistem o dreaptă Δ paralelă cu axa Ox și orientată în același sens cu această axă. Dreapta Δ se află la distanța λ de axa Ox. Ne propunem să arătăm că ecuația de proiecție a sistemului de vectori considerat pe axa Oz a sistemului de axe ales este echivalentă cu ecuația de momente a aceluiași sistem de vectori în raport cu axa Δ, atunci cînd ea devine dreapta de la infinit a planului xOy, adică atunci cînd $\lambda \to \infty$.

Într-adevăr, ecuația de momente a sistemului de vectori considerat în raport cu axa Δ este:

$$\Sigma M_\Delta = \Sigma [Z_i (y_i - \lambda) - Y_i z_i] = 0 \tag{4}$$

care atunci cînd $\lambda \to \infty$ devine:

$$\Sigma Z_i = 0 \tag{5}$$

fapt care justifică afirmația de mai sus.

In cele de mai sus am prezentat o serie de particularități ale mărimilor care definesc starea cinetostatică relativă a două corpuri cu scopul ca, pe de o parte, să punem în evidență mai bine structura fizică a acestor mărimi, să arătăm paralelismul care există între cele două elemente care definesc această stare — interacțiuni și viteze relative — iar, pe de altă parte, să punem în evidență factorii esențiali care caracterizează aceste mărimi. Observațiile prezentate ne-au servit la elaborarea unei metode teoretice noi privind analiza cinetostatică a legăturilor unui solid; această metodă va fi expusă într-o lucrare viitoare.

Catedra de mecanică teoretică
Institutul Politehnic din București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Freudenstein F.:* Trends in the kinematics of mechanisms, Applied Mechanics Reviews, Tom 12, No. 9, septembrie 1959.

[2] *Mazilu P.:* Statica construcțiilor, vol. I, Editura Tehnică, București, 1958.

[3] *Морошкин Ю. Ф.:* Основы аналитической теории Механизмов, Труды семинара по теорий Машин Механизмов, АНСССР, Том. XVI, выпуск 54, 1948.

[4] *Морошкин Ю. Ф.:* Вопросы геометрии сложных кинематических цепеи, ДАН, Том. 119, 1958.

[5] *Тайнов А. И.:* Основы теории структуры Механизмов, ВПИ, Минск, 1959.

[6] *Vilcovici V., Bălan St., Voinea R.:* Mecanica Teoretică, Editura Tehnică, București, 1959.

[7] *Voinea R., Atanasiu M.:* Contributions à la théorie géométrique des vis, Buletinul Institutului Politehnic București, Tom XXI, Nr. 3, 1959.

[8] *Voinea R., Atanasiu M.:* Contributions à l'étude de la structure des chaînes cinématiques, Buletinul Institutului Politehnic București, Tom XXII, nr. 1, 1960.

ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СВЯЗЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

(краткое содержание)

Теперешняя стадия теории связей твердого тела не позволяет разрешения в общем и одновременно в практическом виде вопросов, имеющих большое значение для кинетостатического анализа и синтеза систем тел.

В настоящей работе выявляются основные вопросы теории связей, трудности связанные с их решением, а также целый ряд особенностей величин, характеризующих относительное кинетостатическое состояние двух тел.

CONSIDERATIONS ON THE GENERAL THEORY OF THE CONSTRAINTS OF A SOLID BODY

(Summary)

The present state of the theory of the constraints of the solid body does not allow a general — and at the same time, a practical — solution of a series of problems of great importance for the kinetostatic analysis and synthesis of the systems of bodies.

In this paper are shown the fundamental problems of the theory of constraints, the difficultiesmet in their solution, as well as a series of particularities relative to the features which characterise the relative kinetostatic state of two bodies.

CONSIDÉRATIONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES LIAISONS DU CORPS SOLIDE

(Résumé)

Le stade actuel de la théorie des liaisons des corps solides ne permet pas la solution générale en même temps que pratique, d'une série de problemès de grande importance pour l'analyse et la synthèse cinétostatique des systèmes de corps.

Dans cet article, on met en évidence les problèmes fondamentaux de la théorie des liaisons, les difficultés soulevées par leur solution, ainsi qu'une série de particularités des grandeurs qui caractérisent l'état cinétostatique relatif de deux corps.

BEITRÄGE BEZÜGLICH DER ALLGEMEINEN THEORIE DER SOLIDEN BINDUNGEN

(Zusammenfassung)

Das der zeitige Studium der Theorie der soliden Bindungen gestattet nicht die Lösung in allgemeiner und gleichzeitig praktischer Art einer Reihe von Problemen von grosser Bedeutung für kynetostatische Synthese der Körpersysteme.

In dieser Arbeit werden Grundprobleme der Theorie der Bindungen hervorgehoben, die mit deren Lösung verbundenen Schwirigkeiten sowie eine Reihe von Beschaffenheiten der Grössen die, die kynetostatische Lage bezüglich schweier Körper charakterisieren.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ДИНАМИКИ ФЛЮИДИЗАЦИИ

ИОН ТЕОРЯНУ

Настоящая работа предлагает занятся некоторыми вопросами касательно динамики флюидизации, которые представляют практический интерес; они находятся в тесной связи между собой и ставят себе конечной целью получения информаций относительно оптимальных условий флюидизации, а также и установление некоторых уравнений более широкого характера касающихся доли пустоты кипящего слоя. Наибольшее количество соображений которые мы приводим касаются флюидизации газами.

I. *О критерии стабильности неоднородностей кипящего слоя.*

1. Проведенными исследованиями до настоящего времени указывается что с гидродинамической точки зрения существуют два рода флюидизации:

а) однородная флюидизация — характеризующаяся равномерным распределением частиц в слое — замечается главным образом тогда, когда агентом флюидизации является жидкость и

б) неоднородная флюидизация, когда твердые частицы образуют агрегаты частиц, а часть газа проходит через слой в виде пузырьков относительно больших в сравнении с размерами частиц — появляется главным образом при флюидизации и газами.

В случае однородной флюидизации, фракция пустоты не меняется чувствительно внутри слоя, тогда как в неоднородном кипящем слое агрегаты частиц характеризуются меньшей величины фракции пустоты, чем среднее значение всего слоя; эти разницы тем больше, чем больше неоднородность слоя. Вильгельм и Квоук [1] показали, эмпирическим путем, что существует известный параллелизм между степеню неоднородности и числом Фруде; Викке и Геден [2], а также Гравинский [3] и Гаррисон с сотрудниками [4] привели некоторые теоретические обоснования в доказательство этих наблюдений. Гаррисон с сотрудниками утверждает, что как правило когда $Fr < 1$ замечается однородная флюидизация, а когда $Fr > 1$ — флюидизация неонородна. Все эти авторы подчеркивают также существование некоторых исключений, которым они не могут дать об'яснения.

В работах [5, 6] подчеркивается, что появление неоднородности об'ясняется либо существованием в слое некоторых значительных межчастичных сил, либо гидродинамической неустойчивости структуры. В слое флюидизированном жидкостями, смазывающий эффект делает, чтобы межчастичные силы становились менее значительными и как следствие частицы расширяются равномерно, структура слоя становсяь упорядоченной.

При газовой флюидизации, смазывающий эффект является намного менее значительным, межчастичные силы мешают равномерному расширению частиц, которые образуют агрегаты частиц; часть газа проходит через слой в виде пузырьков относительно больших в сравнении с размерами частиц. В случае когда межчастичные силы незначительны, появление неоднородностей об'ясняется неустойчивостью упорядоченной структуры слоя, как следствие некоторых пертурбаций гидродинамического происхождения. Исследуя этот последний аспект проблемы Е. Рукенштейн [5] выявляет теоретическим путем, в случае наиболее неблагоприятных условий с точки зрения устойчивости, что однородный состав не является устойчивым. Одновременно приходит к выводу, что неустойчивость однородного состава более мала при флюидизации жидкостями, чем при флюидизации газами. Расчеты, сделанные Е. Рукенштейном, показывают, что степень неустойчивости однородного состава является тем меньше, чем более мал фактор

$$\Psi \equiv \frac{\varrho_f}{\varrho_s + m\varrho_f} \cdot \frac{w_{min}^2}{Rg} \left(\frac{\partial c\varphi^2}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_{min}} \tag{1}$$

Можно показать, что этот фактор является более малый, в случае флюидизации жидкостями.

Другой противоположный случай, не был до сего времени исследован в литературе. Это и ставим мы своей задачей в настоящей работе.

2. Обсуждаемая проблема имеет практическое значение лишь в случае газовой флюидизации, где межчастичные силы могут быть значительными. В работе [7] указывается, что в слое с газовой флюидизацией часть газа (прерывная фаза) пробивается через слой в виде пузырьков, а другая часть (непрерывная фаза) проходит через агрегаты частиц. Указанные две фазы являются практически несмешивающимися столько времени, сколько пузырьки и агрегаты частиц являются устойчивыми. В момент когда, при увеличении скорости газа, межчастичные силы становятся достаточно малыми, как следствие увеличения расстояния между частицами, а флюктуации давления из пузырьков достаточно большими, как следствие флюктуаций скорости газа, пузырьки газа и агрегаты частиц становятся неустойчивым, а указанные две фазы становятся смешивающимися, смешиваемость газ — индивидуальные частицы делается лучшей. Имеет место переход от флюидизации, характеризуемой наличием в слое устойчивых пузырьков, к флюидизации, характеризуемой неустойчи-

востью пузырьков (область квазиоднородная). Необходимо отметить одновременно, что современно со скоростью имеет место и рост величины пузырьков, что предполагает рост гидростатического сверхдавления в пузырьках; это действйет также в сторону уничтожения агрегатов частиц, „растворения" пузырьков в непрерывной фазе. Однако, оценка этой величины показывает, что ее влияние не может быть значительным, как следствие ее уменщенного значения в соответствии с флюктуациями динамического давления газа из пузырьков. Из вышеизложенного следует, что переход к квазиоднородному состоянию зависит существенно для случая о котором идет речь, от значения межчастичных сил, от соотношения, которое устанавливается между межчастичными силами и силами, которые действуют в пузырьках как следствие флюктуаций динамического давления.

Проведенные опытные исследования показываеют, что межчастичные силы уменьшаются при повышении стенени флюидизации W и диаметра флюидизированных частиц d; также установлено, что они зависят в значительной степени от природы твердых частиц, от природы их поверхности, а также и от природы потока (ϱ_f, ν). Таким образом, мы напишем, для межчастичных сил F_i, упрощенное выражение

$$F_i = f(d, \varrho_f, \nu, \varphi_a)\, W^{-a}, \tag{2}$$

в котором φ_a — представляет величину, характеризирующую природу твердых частиц с точки зрения межчастичных сил; ее смысл мог бы быть приравнен к механической работе распада пачек частиц, отнесенной к поверхности частиц находящихся в единицу обьеома.

По размерным соображениям возможно выразить функцию f через :

$$f \sim \left(\frac{\varphi_a \varrho_f \nu^2}{d^2}\right)^{1/2}$$

и следовательно

$$F_i \sim W^{-a}\left(\frac{\varphi_a \varrho_f \nu^2}{d^2}\right)^{1/2} \tag{2'}$$

где

$$a > 0\,.$$

С другой стороны силы, которые действуют в пузырках как следствие динамического давления — F_p — несомененно зависят от флюктуаций кинетической энергии газа. Так как флюктуации скорости выражаются через

$$\left(\frac{\partial \frac{w}{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}\right)_{\sigma_\varepsilon}$$

следует что :

$$F_p \sim \frac{w^2}{\varepsilon^4} \sigma_\varepsilon^2 \varrho_f D_b^2 \tag{3}$$

где w — скорость потока в пустой трубе ;
ϱ_f — плотность потока ;
D_b — диаметр газовых пузырьков ;
σ_ε^2 — квадратное среднее отклонение фракции пустот ;
ε — фракции пустот.

На основании соотношения, которое устанавливается между силами F_i и F_p, как это подчеркивалось ранее, возможно построить группу без размеров, критерий для оценки устойчивости неоднородностей флюидизированного слоя, неоднородностей появление которых вызывается существованием межчастичных сил :

$$K_s = \frac{\varphi_a \nu^2 \varepsilon^8}{W^{2a} w^4 d^2 D_b^4 \varrho_f \sigma_\varepsilon^4}. \tag{4}$$

Чем больше неустойчивость газовых пурырьхов, тем меньше критерий K_s *)

II. *О величине* φ_a.

Проблема опытного определения величины, характеризующую межчастичные силы, представляет особый интерес с точки зрения изучения и оценки структуры флюидизированного слоя.

В одной из предыдущих работ [8] обсуждается одна из возможностей оценки значения межчастичных сил, которая исходит из наблюдения процесса расширения агрегатов частиц, образующихся в неоднородном флюидизированном слое. Межчастичные силы тормозят расширение агрегатов частиц. Чем межчастичные силы будут более или менее значительными, тем меньшим или большим будет и расширение агрегатов частиц, характеризируемое фракцией пустот. Показательно, и это было установлено опытом [9, 10, 11], что в слоях, в которых межчастичные силы очень значительны, агрегаты частиц в области, характеризируемой существованием устойчивых неоднородностей, практически остаются нерасширяемыми и следовательно :

$$\varepsilon_p \approx \varepsilon_{min}$$

*) В работе [7] изучая переходный момент к квазиоднородной области для слоев, составленных из относительно больших и гладких частиц ($d > 300$ μ), стало возможным получить уравнение для критической переходной скорости к упомянутой области. Тот факт, что в этом уравнении не появляется ни одна характеристика природы материала, об'ясняется малым значением межчастичных сил в случае исследуемых области флюидизации о которой идёт речь ; в этом случае слои характеризуются посредством малых значений критерия K_s.

Но как правило

$$\varepsilon_p > \varepsilon_{min}$$

предыдущий случай представляя лишь предельное положение.

Итак, получив сведения в отношении ε_p, возможно вывести заключение в отношении расширения межчастичных сил, а следовательно и в огношении значений межчастичных сил.

С этой целью в работе [8] представлен способ. На этом основании получается — представляя графически группу $T_\varepsilon \equiv \frac{w\,\varepsilon_p}{w_{min}\,\varepsilon_{min}}$ как функция степени флюидизации $W = \frac{w}{w_{min}}$ прямые, характерные для различных флюидизированных материалов.

Таким образом, учитывая указанные результаты, определили характерный фактор с точки зрения межчастичных сил, посредством:

$$K_f = \frac{W-1}{T_\varepsilon - 1}, \tag{5}$$

которое представляет обратную наклонной характерных приямых флюидизированных систем, упомянутых выше.

Фактор K_f принимает значение

$$0 < K_f \leqslant 1$$

Опытные замечания показали, что

$$K_f = f(\varphi_a,\ d,\ \varrho_f,\ \nu) \tag{6}$$

С другой стороны, флюидизируя воздухом частицы из того же материала разной гранулометрии, получаются значения для K_f, которые кажется могут быть удовлетворительно представлены уравнением.

$$\ln K_f = a - b \ln d \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет фактически частный случай выражения:

$$\ln K_f = n \ln \frac{k\varphi_a}{\varrho_f \nu^2} - 2n \ln d \tag{8}$$

выведенной согласно с предыдущим замечанием из размерных соображений, на основании соотношения (6) (n — является показателем, k — постоянной пропорциональности).

Отсюда вытекает, что имея сведения о факторе K_f, возможно получить соответственные значения величины φ_a.

III. *Уравнения, касающиеся фракции пустот в неоднородной области флюидизации.*

Обработка опытных данных, полученных для фракции пустот в неоднородной области флюидизации (в которых неоднородности устойчивы) привели к кривым, представленным на рис. 1.

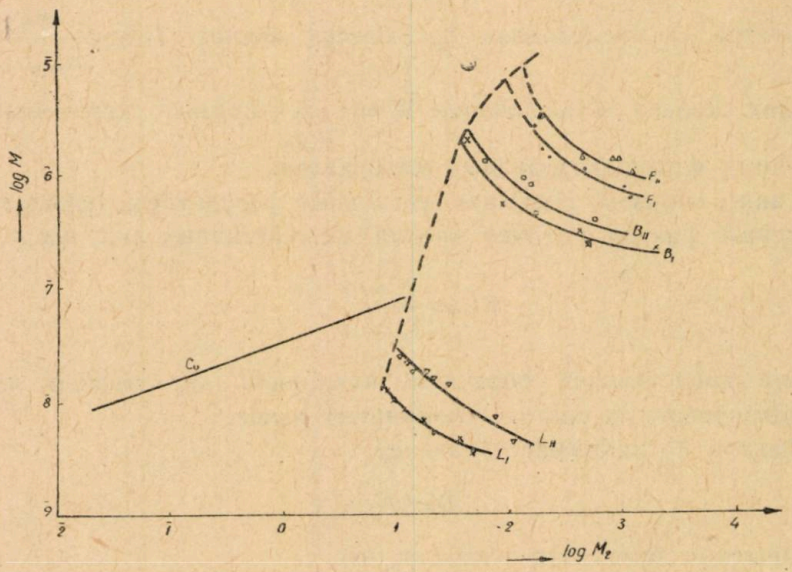


Рис. 1

C_u — Единственная кривая для слоев из относительно больших частиц

Собственные данные

F_I — цементная мука $d = 3 \cdot 10^{-5}$ m. $D_t = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ m.
F_{II} — так же $D_t = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ m.
B_I — Бикарбонат натрия $d = 7 \cdot 10^{-5}$ m. $D_t = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ m.
B_{II} — Так же $D_t = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ m.

Данные по Люису и сотр.

L_I — Стекляные сферы $d = 1{,}55 \cdot 10^{-4}$ m. $D_t = 6{,}35 \cdot 10^{-2}$ m.
L_{II} — Так же $d = 1{,}015 \cdot 10^{-4}$ m. $D_t = 6{,}35 \cdot 10^{-2}$ m.

Из рис. 1 вытекает, что в области характеризуемой через:

$$2{,}80 < G_a < 1\,800$$

$$w_{min} < w < w_{cr}$$

получается единная кривая, выражение которой дано уравнением:

$$M_0 = 3{,}14\ M_2^{0{,}3}\ , \qquad (9)$$

в которой:

$M_0 \equiv 10^8\, Ar^{-1,3}\, Ar^{*\,0,5}\, \Gamma^{-0,8}\, Z_2^{0,5}\, B$

$M_2 \equiv Ar^*\, Ga^{-1,35}$

$B \equiv (1-\varepsilon)\, Ar\, R_e^{*\,-1,54}$

$Ar \equiv Ga\,\Gamma$ — число Архимеда

$Ga \equiv \dfrac{d^3 g}{\nu^2}$ — число Галилея

$\Gamma \equiv \dfrac{\tau_s - \tau_f}{\tau_f}$ — симплекс

Ar_1^* — число Архимеда, вычисленное с диаметром колоны

Ar^* — число Архимеда, вычисленное посредством гидравлического радиуса

$R_e^* \equiv \dfrac{l\,w}{\varepsilon\,\nu}$ — число Рейнольдса, вычисленное посредством гидравлического радиуса

$Z_2 \equiv \dfrac{d}{D_t}$ — геометрическое соотношение

$l \equiv \dfrac{\varepsilon\, d}{6(1-\varepsilon)}$ — гидравлический радиус.

В области

$$G_a < 2{,}80\ ;\quad w_{min} < w < w_{cr}$$

получаются различные кривые, характерные каждой системе. Системы, для которых не удалось получить единую кривую, состоит из малых часиц, в которых значение величины φ_a — чувствительно различно от одной системы к другой; уравнение (9) относится к слоям, составленным из больших частиц, характеризуемых посредством малых значений межчастичных сил и для которых, следовательно, величина φ_a — имеет практически те же значения *).

Весьма вероятно что возможно написать для области флюидизации, на которую мы ссылаемся, единое выражение для фракции пустот, а также в случае слоев, характеризуемых посредством значительных значений межчастичных сил; это выражение имеет вид:

$$M_0 = m\, M_2^n\, f(\varphi_a) \qquad (10)$$

До настоящего времени у нас нет достаточных экспериментальных данных в отношении величиню φ_a, которые нам позволили бы написать функцию $f(\varphi_a)$ в явном виде.

*) Относительное распространение точек на кривой из рис. 2, выраженной уравнением (9) — вероятно об'ясняется малыми, но все таки существующими, разницами в значении φ_a, для разных слоев.

IV. *Выводы.*

В настоящей работе было рассмотрено несколько проблем динамики флюидизированного слоя, исходя для этой цели из изображения механизма процесса образования структуры флюидизированного слоя,

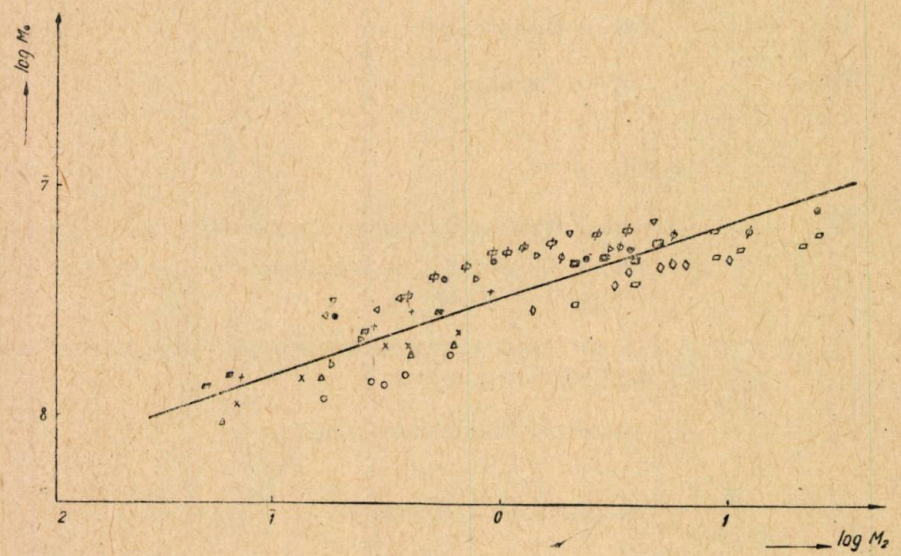


Рис. 2

1. Флюидизация воздухом: а) колонка с $D_t = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ m:
   • маковые семя; ✕ рапсовые семя; ○ горчицовые семя;
   ◇ стеклянные сферы $d = 0{,}392 \cdot 10^{-3}$ m.
   б) колонка с $D_t = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ m: ▽ маковые семя;
   ▷ рапсовые семя.
   в) колонка с $D_t = 3{,}9 \cdot 10^{-2}$ m: □ стеклянные сферы
   $d = 0{,}417 \cdot 10^{-3}$ m, Ф полистирен $d = 1{,}35 \cdot 10^{-3}$ m.
   г) колонка с $D_t = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ m; □ стеклянные сферы.
   $d = 0{,}392 \cdot 10^{-3}$ m, ∅ стеклянные сферы $d = 0{,}417 \cdot 10^{-3}$ m.
2. Флюидизация с CO_2; а) колонка с $D_t = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ m:
   + рапсовые семя; △ горчицовые семя.
   б) колонка с $D_t = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ m: ◁ прасолые семя;
   ⌭ горчицовые семя.

согласно которой появление неоднородностей в флюидизированном слое является следствием либо существования в слое значительных межчастичных сил, либо гидродинамической неустойчивости однородной структуры.

При обсуждении случая, в котором появление неоднородности об'ясняется межчастичными силами, устанавливается как критерий устойчивости пузырьков безразмерная группа:

$$K_s = \frac{\varphi_o \nu^{\prime\prime} \varepsilon^8}{W^{2a} w^4 d^2 D_b^4 \varrho_f \sigma_\varepsilon^4} \equiv \frac{\Phi}{R_\varepsilon^2}$$

Критерий K_s тем более мал, чем флюидизированные системы представляют большую неустойчивость неоднородностей, следовательно более подчеркнутое стремление к однородности.

Также указывается путь, которым можно получить сведения в отношении межчастичных сил и в последней инстанции в отношении величины φ_a На этом основании и используя данные опытов, которыми располагаем, устанавливаются соответствующие уравнения в отношении фракции пустот флюидизированного газами слоя, в неоднородной области.

Примечания

ϱ_f — плотность потока

ϱ_s — плотность твердых частиц

w_{min} — минимальная скорость флюидизации

c — коэффициент сопротивления

φ — функция фракции пустот

ε — фракция пустот

$W \equiv \frac{w}{w_{min}}$ — степен флюидизации

d — диаметр частиц

φ_a — величина, которая характеризует природу твердых частиц с точки зрения межчастичных сил

D_b — диаметр пузырьков

σ_e^2 — квадратное среднее отклонение фракции пустот

ν — кинематическая вязкость

$Ga \equiv \frac{d^3 g}{\nu^2}$ — число Галилея

ε_{min} — минимальная фракция пустот

$Ar \equiv Ga\,\Gamma$ — число Архимеда

$\Gamma \equiv \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_f}$ — симплекс

γ_f — удельный вес потока

γ_s — удельный вес твердых частиц

W_{cr} — степень флюидизации в момент нерехода к квазиоднородной области

ε_p — фракция пустот в агрегатах частиц

Ar_1^* — число Архимеда, вычисленное с диаметром колоны

Ar^* — число Архимедл, вычисленное е гидравлическим радиусом

l — гидравлический радиус

$Z_2 \equiv \frac{d}{D_t}$ — геометрическое отношение

$D_t = 2R$ — диаметр колонны

$\overset{*}{Re} \equiv \frac{l w}{\varepsilon \nu}$ — число Рейнольдса, определенное через гидравлический радиус

Re — число Рейнольдса, опеределенное через диаметр частиц

$\Phi \equiv \left[\left(\frac{\varphi_a g}{D_b^2 \gamma_f}\right) \Big/ (w D_b)^2\right] \frac{\varepsilon^6}{\sigma_\varepsilon^4 W^{2a}}$ — число без размеров

w_{cr} — критическая скорость перехода к квазиоднородной области

g — ускорение силы тяжести

m, n, a, b, k — коэффициенты.

Кафедра „Процессы и аппараты"
Бухарестский Политехнический Институт

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] *Вильгельм Р. Х.* и *Кваук К. М.* — Chem. Eng. Progres, *44*, 201, (1948 г.).
[2] *Вике Е.* и *Хедден К.* — Chem. Ing. Technik, *24*, 82 (1952 г.).
[3] *Травинский Х.* — Chem. Ing. Technik, *25*, 229 (1953 г.).
[4] *Гаррисон Д., Давидсон Ж. В., Кук Ж. Б.* — Trans. Inst. Chem. Engrs. *39*, 202 (1961 г.).
[5] *Рукенштейн Е.* Revue de physique *7*, 137 (1962).
[6] *Рукенштейн Е.* и *Теоряну И.* — Работа, посланная с'езду по флюидизации в Праге (в мае 1961 г.).
[7] *Рукенштейн Е.* и *Теоряну И.* Бюллет. Бухарестского Политех. института, т. XXI, вып 4 (1959 г.).
[8] *Теоряну И.* Бюллет. Бухарестского Политех. ин-та т. XXIV, вып. 1 (1962).
[9] *Плановский А. Н., Мартюшин И. Г.* и *др.* — Исследование по газодинамике применительно к аппаратам с противотоковым контактом Отчет М И Х М — (Москва 1959 г.).
[10] *Бэккер П. И.* и *Гертжес П. М.* — Brit. Chem. Eng. *4*, 240 (1958 г.).
[11] *Теоряну И.* — Rev. de chimie, Bucureşti, *11*, 691 (1960).

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ О ДИНАМИКЕ КИПЯЩЕГО СЛОЯ

(Краткое содержание)

В этой работе, изучаясь динамика кипящего слоя, включается критерий стабильности пузырей газа. Одновременно делаются некоторые уточнения относительно межчастичных сил и установливаются быражеиия для фракции пустот кипящего слоя в той области в которой пузыри газа неустойчибы.

SOME PROBLEMS OF THE FLUIDISATIONS DYNAMIC

(Summary)

In this work, a criterium of the stability of gas bulbes is being worked out on the basis of studying the dynamic of fluidised bed. Some considerations regarding the interparticular forces are being presented also and relations for the fraction void of the fluidised bed are being established for the cases when the gas bulbes are stable.

SUR QUELQUES PROBLEMES CONCERNENT LA DYNAMIQUE DE LA FLUIDISATION

(Résumé)

En partant de l'etude dé la dynamique d'une couche fluidisée, on introduit un critère de stabilité des bulles de gaz. On fait en même temps quelques precisions au sujet des forces qui actionnent entre particules. Pour le domaine de stabilité des bulles de gaz, des relations sont établies pour la fraction de vide.

EINIGE FRAGEN DER DINAMIK DER WIRBELSCHICHTBETTES

(Zusammenfassung)

In diesem Werke, das die Dynamik der Wirbelschichtbettes, bringt man einen Stabilitätkriterium der Gasblasen.

Es werden auch gleichzeitig einige Richtigstelungen bezüglich der Zwischenpartikelnkräfte gemacht und es werden festgesetzt Verbindungen für die Leerfraktion der Wirbelschichtbettes, im Bereich in dem die Gasblasen stabile sind.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

DIMENSIONAREA ECONOMICĂ A SCHIMBĂTOARELOR FINALE, DE CĂLDURĂ ALE AGREGATELOR DE CAZANE DE ABUR *

ȘTEFAN GHEORGHIU și GHEORGHE ANTONESCU

1. Introducere

Ridicarea randamentului, prin coborîrea temperaturii gazelor de ardere la ieșire și folosirea combustibililor inferiori, cu conținut mare de apă, duc la creșterea debitului procentual de căldură, care se transmite prin schimbătoarele de căldură finale ale agregatelor de cazane de abur, raportat la debitul de căldură schimbat în întregul agregat și deci la creșterea suprafeței de încălzire a schimbătoarelor de căldură finale, raportată la suprafața de încălzire a întregului agregat.

Ca urmare, greutatea de metal întrebuințat la construcția economizoarelor și a preîncălzitoarelor de aer crește, putînd reprezenta partea cea mai mare din greutatea de metal a schimbătoarelor de căldură ale întregului agregat de cazan.

În prezenta lucrare se examinează schimbătoarele de căldură, finale, construite din țevi netede, drepte sau îndoite în serpentine. De asemenea se consideră că fluidul, care circulă în exteriorul țevilor are o direcție perpendiculară pe axa țevilor și se neglijează transmiterea de căldură prin radiația gazelor, avînd în vedere zona de temperaturi scăzute ale gazelor de ardere, în care sînt așezate aceste schimbătoare. Tot astfel se consideră că diametrul țevilor ca și distanța între țevi sînt constante, întrucît micșorarea lor poate fi limitată de posibilitatea de obturare a secțiunii de trecere a fluidelor, prin depuneri, și de curățire iar măririi lor se opune creșterea spațiului ocupat.

În sfîrșit, nu se ține seama de uzura, ce poate fi produsă de o viteză prea mare a gazelor de ardere, în cazul unor combustibili cu conținut ridicat de cenușă și se neglijează pierderile de căldură ale suprafețelor exterioare ale schimbătoarelor de căldură către mediul ambiant.

În aceste condiții, pentru un debit de căldură dat, care se transmite prin schimbătorul de căldură de convecție, pentru temperaturi date ale celor două fluide, cald și rece, la intrarea și la ieșirea din schimbător și pentru un mod de dispoziție a țevilor (în linie sau alternat), dat, supra-

* Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din I.P.B., 7—8 aprilie 1962.

fața de încălzire a economizoarelor scade cînd crește viteza gazelor de ardere, iar aceea a preîncălzitoarelor de aer scade cînd crește viteza ambelor fluide. În aceleași condiții, pierderea de presiune în circuitul fluidului, care circulă prin exteriorul țevilor, crește cînd crește viteza acestui fluid și cînd crește numărul de țevi de-a lungul curgerii acestuia, iar pierderea de presiune în circuitul fluidului, care circulă prin interiorul țevilor, crește cînd crește viteza acestui fluid și cînd crește lungimea țevii, străbătută de fluid de la intrarea în schimbător pînă la ieșirea din acesta. În consecință, în condițiile stabilite, scăderea suprafeței de încălzire obținută prin creșterea vitezei fluidului cald în cazul economizoarelor și prin creșterea vitezelor ambelor fluide în cazul preîncălzitoarelor de aer, are ca urmare o creștere a consumului de energie, produsă de creșterea pierderii de presiune în circuitul fluidelor. Micșorarea cheltuielii produsă de construcția schimbătoarelor de căldură finale, ale agregatelor de cazane de abur, prin micșorarea suprafeței de încălzire respective și deci a greutății de metal, nu trebuie privită din punct de vedere economic, în mod izolat, ci împreună cu creșterea cheltuielii produsă de consumul de energie.

2. Criteriul dimensionării economice

Soluția cea mai avantajoasă, din punct de vedere economic, a unei instalații industriale, mașină sau utilaj, producînd o cantitate dată de produse, de aceeași calitate, în unitatea de timp, este dată, judecînd eficacitatea economică a investiției, potrivit căreia o soluție, avînd investiții mai mari, poate fi mai avantajoasă decît altă soluție, avînd investiții mai mici, dacă cheltuielile anuale ale primei soluții sînt mai mici decît ale soluției a doua, astfel ca surplusul de investiții să fie recuperat din economia de cheltuieli anuale într-un interval de timp dat, numit termen de recuperare. Dacă :

I este cheltuiala de investiție, în lei,
r — termenul de recuperare, în ani,
A — cheltuiala anuală, în lei/an,

cheltuiala, care caracterizează o soluție, din punctul de vedere al eficacității economice a investiției, este cheltuiala anuală de calcul Z :

$$Z = \frac{I}{r} + A \tag{1}$$

iar soluția cea mai avantajoasă din punct de vedere economic este soluția cu eficacitatea economică maximă, adică acea soluție pentru care cheltuiala anuală de calcul Z este minimă.

În cazul considerat, cheltuiala de investiție se compune din cheltuiala necesară construcției suprafeței schimbătoarelor de căldură și din cheltuiala necesară construcției instalațiilor necesare circulației fluidelor prin schimbătoare. Cheltuiala anuală se compune din amortizarea cheltuielii de investiție și din cheltuiala produsă de consumul de energie electrică necesară circulației fluidelor prin schimbătoarele de căldură. Întrucît s-a

presupus că temperaturile gazelor de ardere la intrare și ieșire sînt date, consumul de combustibil al agregatului de cazan nu variază cînd vitezele fluidelor și dimensiile schimbătoarelor de căldură variază și, deci, cheltuiala de combustibil este constantă. De asemenea se presupune că personalul de exploatare necesar schimbătoarelor de căldură construite în condițiile sus arătate, întreținerea și reparația lor nu sînt influențate de variația vitezelor fluidelor și a dimensiilor schimbătoarelor. Prin urmare, dacă :

F este suprafața de încălzire a schimbătorului de căldură considerat, în m^2 ;

N_e, N_i sînt puterile electrice consumate pentru circulația fluidelor care circulă prin exteriorul, respectiv prin interiorul țevilor, în kW ;

p_f este cheltuiala specifică de investiție, necesară construcției schimbătorului de căldură, în lei/m^2 ;

p_e, p_i sînt cheltuielile specifice de investiție, necesare construcției instalațiilor de circulație a fluidelor care circulă prin exteriorul, respectiv prin interiorul țevilor, în lei/kw ;

a este cota de amortizare a cheltuielilor de investiție ;

h — durata anuală de funcționare a schimbătorului cu debitul de căldură dat, în h/an ;

p_n — prețul energiei electrice consumate în lei/kWh ;

cheltuiala anuală de calcul este :

$$Z=\left(\frac{1}{r}+a\right)(F\,p_f+N_e\,p_e+N_i\,p_i)+(N_e+N_i)\,h\,p_n \text{ sau :}$$

$$Z=\left(\frac{1}{r}+a\right)p_f F+\left[\left(\frac{1}{r}+a\right)p_e+h\,p_n\right]N_e+\left[\left(\frac{1}{r}+a\right)p_i+h\,p_n\right]N_i \quad (2)$$

3. Simboluri utilizate

Pentru o prezentare unitară, se indică mai jos simbolurile utilizate, în mod general, pentru dimensionarea economică, atît a economizoarelor, cît și a preîncălzitoarelor de aer, în afară de simbolurile prezentate mai sus. În cele ce urmează, mărimile legate de cele două fluide au fost caracterizate prin poziția fluidelor în raport cu țevile schimbătoarelor de căldură, ca „exterioare" sau „interioare".

Q este debitul de căldură care se transmite prin schimbător, în kcal/h ;

V_e, V_i sînt debitele de fluid, în stare gazoasă, exterior, resp. interior, în Nm^3/s ;

V_{er}, V_{ir} — idem, în stare lichidă, idem, în m^3/s ;

T_e, T_i — temperaturile medii ale fluidelor exterior, resp. interior, în °K ;

n_e, n_i — numerile de drumuri în serie ale fluidelor exterior, resp. interior ;

Δt_m este diferența medie logaritmică de temperatură între temperatura celor două fluide, corespunzătoare modului de circulație presupus al fluidului exterior și numărului de drumuri în serie a fluidelor, în °C ;

x — numărul de țevi, în plan perpendicular pe direcția de curgere a fluidului exterior ;

z — numărul de țevi, de-a lungul curgerii fluidului exterior ;

s_1 — pasul relativ al țevilor (raportul distanței între axele țevilor și diametrul exterior al țevilor), în plan perpendicular pe direcția de curgere a fluidului exterior ;

s_2 — pasul relativ al țevilor, de-a lungul curgerii fluidului exterior ;

L — lungimea țevii între pereții tubulari sau dimensia, paralelă cu axa țevilor, a canalului, în care se așează schimbătorul de căldură, în m ;

d_e, d_i, d sînt diametrele țevilor, exterior, interior, mediu, în m ;

w_e, w_i sînt vitezele fluidelor, în stare gazoasă, exterior, resp. interior, în secțiunea cea mai îngustă, în m/s la starea normală ;

w_{er}, w_{ir} — idem, în stare lichidă, idem, în m/s ;

α_e, α_i — coeficienții de cedare de căldură, de la fluidul exterior la perete, respectiv de la perete la fluidul interior, în kcal/m²h °C ;

m_e, m_i — coeficienții de murdărie a suprafeței de încălzire, prin depuneri de către fluidul exterior, resp. interior (< 1) ;

u este coeficientul de umbrire, corespunzător atingerii incomplete a suprafeței de încălzire de către fluidul exterior (< 1) ;

k — coeficientul global de transmitere de căldură, între cele două fluide, în kcal/m²h °C ;

γ_e, γ_i sînt greutățile specifice ale fluidelor în stare gazoasă, exterior, resp. interior, în kg/Nm³ ;

γ_{er}, γ_{ir} — idem, în stare lichidă, idem, în kg/m³ ;

P_e, P_i — presiunile fluidelor, în stare gazoasă, exterior, resp. interior, în Atm. (1 Atm. = 760 mm Hg) ;

c_{pi} este căldura specifică adevărată a fluidului interior, în stare gazoasă, în kcal/Nm³ °C ;

λ_i — coeficientul de conductivitate termică a fluidului interior în stare gazoasă, în kcal/m h °C ;

η_e, η_i sînt randamentele ventilatorului (sau pompei), necesar circulației fluidelor exterior, resp. interior ;

Δp_e, Δp_i — pierderile de presiune în circuitele fluidelor exterior, resp. interior, în mm CA ;

g este accelerația greutății, în m/s².

4. Dimensionarea economizoarelor

Stabilirea metodei de dimensionare economică

Schița de principiu a economizoarelor este arătată în fig. 1. Coeficientul de cedare de căldură de la fluidul exterior la peretele

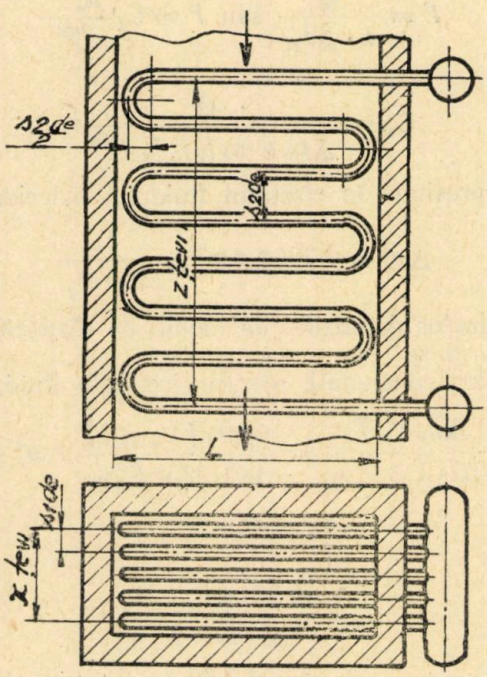


Fig. 1. Schița de principiu a unui economizator

țevilor, direcția de curgere fiind presupusă perpendiculară pe axa țevilor, este [1]:

$$\alpha_e = f_e f_a f_z T_e^{0,25} \frac{w_e^{0,61}}{d_e^{0,39}}$$

în care f_e este un factor depinzînd de natura fluidului exterior, f_a este un factor depinzînd de modul de dispoziție al țevilor și de pasurile relative ale țevilor, s_1 și s_2 iar f_z este un factor depinzînd de numărul de țevi de-a lungul curgerii fluidului exterior, z. Se consideră pasurile relative s_1 și s_2 constante. Pentru $z > 6$, f_z poate fi considerat egal cu 1, fără eroare apreciabilă.

Coeficientul global de transmitere de căldură este, neglijînd transmiterea de căldură prin conductivitate în peretele ţevilor şi prin cedare de la perete la fluidul interior — apă — şi ţinînd seama de umbrire şi murdărire a suprafeţei de încălzire atinse de fluidul exterior — gaze de ardere — :

$$k = u\, m_e\, \alpha_e$$

Suprafaţa de încălzire este :

$$F = \frac{Q}{k \cdot \Delta t_m} \text{ sau } F = C_1 \frac{d_e^{0,39}}{w_e^{0,61}} \tag{3}$$

în care :

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta t_m\, u\, m_e f_e f_a f_z T_e^{0,25}}$$

Pierderea de presiune în circuitul fluidului exterior este [1] :

$$\Delta p_e = 0,204\, f\, z\, w_e^2\, \gamma_e \frac{T_e}{273\, P_e}$$

în care f este un factor depinzînd de modul de dispoziţie al ţevilor şi de pasurile relative s_1 şi s_2.

Puterea electrică consumată pentru circulaţia fluidului exterior este :

$$N_e = \frac{\Delta p_e V_e T_e}{102 \cdot 273\, P_e \eta_e} = \frac{0,204\, f\, V_e \gamma_e T_e^2}{102 \cdot 273^2 P_e^2 \eta_e} z\, w_e^2 \text{ sau :}$$

$$N_e = C_2\, z\, w_e^2 \tag{4}$$

în care :

$$C_2 = \frac{0,204\, j\, V_e \gamma_e T_e^2}{102 \cdot 273^2 P_e^2 \eta_e}$$

Pierderea de presiune în circuitul fluidului interior se compune din pierderea în ţevi şi pierderea în coturi :

$$\Delta p_i = \lambda \frac{n_i M}{d_i} \frac{w_{ir}^2 \gamma_{ir}}{2g} + \xi\, n_i\, (z-1) \frac{w_{ir}^2 \gamma_{ir}}{2g}$$

în care M este lungimea unei serpentine, în m :

$$M = z\,[L - (s_2 + 1)\, d_e] + (z-1) \frac{\pi\, s_2\, d_e}{2} + (s_2 + 1)\, d_e \text{ sau :}$$

$$M = z\, L + C_3\, d_e\, z - C_3\, d_e$$

în care :

$$C_3 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) s_2 - 1,$$

λ este coeficientul de frecare corespunzător diametrului interior d_i iar ξ este coeficientul de pierdere de presiune într-un cot la 180° și cu o rază de curbură $s_2 d_e/2$.

Puterea electrică consumată pentru circulația fluidului interior este:

$$N_i = \frac{\Delta p_i V_{ir}}{102 \eta_i} = \frac{V_{ir} \gamma_{ir}}{2g \cdot 102 \eta_i} \left[\lambda \frac{M}{d_i} + \xi (z-1) \right] n_i w_{ir}^2$$

sau dacă se înlocuiește M prin valoarea sa de mai sus:

$$N_i = \left[C_4 \frac{z L}{d_i} + \left(C_3 C_4 \frac{d_e}{d_i} + C_5 \right) z - C_3 C_4 \frac{d_e}{d_i} - C_5 \right] n_i w_{ir}^2 \qquad (5)$$

în care:

$$C_4 = \frac{V_{ir} \gamma_{ir} \lambda}{2g \cdot 102 \eta_i} \text{ și } C_5 = \frac{V_{ir} \gamma_{ir} \xi}{2g \cdot 102 \eta_i}$$

Cheltuiala anuală de calcul, Z, este, conform relațiilor (2), (3), (4), (5):

$$Z = C_6 \frac{d_e^{0,39}}{w_e^{0,61}} + C_7 z w_e^2 + \left[C_8 \frac{z L}{d_i} \left(C_9 \frac{d_e}{d_i} + C_{10} \right) z - \right.$$

$$\left. - \left(G_9 \frac{d_e}{d_i} + C_{10} \right) \right] n_i w_{ir}^2 \qquad (6)$$

în care:

$$C_6 = \left(\frac{1}{r} + a \right) p_f C_1; \quad C_7 = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_e + h p_n \right] C_2;$$

$$C_8 = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_i + h p_n \right] C_4; \quad C_9 = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_i + h p_n \right] C_3 C_4;$$

$$C_{10} = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_i + h p_n \right] C_5$$

Rezultă că Z depinde de w_e, w_{ir}, z, L, n_i.

Suprafața de încălzire F este, pe de altă parte:

$$F = \pi d_e x M = \pi d_e x z L + \pi C_3 d_e^2 x z - \pi C_3 d_e^2 x$$

Din această relație și din ecuația (3) se obține:

$$\pi d_e x z L + \pi C_3 d_e^2 x z - \pi C_2 d_e^2 x = C_1 \frac{d_e^{0,39}}{w_e^{0,61}} \qquad (7)$$

Vitezele celor două fluide în secțiunile cele mai înguste:

$$S_e = (s_1 - 1) d_e x L, \quad S_i = \frac{\pi d_i^2 x}{4 n_i},$$

sînt:

$$w_e = \frac{V_e}{(s_1 - 1)\, d_e\, x\, L} \tag{8}$$

$$w_{ir} = \frac{4\, V_{ir}\, n_i}{\pi\, d_i^2\, x} \tag{9}$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (6), (7), se obține:

$$Z = \left\{ C_7 \left(\frac{V_e}{s_1 - 1}\right)^2 \frac{z}{d_e^2 L^2} + \frac{16\, V_{ir}^2}{\pi^2} \left[C_8 \frac{z L}{d_i} + \left(C_9 \frac{d_e}{d_i} + C_{10} \right) z - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(C_9 \frac{d_e}{d_i} + C_{10} \right) \right] \frac{n_i^3}{d_i^4} \right\} \frac{1}{x^2} + C_6 \left(\frac{s_1 - 1}{V_e} \right)^{0{,}61} d_e\, L^{0{,}61}\, x^{0{,}61} \tag{10}$$

$$x = \frac{C_1^{\frac{1}{0{,}39}} (s_1 - 1)^{\frac{0{,}61}{0{,}39}}}{V_e^{\frac{0{,}61}{0{,}39}} \left[\pi z\, L^{0{,}39} + \pi C_3\, d_e\, L^{-0{,}61} (z - 1) \right]^{\frac{1}{0{,}39}}} \tag{11}$$

Se vede că introducînd în ecuația (10) valoarea variabilei x determinată de ecuația (11), cheltuiala anuală de calcul Z depinde de cele două variabile independente L și z.

Stabilirea expresiei analitice a funcției Z de cele două variabile independente este dificilă. Soluția dimensionării economice, care este determinată de valoarea minimă a funcției Z, se poate afla pe cale grafo-analitică, dacă pentru diferite valori numerice date variabilelor independente L și z, se obțin cu ajutorul ecuației (11) valorile corespunzătoare ale variabilei independente x; acestea, introduse apoi, împreună cu valorile considerate pentru L și z, în ecuația (10), determină valorile corespunzătoare ale funcției Z. Se construiesc prin puncte, în acest mod, cîteva curbe:

$$Z = f(L); \quad z = \text{constant},$$

pentru cîteva valori constante ale parametrului z. Valorile L și z, care corespund valorii minime ale funcției Z, împreună cu valoarea corespunzătoare x, dată de ecuația (11), sînt dimensiile cele mai avantajoase, din punct de vedere economic.

Curbele Z se construiesc separat pentru diferite valori n_i, precum și pentru dispoziția țevilor în linie și pentru dispoziția alternată.

Introducînd dimensiile cele mai avantajoase, L, z, x, în ecuațiile (8), (9), se obțin vitezele cele mai avantajoase din punct de vedere economic.

Prin construirea curbelor Z pentru diferite valori ale diametrului țevilor, se poate studia influența variației diametrului asupra dimensionării economice.

Cazurile particulare uzuale

În unele cazuri ale agregatelor de cazane de abur cu țevi de apă, mărimea uneia din cele două laturi ale secțiunii canalelor de gaze de ardere, în care se așează economizoarele, este impusă, de obicei, de lățimea focarului, cu care se alege aproximativ egală. După poziția pe care o pot avea țevile economizoarelor (fig. 1) în raport cu lățimea focarului (paralelă sau perpendiculară) și întrucît pasul $s_1 d_e$ a fost presupus constant, apare cîte una din condițiile suplimentare:

$$L = \text{constant}, \quad x = \text{constant}$$

În cazul L=constant, rezolvarea problemei se ușurează, prin aceea că variabila x din ecuația (11) depinde numai de z, iar funcția Z din ecuația (12) depinde de asemenea numai de z, prin intermediul variabilei x.

În cazul x=constant, rezolvarea problemei se ușurează, prin aceea că ecuația (11) stabilește dependența variabilei z numai de L, iar funcția Z depinde de asemenea numai de L, prin intermediul variabilei z.

5. Dimensionarea preîncălzitoarelor de aer

Stabilirea metodei de dimensionare economică

Se va considera, în ceea ce privește natura și numărul de drumuri în serie al fluidelor, cazul cel mai general, în care fluidele care circulă în exteriorul, resp. în interiorul țevilor, pot fi gaze de ardere sau aer și pot avea n_e, resp. n_1 drumuri în serie. În aceste condiții, construcțiile uzuale de preîncălzitoare de aer cu țevi, arătate în fig. 2, 3, reprezintă cazuri particulare ale cazului general, considerat.

Coeficientul de cedare de căldură de la fluidul exterior la peretele țevilor, direcția de curgere fiind perpendiculară pe axa țevilor este [1] la fel ca în cazul economizoarelor:

$$\alpha_e = f_e f_a f_z T_e^{0,25} \frac{w_e^{0,61}}{d_e^{0,39}}$$

iar coeficientul de cedare de căldură de la peretele țevilor la fluidul interior este [1]:

$$\alpha_i = 19,3\, c_{pi}^{0,81} \lambda_i^{0,19} \frac{w_i^{0,75}}{d_i^{0,25}}$$

Coeficientul global de transmitere de căldură, exprimat în raport cu suprafața de încălzire calculată cu diametrul mediu al țevilor și neglijînd transmiterea de căldură prin peretele acestora, este dat de:

$$\frac{1}{k} = \frac{d}{u\, m_e \alpha_e d_e} + \frac{d}{u\, m_i \alpha_i d_i}$$

Suprafața de încălzire, calculată cu diametrul mediu, este:

$$F = \frac{Q}{\Delta t_m k} = \frac{Q d}{\Delta t_m u m_e \alpha_e d_e} + \frac{Q d}{\Delta t_m u m_i \alpha_i d_i} \text{ sau:}$$

$$F = C_1 \frac{d}{d_e^{0,61} w_e^{0,61}} + C_{11} \frac{d}{d_i^{0,75} w_i^{0,75}} \tag{12}$$

în care:

$$C_{11} = \frac{Q}{\Delta t_m u m_i \cdot 19{,}3\, c_{pi}^{0,81} \lambda_i^{0,19}}$$

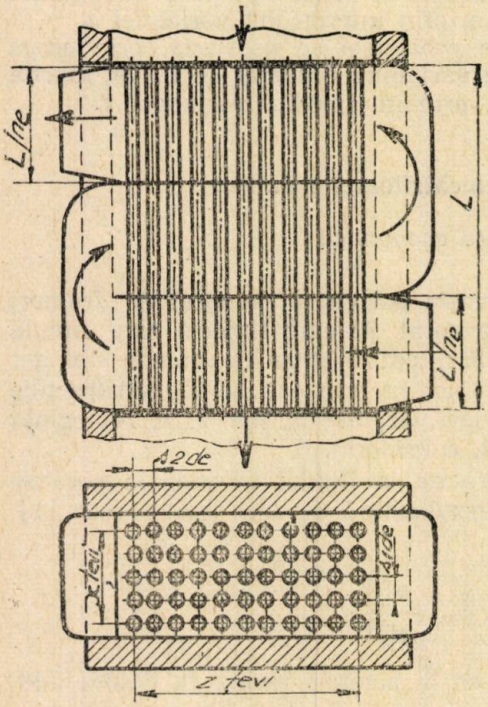


Fig. 2. Schița de principiu a unui preîncălzitor de aer
Exterior: n_e drumuri de aer
Interior: 1 drum de gaze

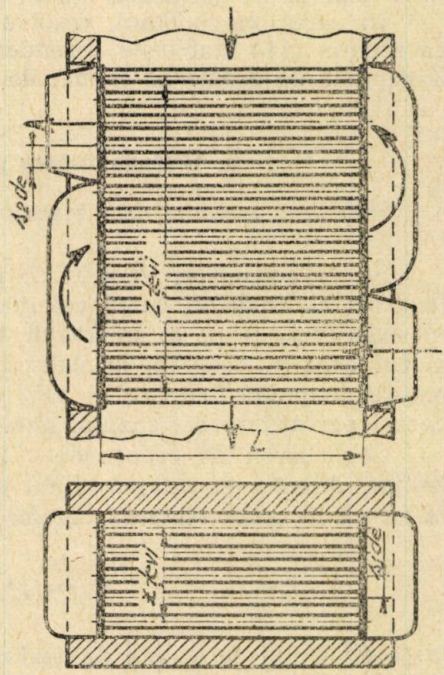


Fig. 3. Schița de principiu a unui preîncălzitor de aer.
Exterior: 1 drum de gaze
Interior: n_i drumuri de aer

Pierderea de presiune în circuitul fluidului exterior, în regiunea fasciculului de țevi, este [1]:

$$\Delta p_{e1} = 0{,}204\, f z w_e^2 \lambda_e \frac{T_e}{273 P_e} n_e$$

iar cea în coturi este, dacă se exprimă viteza în cot, w_{ee}, în funcție de w_e:

$$\Delta p_{e2} = \xi \frac{w_{ec}^2 \gamma_e T_e}{2g \cdot 273 P_e} (n_e - 1) = \xi \left(\frac{s_1 - 1}{s_1} \right)^2 \frac{w_e^2 \gamma_e T_e}{2g \cdot 273 P_e} (n_e - 1),$$

coeficientul de pierdere de presiune în coturi, ξ, depinzînd de elementele geometrice și constructive ale acestora.

Puterea electrică consumată pentru circulația fluidului exterior este:

$$N_e = \frac{(\Delta p_{e1} + \Delta p_{e2}) V_e T_e}{102 \cdot 273 \cdot P_e \eta_e} \text{ sau:}$$

$$N_e = C_2 n_e z w_e^2 + C_{12} (n_e - 1) w_e^2 \qquad (13)$$

în care:

$$C_{12} = \left(\frac{s_1 - 1}{s_1} \right)^2 \frac{\xi V_e \gamma_e T_e^2}{102 \cdot 273^2 P_e^2 2g \eta_e}$$

Pierderea de presiune în circuitul fluidului interior se compune din pierderea în țevi (Δp_{i1}), la intrare în secțiune (Δp_{i2}), la ieșire din secțiune (Δp_{i3}) și în coturi (Δp_{i4}).

După [1]: $$\Delta p_{i1} = \frac{11{,}7 w_1^{1{,}852} T_i}{10^4 \cdot 273 P_i d_i^{1{,}269}} L n_i$$

Raportul secțiunilor de trecere ale fluidului interior la intrare și ieșire este:

$$q = \frac{\pi d_i^2 x z}{4 s_1 s_2 d_e^2 x z} = \frac{\pi d_i^2}{4 s_1 s_2 d_e^2}$$

iar coeficienții de pierdere de presiune la intrare ξ_2 și la ieșire ξ_3 sînt [2]: prin asimilarea curbei dată [2] pentru ξ_2 cu o dreaptă:

$$\xi_2 = 0{,}515 \left(1 - \frac{q}{1{,}08} \right); \quad \xi_3 = (1 - q)^2 \text{ sau:}$$

$$\xi_2 = 0{,}515 \left(1 - \frac{\pi d_i^2}{1{,}07 \cdot 4 s_1 s_2 d_e^2} \right); \quad \xi_3 = \left(1 - \frac{\pi d_i^2}{4 s_1 s_2 d_e^2} \right)^2$$

$$\Delta p_{i2} + \Delta p_{i3} = (\xi_2 + \xi_3) \frac{w_i^2 \gamma_i T_i}{2g \cdot 273 P_i} n_i$$

Dacă se exprimă viteza în cot, w_{ic}, în funcție de w_i,

$$\Delta p_{i4} = \xi_4 \frac{w_{ic}^2 \gamma_i T_i}{2g \cdot 275 P_i} (n_i - 1) = \xi_4 \left(\frac{\pi d_i^2}{4 s_1 s_2 d_e^2} \right)^2 \frac{w_i^2 \gamma_i T_i}{2g \cdot 273 P_i} (n_i - 1),$$

coeficientul de pierdere de presiune în coturi, ξ_4, depinzînd de elementele geometrice și constructive ale acestora.

Puterea electrică consumată pentru circulaţia fluidului interior este:

$$N_i = \frac{(\Delta p_{i1} + \Delta p_{i2} + \Delta p_{i3} + \Delta q_{i4})\, V_i\, T_i}{102 \cdot 273\, P_i\, \eta_t} \text{ sau:}$$

$$N_i = C_{13} \frac{n_i\, L\, w_i^{1,852}}{d_i^{1,269}} + \left[C_{14} \left(1{,}51 - 1{,}94 \frac{d_i^2}{s_1\, s_2\, d_e^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 0.62 \frac{d_i^4}{s_1^2\, s_2^2\, d_e^4} \right) n_i + C_{15} \frac{d_i^4}{d_e^4} (n_i - 1) \right] w_i^2 \qquad (14)$$

în care:

$$C_{13} = \frac{11{,}7\, V_i\, T_i}{10^4 \cdot 102 \cdot 273^2\, P_i^2\, \eta_i}\,; \quad C_{14} = \frac{V_i\, \gamma_i\, T_i^2}{102 \cdot 273^2\, P_i^2\, 2g\, \eta_t}$$

$$G_{15} = \frac{\pi^2\, \xi_4\, V_i\, \gamma_i\, T_i^2}{16 \cdot 102 \cdot 273^2\, s_1^2\, s_2^2\, P_i^2\, 2g\, \eta_t}$$

Cheltuiala anuală de calcul, Z, este conform relaţiilor (2), (12), (13), (14):

$$Z = C_6 \frac{d}{d_e^{0.61}\, w_e^{0,61}} + C_{16} \frac{d}{d_i^{0,75}\, w_i^{0,75}} + C_{17}\, n_e\, z\, w_e^2 + C_{18} (n_e - 1)\, w_e^2 +$$

$$+ C_{19} \frac{n_i\, L\, w_i^{1,852}}{d_i^{1,269}} + \left[C_{20} \left(1{,}51 - 1{,}94 \frac{d_i^2}{s_1\, s_2\, d_e^2} + 0{,}62 \frac{d_i^4}{s_1^2\, s_2^2\, d_e^4} \right) n_i + \right.$$

$$\left. + C_{21} \frac{d_i^4}{d_e^4} (n_i - 1) \right] w_i^2\,, \qquad (15)$$

în care:

$$C_{16} = \left(\frac{1}{r} + a \right) p_f\, C_{11}\,, \qquad C_{17} = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_e + h\, p_n \right] C_2\,,$$

$$C_{18} = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_e + h\, p_n \right] C_{12}\,, \qquad C_{19} = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_i + h\, p_n \right] C_{13}\,,$$

$$C_{20} = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_i + h\, p_n \right] C_{14}\,, \qquad C_{21} = \left[\left(\frac{1}{r} + a \right) p_i + h\, p_n \right] C_{15}\,,$$

Rezultă că Z depinde de w_e, w_i, z, L, n_e, n_i.

Suprafaţa de încălzire este, dacă se neglijează grosimea pereţilor despărţitori interiori, necesari realizării drumurilor în serie a fluidului exterior, în raport cu L:

$$F = \pi\, d\, x\, z\, L$$

Din această relație și din ecuația (12) se obține:

$$\pi d x z L = C_1 \frac{d}{d_e^{0,61} w_e^{0,61}} + C_{11} \frac{d}{d_i^{0,75} w_i^{0,75}} \tag{16}$$

Vitezele celor două fluide în secțiunile cele mai înguste:

$$S_e = (s_1 - 1) d_e \frac{x L}{n_e}, \qquad S_i = \frac{\pi d_i^2 x z}{4 n_i},$$

sînt:

$$w_e = \frac{V_e n_e}{(s_1 - 1) d_e x L} \tag{17}$$

$$w_i = \frac{4 V_i n_i}{\pi d_i^2 x z} \tag{18}$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (15), (16) se obține:

$$Z = C_6 \left(\frac{s_1 - 1}{V_e}\right)^{0,61} \frac{d (x L)^{0,61}}{n_e^{0,61}} + C_{16} \left(\frac{\pi}{4 V_i}\right)^{0,75} \frac{d d_i^{0,75} (x z)^{0,75}}{n_i^{0,75}} +$$

$$+ C_{17} \left(\frac{V_e}{s_1 - 1}\right)^2 \frac{n_e^3 z}{d_e^2 (x L)^2} + C_{18} \left(\frac{V_e}{s_1 - 1}\right)^2 \frac{(n_e - 1) n_e^2}{d_e^2 (x L)^2} +$$

$$+ C_{19} \left(\frac{4 V_i}{\pi}\right)^{1,852} \frac{n_i^{2,852} L}{d_i^{4,973} (x z)^{1,852}} + \left[C_{20} \left(\frac{4 V_1}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1,5}{d_i^4} - \frac{1,94}{s_1 s_2 d_e^2 d_i^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{0,62}{s_1^2 s_e^2 d_e^4}\right) n_i^3 + C_{21} \left(\frac{4 V_i}{\pi}\right)^2 \frac{(n_i - 1) n_i^2}{d_e^4}\right] \frac{1}{(xz)^2}, \tag{19}$$

$$x z L = \frac{C_1}{\pi} \left(\frac{s_1 - 1}{V_e}\right)^{0,61} \frac{(x L)^{0,61}}{n^{0,61}} + \frac{C_{11}}{\pi} \left(\frac{\pi}{4 V_i}\right)^{0,75} \frac{d_i^{0,75} (x z)^{0,75}}{n_i^{0,75}} \tag{20}$$

Valoarea minimă a funcției Z se poate afla pe cale grafo-analitică astfel: Pentru diferite valori numerice date variabilelor independente L și x, ecuația (20) devine:

$$Z = B z^{0,75} + D, \tag{21}$$

în care constantele B și D au valorile:

$$B = \frac{C_{11}}{\pi} \left(\frac{\pi d_i}{4 V_i n_i}\right)^{0,75} \frac{1}{x^{0,25} L}, \qquad D = \frac{C_1}{\pi} \left(\frac{s_1 - 1}{V_e n_e}\right)^{0,61} \frac{1}{(x L)^{0,39}}$$

Ecuația (21) se poate rezolva grafic aflînd intersecția curbelor:

$$Y_1 = z, \qquad Y_2 = B z^{0,75} + D$$

Valorile variabilei indepndente z, astfel determinate, introduse în ecuaţia (19), împreună cu valorile considerate pentru L şi x, determină valorile corespunzătoare ale funcţiei Z. Se construiesc, astfel, curbele:

$$Z = f(L); \quad x = \text{constant},$$

pentru cîteva valori constante ale parametrului x. Valorile L şi x, care corespund valorii minime ale funcţiei Z, împreună cu valoarea corespunzătoare z, dată de ecuaţia (21), sînt dimensiile cele mai avantajoase din punct de vedere economic.

Curbele Z se construiesc separat pentru diferite valori n_e şi n_i, precum şi pentru dispoziţia ţevilor în linie şi pentru dispoziţia alternată.

Introducînd dimensiile cele mai avantajoase L, x, z, în ecuaţiile (17), (18), se obţin vitezele cele mai avantajoase din punct de vedere economic.

Prin construirea curbelor Z, pentru diferite valori ale diametrului ţevilor, se poate studia influenţa variaţiei acestuia asupra dimensionării economice.

Cazuri particulare uzuale

Dacă în ecuaţiile (19), (20) se face $n_i = 1$, se obţine felul de construcţie arătat în fig. 2. Dacă în aceste ecuaţii se face $n_e = 1$, se obţine felul de construcţie arătat în fig. 3.

În unele cazuri ale agregatelor de cazane de abur cu ţevi de apă, mărimea uneia din cele două laturi ale secţiunii canalelor de gaze de ardere, în care se aşează preîncălzitoarele de aer, este impusă, de obicei, de lăţimea focarului, cu care se alege aproximativ egală. În aceste cazuri, după poziţia pe care o pot avea ţevile preîncălzitoarelor de aer (fig. 2 şi 3) în raport cu lăţimea focarului şi întrucît pasurile $s_1 d_e$, $s_2 d_e$ au fost presupuse constante, apar cîte una din condiţiile suplimentare:

$$L = \text{constant}, \quad x = \text{constant}, \quad z = \text{constant}.$$

În cazul L=constant, rezolvarea problemei se uşurează prin aceea că constantele B şi D din ecuaţia (21) depind numai de x, iar funcţia Z depinde de asemenea numai de x, prin intermediul variabilei z.

În cazul x=constant, rezolvarea problemei se uşurează, prin aceea că constantele B şi D din ecuaţia (21) depind numai de L, iar funcţia Z depinde de asemenea numai de L, prin intermediul variabilei z.

În cazul z=constant, rezolvarea problemei se uşurează, prin aceea că ecuaţia (20) devine:

$$L = E\,L^{0.11} + G,$$

în care constantele E şi G depind numai de x, iar funcţia Z depinde numai de x, prin intermediul variabilei L.

În cazurile, în care înălţimea canalului de gaze de ardere, în care se aşează preîncălzitoarele de aer, este dată, apar aceleaşi uşurări în rezolvarea problemei.

6. Concluzii

Pentru debite de căldură date, care trebuie transmise prin schimbătoarele de căldură finale, ale agregatelor de cazane de abur, pentru temperaturi ale celor două fluide la intrare și ieșire date, în cazul construcției schimbătoarelor cu țevi drepte sau îndoite în serpentine și pentru cazul curgerii fluidului, care circulă în exteriorul țevilor, perpendicular pe direcția acestora, se stabilește o metodă pentru dimensionarea economică a elementelor geometrice ale acestor schimbătoare de căldură, pe baza criteriului economic al cheltuielii anuale de calcul minimă. S-a admis că dinstanța între țevi ca și diametrul acestora sînt date, determinarea acestor elemente fiind legată de posibilitatea de obturare a secțiunii de trecere prin depuneri, de curățire a depunerilor, ca și de considerarea spațiului ocupat. Metoda permite a se studia influența variației diametrului țevilor asupra dimensionării economice.

Rezultă vitezele cele mai avantajoase din punct de vedere economic a celor două fluide.

Metoda se poate aplica la dimensionarea economică a oricăror schimbătoare de căldură, de convecție, construite din țevi drepte sau îndoite în serpentine, cu curgerea fluidului circulînd la exteriorul țevilor, perpendicular pe direcția acestora și în care fluidele — gaze, în cazul schimbătoarelor construite din țevi drepte, sau gaze la exteriorul țevilor și lichide în interiorul acestora, în cazul schimbătoarelor construite din serpentine — își păstrează starea de agregare.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Alfred Schack.* Der industrielle Wärmeübergang, 1957, Verlag Stanleisen, Düsseldorf.

[2] Norme pentru calculul circuitului de gaze al agregatelor de cazane. (Elaborate de Institutul Central de turbine și cazane din U.R.S.S. Traducere din limba rusă). 1952. Oficiul de Presă, Editură și Documentare M.E.E.I.E.

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННИКОВ ХВОСТОВОЙ ЧАСТИ ПАРОВЫХ КОТЛОВ

Краткое содержание

При проектировании экономайзеров и воздухоподогревателей котловых агрегатов необходимо предусмотреть сокращение расхода на только металла, но и энергии.

В качестве экономического критерия приняты минимальные расчетные годовые расходы. Они зависят от поверхности нагрева, а

также от мощности, необходимой для циркуляции тепловоспринимающих потоков, которые в свою очередь зависят от скоростей этих потоков и от некоторых размеров теплообменников. Выражая скорости потоков в зависимости от размеров теплообменника, получаем расчетные годовые расходы в зависимости от этих размеров. Минимум функций получается аналитически-графическим способом.

Установление этой функции и определение ее минимума составлают оригинальную часть работы. Метод позволяет установить оптимальные, с экономической точки зрения, размеры экономайзеров и воздухоподогревателей. Он может быть применен для расчета и других теплообменников.

ECONOMICAL DIMENSIONING OF STEAM BOILERS LAST HEAT EXCHANGERS

(Summary)

The planning of steam boilers economizers and air preheaters must assure not only the reducing of steel but also of power consumption. The annual cost to be calculated is used as economical criterium. This cost is determined by the heating surface and the power used by the fluid flow which depend on the speed of the fluids and on some dimensions of the heat exchangers. The annual cost is calculated by expressing the speed of the fluids in relation to the size of the heat exchangers. The minimum of the function is found by graphical and analytical methods. The method allows to determine the economic optimum dimensions of economizers and preheaters and can also be applied to other heat exchangers.

LE CALCUL ÉCONOMIQUE DES ÉCHANGEURS DE CHALEUR FINALS DES CHAUDIÈRES À VAPEUR

(Résumé)

Le calcul des économiseurs et réchauffeurs d'air doit assurer non seulement la réduction de la dépense d'acier, mais aussi celle de l'énergie. On emploit la dépense annuelle à calcul comme criterium économique. Celle-ci dépend de la surface de chauffe ainsi que de l'énergie nécessaire au mouvement des fluides, qui, à leur tour, dépendent des vitesses des fluides et de quelques unes des dimensions des échangeurs de chaleur. En exprimant les vitesses des fluides en fonction des dimensions des échangeurs, on obtient la dépense annuelle à calcul comme fonction de ces dimensions. On trouve le minimum de cette fonction par procédé graphique-analytique. La méthode permet de trouver les dimensions économiques optima des économiseurs et réchauffeurs d'air. Elle peut être appliquée aussi aux autres échangeurs de chaleur.

WIRTSCAFTLICHE BERECHNUNG DER DAMPFKESSELNACHSCHALTHEIZFLÄCHEN

(Zusammenfassung)

Die Entwerfung von Wasser — und Luftvorwärmern von Dampfkesseln muss nicht nur den Stahlbedarf, aber auch den Kraftbedarf herabsetzen. Man benützt die rechnunsmässige jährliche Ausgabe als wirtschaftliches Mass. Diese ist von der Heizfläche, sowie von der zur Strömung der Flüssigkeiten notwendige Kraft abhängig, welche seinerseits von den Flüssigkeitsgeschwindigkeiten und von manchen Wärmeaustauscherraummassen abhängig sind. Durch Ausdrücken der Flüssigkeitsgeschwindigkeiten als Funktion von Wärmeaustauscherraummassen, erhält man die rechnungsmässige jährliche Ausgabe als Funtion dieser Raummassen, dessen Minimum graphisch — analytisch gefunden wird. Die Methode ermöglicht die Ermittlung der wirtschaftlich — optimalen Raummassen der Wasser — und Luftvorwärmer. Sie ist auch für andere Wärmeaustauscher anwendbar.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

ENERGETICĂ

INFLUENȚA ARMONICELOR PRODUSE DE REDRESOARE ASUPRA FUNCȚIONĂRII UNUI SISTEM ELECTRIC

CONSTANTIN DINCULESCU, ARIE ARIE, EUGEN POTOLEA, ION IORDĂNESCU

Instalațiile pentru redresarea curentului alternativ se întîlnesc frecvent în rețelele electrice trifazate. Aceste instalații sînt destinate pentru alimentarea unor băi electrolitice din industria chimică sau a unor motoare de curent continuu care antrenează mecanisme cu turația variabilă în limite largi, așa cum sînt de exemplu mecanismele laminoarelor.

Prezența instalațiilor cu grupuri redresoare în rețeaua de curent alternativ trifazat are ca urmare apariția unor armonice superioare de curenți și de tensiuni, însoțită de unele efecte a căror importanță crește o dată cu creșterea puterii grupurilor redresoare.

Armonicele de curent și de tensiune pot fi amplificate prin fenomene de rezonanță astfel încît apar în sistem supracurenți și supratensiuni, care provoacă efecte mecanice și termice sau străpungeri dielectrice. Este necesar un studiu aprofundat în special al armonicelor de curent care pot avea consecințe dăunătoare asupra generatoarelor, elementele cele mai costisitoare ale sistemului electric.

Armonicele superioare de curent, circulînd prin înfășurările statorice ale generatoarelor, produc cîmpuri magnetice care se rotesc cu viteze corespunzătoare ordinului armonicelor și induc în corpul de oțel masiv al rotorului curenți turbionari de pulsații superioare. În aceste condiții rotoarele generatoarelor pot să ajungă la temperaturi inadmisibile cu toate că generatoarele sînt încărcate sub sarcinile lor nominale.

În cele ce urmează se vor studia în mod special armonicele de curent produse de o instalație de grupuri redresoare și efectele termice produse asupra generatoarelor. Considerațiile teoretice vor fi aplicate într-un caz concret al unei instalații de redresoare, alimentată dintr-un sistem electric cu mai multe generatoare. Pe baza considerațiilor teoretice și a calculelor efectuate se vor trage unele concluzii asupra regimurilor recomandabile de funcționare a grupurilor redresoare și a generatoarelor.

1. Armonicele de curent produse de grupurile redresoare

Se va considera o instalație formată din două grupuri redresoare avînd puteri egale însă transformatoare cu conexiuni diferite, așa cum se arată în fig. 1.

Fiecare grup redresor este format dintr-un transformator cu tensiunile 6000/710 V și unul sau două redresoare hexafazate cu mercur și reglaj

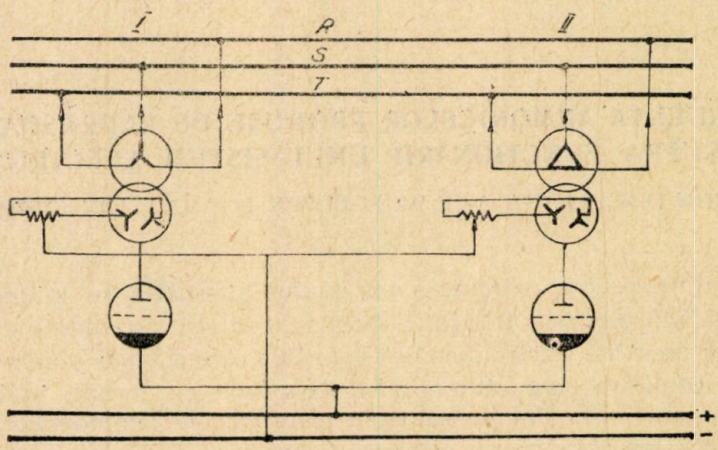


Fig. 1. Funcționarea în paralel a grupurilor redresoare cu transformatoare de tipul I și de tipul II.

pe grilă. Ambele transformatoare au înfășurările secundare conectate în dublă stea. După felul conexiunilor înfășurărilor primare, transformatoarele sînt de două tipuri și anume:

I. Transformatoare cu înfășurările primare conectate în stea.

II. Transformatoare cu înfășurările primare conectate în triunghiu, prevăzute cu posibilitatea de trecere la conexiunea stea. Cînd se folosește conexiunea triunghiu se obține tensiune secundară de 750 V iar cînd se folosește conexiunea stea se obține tensiunea secundară de 420 V.

Ținînd seama de conexiunile transformatoarelor rezultă că sînt posibile două scheme de funcționare a instalației de redresoare și anume:

A. Schema cu ambele grupuri funcționînd în paralel atît pe barele de alimentare de curent alternativ cît și pe barele de curent continuu cu tensiunea cca. 750 V.

B. Schema cu grupurile funcționînd separat pe barele de curent continuu; grupul I funcționează pe bare de curent continuu de cca. 750 V iar grupul II funcționează pe bare de curent continuu de cca. 420 V.

Dintre aceste două scheme posibile cea mai avantajoasă pentru sistemul electric este prima, în care grupurile redresoare de tipurile I și II funcționează în paralel atît pe barele de alimentare de curent alternativ cît și pe barele de consum de curent continuu. Avantajul acestei scheme constă în faptul că există posibilitatea compensării reciproce a unora din armonicele de curent produse de grupurile I și II.

Pentru a explica acest efect de compensare a armonicelor se va considera schema din fig. 1 și se vor determina armonicele de curent produse separat de cele două grupuri redresoare. După cum se știe redresorul trifazat sau hexafazat poate fi considerat ca un generator de armonice de curent de ordin impar din care se exclud armonicele de ordinul 3, 9, 27 etc. Amplitudinile armonicelor care interesează pot fi calculate cu relația aproximativă :

$$I_\nu = \frac{I}{\nu} \tag{1}$$

în care I este curentul de armonică fundamentală, de pulsație ω iar ν este ordinul armonicei superioare.

Folosind relația (1) se constată că armonicele de ordinul 11 și cele superioare capătă valori neglijabile și de aceea în continuare se vor considera numai armonicele de ordinul 5 și 7, a căror amplitudini vor fi :

$$\begin{cases} I_5 = \dfrac{I}{5} \\ I_7 = \dfrac{I}{7} \end{cases} \tag{2}$$

Dacă cele două grupuri redresoare sînt alimentate de transformatoare de același tip atunci armonicele transmise în rețeaua de înaltă tensiune se însumează și deci capătă valorile :

$$\begin{cases} I_{r5} = 2\, I_5 \\ I_{r7} = 2\, I_7 \end{cases} \tag{3}$$

Dacă cele două grupuri redresoare sînt alimentate de transformatoare de tipuri diferite, așa cum se arată în fig. 1 atunci la însumarea armonicelor trebuie să se țină seama de rotirea lor determinată de conexiunile transformatoarelor. Astfel, transformatorul de tipul I nu produce nici o rotire a armonicelor, în timp ce transformatorul de tipul II (cu conexiunea triunghiu pe primar) produce o rotire a armonicelor cu un unghi de 30°. Armonicele 5 și 7 produse de grupul de tipul II, trecînd de pe secundar pe primar vor fi rotite cu unghiuri de 150° și 210° față de armonica fundamentală de pe secundar. Ținînd seama că armonica fundamentală de pe secundar a fost rotită în sens contrar la trecerea de pe primar pe secundar cu un unghi de 30° rezultă că armonicele 5 și 7 vor fi rotite față de armonica fundamentală de pe primar cu unghiuri de 120° și 180°.

Rezultantele armonicelor 5 și 7 care se transmit în rețea (fig. 2) vor fi date de relațiile :

$$\begin{cases} I_{r5} = 2\, I_5 \cos 60° = I_5 \\ I_{r7} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Rezultatele obținute arată că la funcționarea în schema A se transmite în rețeaua de alimentare numai armonica 5 cu o amplitudine redusă la jumătate față de amplitudinea armonicei 5 din schema B.

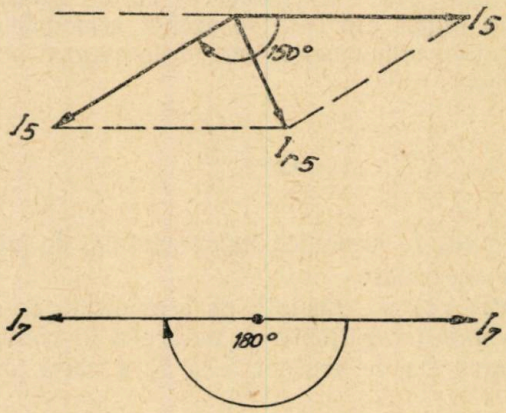


Fig. 2. Însumarea fazorială a armonicelor de curent 5 și 7 produse de grupurile redresoare de tipul I și de tipul II.

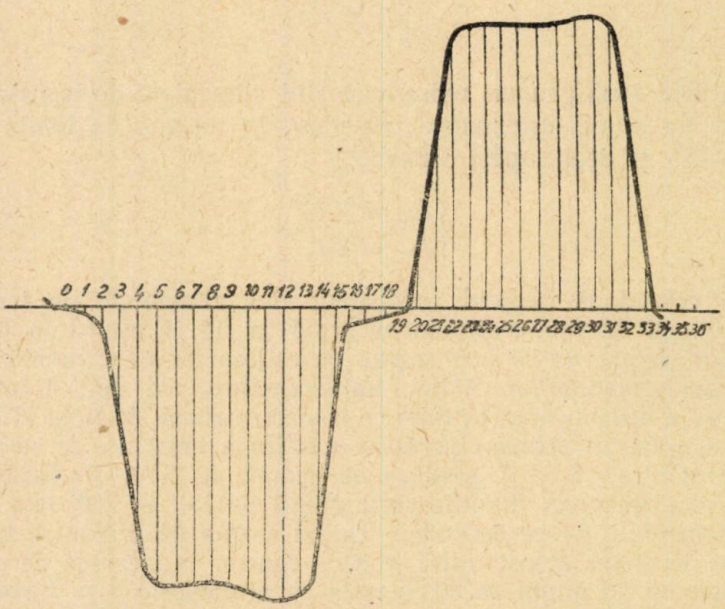


Fig. 3. Oscilograma de curent a unui grup redresor încărcat la sarcina maximă

Instalația de redresoare considerată este proiectată să funcționeze în mod normal după schema A. Ținînd seama că în anumite împrejurări este necesar să se treacă la funcționarea după schema B se vor determina

în cele ce urmează și armonicele de curent produse în această ultimă schemă, care duce la cele mai dezavantajoase condiții de funcționare ale generatoarelor.

Armonicele de curent produse la funcționarea separată a grupurilor redresoare (schema B) se pot determina folosind relațiile aproximative (2). Pentru o determinare mai precisă a acestor armonice s-a trasat oscilograma de curent (fig. 3) a unui grup redresor încărcat la sarcina maximă și s-a făcut analiza armonică.

Analiza armonică a oscilogramei de curent a dus la determinarea următoarelor valori ale amplitudinilor armonicelor 5 și 7 :

$$\begin{cases} I_5 = \dfrac{20}{100} I \\ I_7 = \dfrac{5}{100} I \end{cases} \tag{5}$$

Rezultatele obținute corespund cu rezultatele date de relațiile aproximative (2).

2. Coeficienții de amplificare ai armonicelor de curent

Armonicele de curent produse de grupurile redresoare pot să se amplifice prin fenomene de rezonanță în circuitele formate din inductanțe și capacități ale rețelei. Dacă se consideră o schemă simplificată a unei rețele (fig. 4 a) se constată că armonicele de curent produse de sursă (grupurile redresoare) se transmit amplificate în circuitele generatoarelor datorită prezenței capacităților liniei electrice de transport, care sînt conectate în paralel cu inductanțele generatoarelor. Pentru a calcula coeficienții de amplificare ai armonicelor de curent se va folosi schema echivalentă simplificată din fig. 4 b în care s-au neglijat toate rezistențele rețelei.

Folosind notațiile din fig. 4 se determină curentul din inductanța L_2 (circuitul generatorului) după cum urmează :

$$\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L_2} U_{ab} = \frac{1}{j\omega L_2} \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} \underline{I} = \frac{1}{1 - \omega^2 L_2 C} \underline{I}$$

Coeficientul de amplificare al curentului de pulsație ω este dat de relația :

$$a = \frac{I_L}{I} = \frac{1}{1 - \omega^2 L_2 C}$$

iar coeficienții de amplificare ai armonicelor de ordinul ν vor fi dați de relația :

$$a_\nu = \frac{1}{1 - \nu^2\omega^2 L_2 C} \tag{6}$$

Coeficienții de amplificare sînt supraunitari și tind către infinit atunci cînd se realizează rezonanța circuitului L_2 C pentru armonica respectivă.

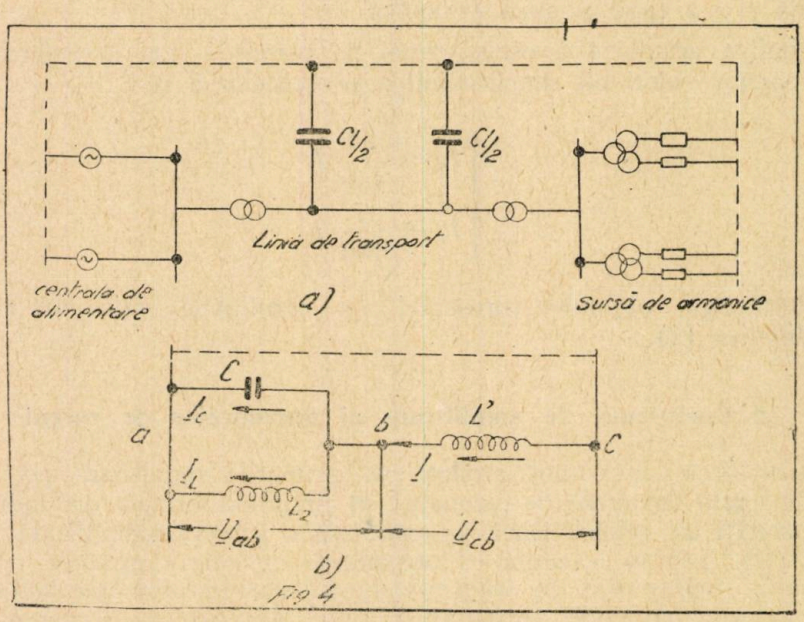


Fig. 4. Schema simplificată a unui sistem electric care alimentează grupuri redresoare.

adică atunci cînd pulsația armonicei ($\nu\omega$) este egală cu pulsația proprie (ω_p) a circuitului :

$$\nu\omega = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{7}$$

O relație mai exactă pentru coeficienții de amplificare se obține dacă se consideră că linia de transport (fig. 4 a) are parametri uniform distribuiți. În acest caz se pune problema de a exprima curentul din capătul 2, la care este conectat generatorul electric în funcție de curentul din capătul 1, la care este conectată sursa de armonice (grupurile redresoare).

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{V}_2 \operatorname{ch} \sqrt{ZY} + Z_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \sqrt{ZY} \\ \underline{I}_1 = \dfrac{1}{Z_c} \underline{V}_2 \operatorname{sh} \sqrt{ZY} + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \sqrt{ZY} \end{cases} \tag{8}$$

în care s-a notat :

$\underline{I}_1$ $\underline{V}_1$ — curentul și tensiunea din capătul sursei de armonice.

$\underline{I}_2$ $\underline{V}_2$ — curentul și tensiunea din capătul receptor al liniei.

$\underline{Z}$, $\underline{Y}$ — impedanța și admitanța liniei.

Z_c — impedanța caracteristică a liniei.

Considerînd că în capătul receptor este conectată o impedanță Z_2 și folosind a doua relație din (8) se obține :

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{Z_b} Z_2 \underline{I}_2 \operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z}\underline{Y}} + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \sqrt{\underline{Z}\underline{Y}}$$

și

$$a = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\underline{Z}\underline{Y}} + \frac{Z_2}{Z_c} \operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z}\underline{Y}}} \tag{9}$$

Dezvoltînd în serie funcțiunile hiperbolice și păstrînd numai primii termeni rezultă :

$$a = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{2} + Z_2 \underline{Y} \left(1 + \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{3} \right)} \tag{10}$$

Dacă se consideră linia fără pierderi și se admite un consumator format dintr-o simplă inductanță (L_2) atunci coeficienții de amplificare ai diferitelor armonice de ordinul ν sînt dați de expresia :

$$a_\nu = \frac{1}{1 - \frac{\nu^2 \omega^2 LC}{2} - \nu^2 \omega^2 L_2 C \left(1 - \frac{\nu^2 \omega^2 LC}{3} \right)} \tag{11}$$

Este ușor de văzut că expresia (11) a coeficientului de amplificare se reduce la expresia (6) dacă se neglijează termenul $\nu^2\omega^2LC$. Considerînd că acest termen poate fi neglijat dacă valoarea lui este mai mică decît unitatea se determină lungimile de linii pentru care se poate utiliza expresia (6) în locul expresiei mai exacte (11). În acest scop se folosește condiția :

$$\nu^2 \omega^2 LC < 1$$

din care rezultă :

$$\nu^2 \omega^2 D^2 L_0 C_0 < 1$$

sau

$$D < \frac{1}{\nu\omega \sqrt{L_0 C_0}} \tag{12}$$

cu notațiile :

D — lungimea liniei

L_0 — inductanța pe unitatea de lungime a liniei ; se poate lua ca valoare medie $L_0 = 1{,}28 \cdot 10^{-3}$ H/km

C_0 — capacitatea pe unitatea de lungime a liniei; se poate lua ca valoare medie $C_0 = 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ F/km.

Introducînd în formula (12) valorile medii ale lui L_0 și C_0 se obține

$D < 180$ km, pentru armonica de ordinul $\nu = 5$

$D < 126$ km, pentru armonica de ordinul $\nu = 7$.

3. Pierderi suplimentare în rotoarele generatoarelor

Armonicele de curent, transmise în rețeaua trifazată, parcurg înfășurările statorice ale generatorului de alimentare și produc în întrefier cîmpuri magnetice de pulsații corespunzătoare cu ordinele armonicelor, ceea ce are ca efect încălzirea rotorului datorită pierderilor suplimentare provocate de curenții turbionari de pulsații superioare. Pulsațiile ω_r ale curenților induși în fierul masiv al rotorului se determină ținînd seama că rotorul se învîrtește cu viteza unghiulară ω în cîmpul învîrtitor produs de armonicele de curent astfel că rezultă:

$$\omega_r = (\nu \pm 1)\,\omega \tag{13}$$

Deoarece armonicele de curent de ordinul 5 formează un sistem trifazat de succesiune inversă iar armonicele de curent de ordinul 7 formează un sistem trifazat de succesiune directă, pulsațiile curenților induși în rotor vor fi:

$$\begin{cases} \omega_{r5} = (5 + 1)\,\omega = 6\omega \\ \omega_{r7} = (7 - 1)\,\omega = 6\omega \end{cases} \tag{14}$$

Studiul regimurilor de funcționare a generatorului cu armonice de curent pe stator poate fi înlocuit prin studiul regimurilor de funcționare a generatorului cu curenți de succesiune inversă pe stator, folosind în acest scop o relație de echivalență (B. 14) între cureți:

$$K_2 I_i^2 = 3\,K_6\,(I_5^2 + I_7^2) \tag{15}$$

în care: $K_2 = 1{,}5$ și $K_6 = 5$.

Dacă se introduc valorile numerice în relația (15) și se ține seama și de coeficienții de amplificare ai armonicelor se obține:

$$I_i^2 = 10\,(a_5^2\,I_5^2 + a_7^2\,I_7^2) = K I^2 \tag{16}$$

în care:

$$K = 10\left(\frac{a_5^2}{5^2} + \frac{a_7^2}{7^2}\right) = 0{,}4\,a_5^2 + 0{,}2\,a_7^2 \tag{17}$$

Dacă armonicele de curent se exprimă în funcție de curentul nominal al generatorului de alimentare atunci:

$$I_i^2 = K\,K_n\,I_n^2 \tag{18}$$

în care :

$$K_n = \frac{I^2}{I_n^2} \qquad (19)$$

Pierderile suplimentare în fierul rotorului se vor calcula în ipoteza că înfășurările statorice sînt parcurse de curenți de succesiune inversă, iar suprafața rotorului este netedă. Ultima ipoteză permite să se facă abstracție de încălzirile locale din crestături și să se obțină o relație aproximativă dar utilă prin faptul că ea scoate în evidență factorii principali cari influențează asupra încălzirii medii a rotorului în diferite regimuri de funcționare.

Pierderile suplimentare în fierul rotorului, se calculează cu relația (B-2) :

$$P = 3\, r'_2\, I_i^2 \qquad (20)$$

în care r'_2 este rezistența echivalentă corespunzătoare pierderilor rotorice,

$$r'_2 = \frac{6\,(n\,\xi)^2}{p\,\tau}\,\alpha\,\varrho\,l \qquad (21)$$

iar α este inversa adîncimii de pătrundere a cîmpului electromagnetic în rotor,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_f\,\mu_0\,\omega_2}{2\varrho}} = \sqrt{\frac{\mu_f\,\mu_0\,\omega}{\varrho}} \qquad (22)$$

Ținînd seama de expresia reactanței sincrone

$$X = \frac{6}{\pi^2}\,\mu_0\,\omega\,\frac{\tau l}{p\,\delta}\,(n\,\xi)^2 \qquad (23)$$

relația (21) se scrie sub forma :

$$r'_2 = \pi^2 \sqrt{\frac{\mu_f\,\varrho}{\mu_0\,\omega}}\,\frac{\delta}{\tau^2}\,X \qquad (24)$$

în care :

δ este lățimea intreferului, în m
τ — pasul polar, în m,
ϱ — rezistivitatea, în Ω. m,
μ_f — permeabilitatea relativă a fierului.

Introducînd (24) în (20) și considerînd valorile numerice

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ [H/m]$, $\omega = 100\pi\ 1/s$, $\varrho = 2 \cdot 10^{-7}\ [\Omega \cdot m]$, $\mu_f = 2000$

se obține :

$$P = 3\pi^2\,\frac{\delta}{\tau^2}\,X\,I_i^2 \qquad (25)$$

4. Regimurile de funcționare ale generatoarelor care alimentează grupuri redresoare

O dată stabilit curentul echivalent de succesiune inversă, regimurile de funcționare ale generatoarelor parcurse de armonice de curent pot fi studiate ca în cazul regimurilor nesimetrice.

Sarcina admisibilă a unui generator în regim nesimetric se determină ținînd seama de încălzirea înfășurării rotorice care este condiționată, pe de o parte de pierderile normale în înfășurare și pe de altă parte de pierderile suplimentare în fierul rotorului. Se pune condiția ca suma pierderilor care provoacă încălzirea înfășurării rotorice să fie egale cu pierderile din regimul normal de funcționare, adică

$$P_r + \varepsilon P = P_{rn} \tag{26}$$

cu notațiile:

P_r — pierderile în înfășurarea rotorului

P — pierderile suplimentare în fierul rotorului

P_{rn} — pierderile în înfășurarea rotorului la funcționarea în regim normal

ε — coeficient subunitar prin care se ține seama de faptul că numai o parte din pierderile suplimentare contribuie la încălzirea înfășurări rotorice; se poate lua $\varepsilon = 0{,}2 \div 0{,}3$ [B4].

Pierderile P_r și P pot fi exprimate prin relațiile:

$$\begin{cases} P_r = P_{rn} \dfrac{I_e^2}{I_{en}^2} \\ P = P_{in} \dfrac{I_i^2}{I_{in}^2} \end{cases} \tag{27}$$

în care:

I_e, I_{en} — curentul de excitație și curentul nominal de excitație,

I_i, I_{in} — curentul invers al regimului studiat și curentul invers egal cu curentul nominal

P_{in} — pierderile suplimentare la funcționarea cu un curent invers egal cu curentul nominal.

Introducînd (27) în (26) se obține:

$$\frac{I_e^2}{I_{en}^2} + c \frac{I_i^2}{I_n^2} = 1 \tag{28}$$

în care s-a notat:

$$c = \varepsilon \frac{P_{in}}{P_{rn}} \tag{29}$$

Curentul relativ de excitație I_e/I_{en}, care intervine în relația (28) poate fi exprimat în funcție de curentul relativ direct (de sarcină simetrică) I_d/I_n dacă se folosește o relație aproximativă de forma [B4]:

$$\frac{I_e}{I_{en}} = \frac{I_{e0}}{I_{en}} + \left(1 - \frac{I_{e0}}{I_{en}}\right)\frac{I_d}{I_n} \tag{30}$$

Raportul I_{e0}/I_{en} poate fi luat aproximativ 0,42 pentru o gamă largă de tipuri de generatoare, astfel că introducînd (30) în (28) se obține ecuația

$$\left(0{,}42 + 0{,}58\frac{I_d}{I_n}\right)^2 + c\frac{I_i^2}{I_n^2} = 1 \tag{31}$$

sau

$$\left(0{,}42 + 0{,}58\frac{I_d}{I_n}\right)^2 + c\frac{I_i^2}{I_d^2}\frac{I_d^2}{I_n^2} = 1 \tag{32}$$

Folosind ecuația (32) s-au trasat curbele din fig. 5 care permit să se studieze regimurile nesimetrice admisibile pentru diferite tipuri de generatoare. Este suficient să se determine parametrul c, folosind relațiile (29)

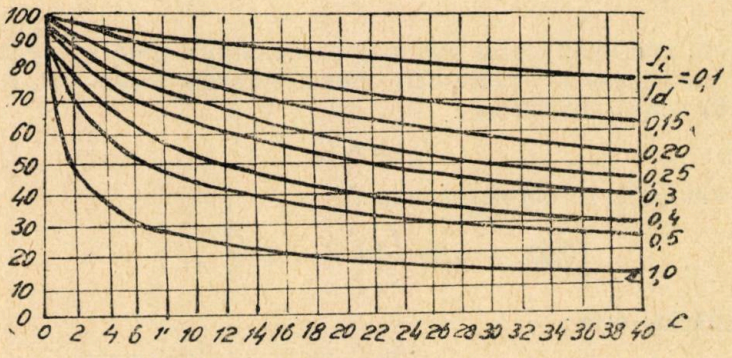


Fig. 5. Variația raportului I_d/I_n în funcție de raportul I_i/I_d pentru diferite valori ale parametrului c.

și (25) pentru ca apoi să se traseze dreapta corespunzătoare din diagramă. De exemplu pentru $c=20$ se obțin valorile rapoartelor I_d/I_h și I_i/I_d cu care s-a trasat diagrama din fig. 6.

În cazul cînd generatorul nu funcționează în regim nesimetric ci este parcurs de armonicele de curent, produse de redresoare, se poate exprima curentul invers în funcție de curentul nominal al generatorului folosind în acest scop relația (18), care se introduce în (31) și se obține:

$$\left(0{,}42 + 0{,}58\frac{I_d}{I_n}\right)^2 = cK_n = 1$$

sau :

$$\frac{I_d}{I_n} = 1{,}7\sqrt{1 - cKK_n} - 0{,}72 \tag{33}$$

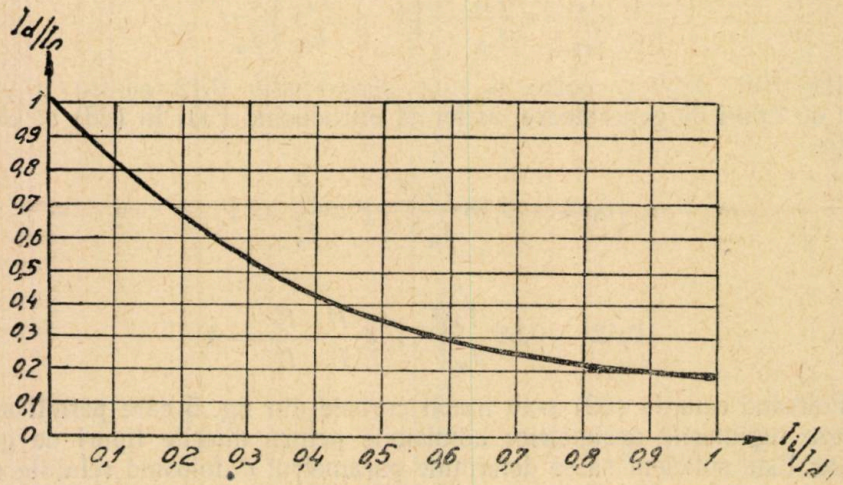


Fig. 6. Diagrama de încărcare a unui generator în regim nesimetric (c = 20).

Dacă se consideră cazul cel mai dezavantajos cînd generatorul alimentează numai grupuri redresoare atunci curentul invers se exprimă cu relația (16) scrisă sub forma :

$$I_i^2 = K I_d^2$$

astfel că din (32) se obține ecuația :

$$\left(0{,}42 + 0{,}58\,\frac{I_d}{I_n}\right)^2 + cK\,\frac{I_d^2}{I_n^2} = 1$$

a cărei rădăcină este :

$$\frac{I_d}{I_n} = \frac{-0{,}49 + \sqrt{0{,}24 + 4 \cdot 0{,}82\,(cK + 0{,}33)}}{2(cK + 0{,}33)} \tag{34}$$

Admițînd o valoare medie pentru $c = 20$ (a se vedea exemplul de calcul) și considerînd că armonicele nu se amplifică ($K = 0{,}4 + 0{,}2$) se obține din (34) valoarea aproximativă :

$$\frac{I_d}{I_n} \approx \frac{\sqrt{4 \cdot 0{,}82\,cK}}{2cK} = \frac{0{,}9}{\sqrt{cK}} = \frac{0{,}9}{\sqrt{20 \cdot 0{,}6}} = 0{,}26 \tag{35}$$

Rezultatul obținut arată că generatorul de alimentare al grupurilor redresoare nu poate fi încărcat decît cu aproximativ 26% din puterea nominală, ceea ce înseamnă că este necesar un generator cu o putere nominală de patru ori mai mare decît puterea grupurilor redresoare.

5. Exemplu de calcul.

Se va considera schema din fig. 4 și se va presupune că în centrala de alimentare sînt instalate 3 generatoare de cîte 31 500 kW fiecare iar în centrul de consum sînt instalate 4 grupuri redresoare care absorb fiecare din rețeaua de 6 kV cîte un curent de 260 A.

Armonicele de curent generate de cele 4 grupuri redresoare se vor calcula în ipoteza cea mai dezavantajoasă (cu armonicele necompensate) folosind relațiile (2) :

$$I_5 = \frac{1}{5} 4 \cdot 260 = 208 \ A$$

$$I_7 = \frac{1}{7} 4 \cdot 260 = 149 \ A$$

Coeficienții de amplificare ai armonicelor de curenți au fost calculați cu relația (6) și verificați cu relația (11). S-au trasat curbele de variație a coeficienților de amplificare (fig. 7) pentru trei ipoteze de funcționare și s-au determinat valorile coeficienților de amplificare pentru armonicele 5 și 7 :

1) În centrală funcționează un generator : $a_5 = 12{,}5$ și $a_7 = 1{,}25$; se observă că pulsația de rezonanță este foarte apropiată de armonica 5.

2) În centrală funcționează două generatoare : $a_5 = 2{,}13$ și $a_7 = 25$; se observă că pulsația de rezonanță este foarte apropiată de armonica 7.

3) În centrală funcționează trei generatoare : $a_5 = 1{,}35$ și $a_7 = 3{,}18$; se observă că pulsația de rezonanță trece în domeniul armonicelor mai mari decît 7, care nu mai prezintă pericol pentru generator.

Parametrii K și K_n din ecuația (33) se calculează pentru cele trei regimuri considerate :

— un generator $K = 10\left(\frac{12{,}5^2}{5^2} + \frac{1{,}25^2}{7^2}\right) = 62{,}5$;

$$K_n = \left(\frac{4 \cdot 260}{2\,900}\right)^2 = 0{,}129$$

— două generatoare $K = 10\left(\frac{2{,}13^2}{5^2} + \frac{25^2}{7^2}\right) = 129{,}8$;

$$K_n = \left(\frac{4 \cdot 260}{2 \cdot 2900}\right)^2 = 0{,}032$$

— trei generatoare $K = 10\left(\frac{1{,}35^2}{5^2} + \frac{3{,}18^2}{7^2}\right) = 2{,}7$;

$$K_n = \left(\frac{4 \cdot 260}{3 \cdot 2900}\right)^2 = 0{,}014$$

Pentru a determina parametrul c se folosește relația (29) în care $e = 0{,}25$, $P_{rn} = 90$ kW iar P_{in} se calculează cu ajutorul relației (25) în care se ia :

$$\delta = 0{,}03m \quad ; \quad \tau = 0{,}44\,\pi\, m$$

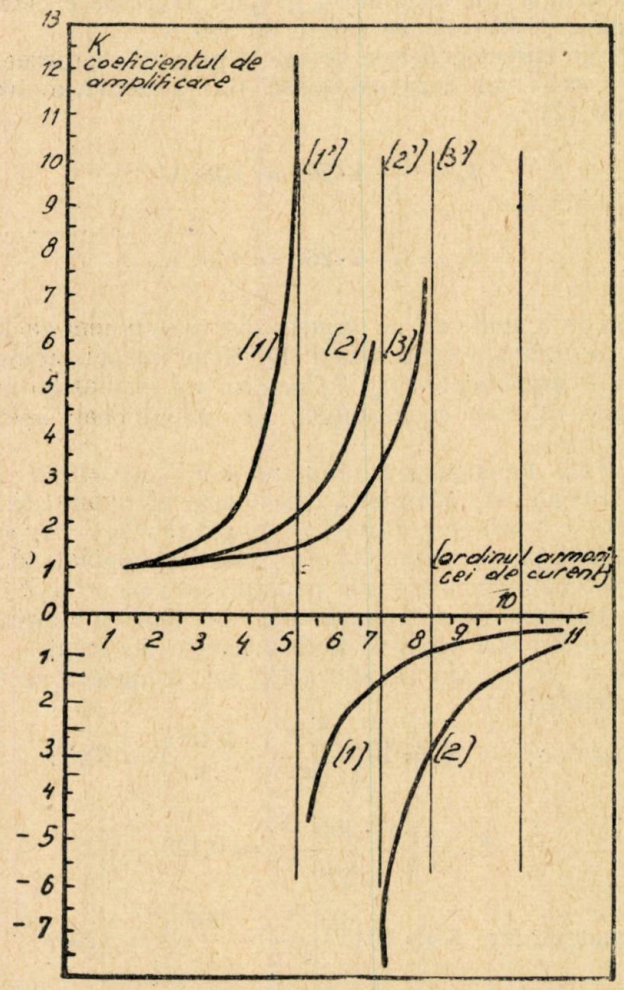


Fig. 7. Variația coeficienților de amplificare pentru trei ipoteze de funcționare :
1 — un generator ; *2* — două generatoare ; *3* — trei generatoare.

$$X = 1{,}6\,\frac{6300^2}{31{,}5 \cdot 10^6} = 2\ \Omega$$

$$I_{in} = I_n = \frac{31{,}5 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 6300} = 2\,900\ A$$

Efectuînd calculele se obține:

$$P_{in} = 3\pi^2 \frac{0{,}03}{0{,}21\pi^2} \cdot 2 \cdot 2900^2 = 7{,}4 \cdot 10^6 \, W$$

$$c = 0{,}25 \frac{7{,}4 \cdot 10^6}{0{,}9 \cdot 10^5} \approx 20$$

Se calculează produsele cKK_n pentru cele trei regimului considerate:

— regimul cu un generator $cKK_n = 20 \cdot 62{,}5 \cdot 0{,}129 = 161$
— regimul cu două generatoare $cKK_n = 20 \cdot 129{,}8 \cdot 0{,}032 = 82$
— regimul cu trei generatoare $cKK_n = 20 \cdot 0{,}27 \cdot 0{,}014 = 0{,}08$

Rezultatele obținute arată că numai în cazul regimului al treilea este posibilă funcționarea deoarece numai în acest caz relația (33) duce la determinarea unei rădăcini reale:

$$\frac{I_d}{I_n} = 1{,}7\sqrt{1 - 0{,}08} - 0{,}72 = 1{,}7 \cdot 0{,}96 - 0{,}72 = 0{,}91$$

Este ușor de văzut că primul regim nu este posibil în special din cauza amplificării mari a armonicei de ordinul 5 iar regimul al doilea nu este posibil în special din cauza amplificării mari a armonicei de ordinul 7. În regimul al treilea, care este posibil, generatoarele vor alimenta grupurile redresoare, precum și alți consumatori obișnuiți pînă cînd se vor încărca cu o putere de 91% din puterea nominală. În acest caz puterea redresoarelor ($4 \cdot 2{,}7 = 10{,}8$ MW) reprezintă 11% din puterea generatoarelor ($3 \cdot 31{,}5 = 94{,}5$ MW).

Într-un mod analog se pot studia și alte regimuri în care se consideră că nu sînt în funcțiune toate grupurile redresoare sau că ele sînt încărcate cu sarcini parțiale. Pentru studiul acestor regimuri diferite se pot folosi de asemenea și curbele trasate în fig. 5.

Din cele de mai sus rezultă în mod clar că funcționarea redresoarelor cu armonicele necompensate este extrem de dezavantajoasă pentru generatoare. Funcționarea se îmbunătățește în mod esențial dacă se funcționează în schema cu armonicele compensate. În acest caz armonica 7 este complet compensată iar armonica 5 este redusă la jumătate. Coeficienții corespunzători celor trei regimuri vor fi:

— un generator $K = 10 \frac{12{,}5^2}{2^2 5^2} = 15{,}6$

— două generatoare $K = 10 \frac{2{,}13^2}{2^2 \cdot 5^2} = 0{,}45$

— trei generatoare $K = 10 \frac{1{,}35^2}{2^2 \cdot 5^2} = 0{,}18$

Produsele cKK_n corespunzătoare celor trei regimuri vor fi:

— un generator $cKK_n = 20 \cdot 15{,}6 \cdot 0{,}129 = 40{,}4$

— două generatoare $cKK_n = 20 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}032 = 0{,}29$

— trei generatoare $cKK_n = 20 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}014 = 0{,}05$

Introducînd valorile obținute în relația (33) rezultă:

— două generatoare $\frac{I_d}{I_n} = 1{,}7 \sqrt{9 - 0{,}29} - 0{,}72 = 0{,}71$

— trei generatoare $\frac{I_d}{I_n} = 1{,}7 \sqrt{1 - 0{,}05} - 0{,}72 = 0{,}94$

Se constată că nici în cazul compensării armonicelor nu este posibilă funcționarea cu un singur generator și aceasta se datorește amplificării mari pe care o capătă armonica de ordinul 5.

Trebuie menționat că toate calculele efectuate sînt acoperitoare dat fiind că la calculul coeficienților de amplificare ai armonicelor nu s-a ținut seama de rezistențele rețelei. Evident că în cazul real, armonicele de curent care parcurg înfășurările statorice ale generatoarelor sînt mai mici decît cele calculate și deci generatoarele funcționează în condiții mai bune decît cele rezultate din calcul.

6. CONCLUZII

Considerațiile teoretice și calculele efectuate arată că armonicele de curent, produse de redresoare, au o influență hotărîtoare asupra încălzirii generatoarelor și în consecință ele determină regimurile de funcționare ale acestora. Este necesară determinarea cît mai exactă a armonicelor și a coeficienților de amplificare prin calcule analitice sau mai bine prin analiza armonică a oscilogramelor de curent ridicate experimental la grupurile redresoare și la generatoare.

Determinarea regimurilor de funcționare a generatoarelor s-a făcut prin unirea a două teorii întîlnite în literatura de specialitate și anume: echivalarea armonicelor de curent printr-un curent de succesiune inversă (B. 14) și studiul încărcării generatoarelor la funcționarea în regim nesimetric (B. 4). Unirea acestor două teorii cunoscute s-a dovedit deosebit de utilă deoarece a permis stabilirea unor relații simple pentru determinarea încărcărilor admisibile ale generatoarelor parcurse de armonice de curent.

Pentru determinarea pierderilor suplimentare în rotor s-a stabilit o formulă (25) deosebit de simplă și practică, neîntîlnită în literatura de specialitate. Ideea de a exprima pierderile suplimentare în funcție de reactanță, care este o mărime ușor de determinat experimental, s-a dovedit foarte utilă, deoarece a permis să se elimine din formulă o serie de parametri ca n, ξ, l, care sînt incluși în reactanță.

Studiul efectuat permite să se tragă concluzii utile în legătură cu posibilitățile de reducere a armonicelor de curent și cu determinarea încărcării generatoarelor.

I. Dintre măsurile de micșorare a armonicelor de curent cele mai eficace sînt cele referitoare la compensarea unor armonice prin utilizarea schemelor speciale și cele referitoare la micșorarea coeficienților de amplificare prin modificarea parametrilor rețelei.

a) Din analiza celor două posibilități de funcționare notate în lucrare cu A și B a rezultat avantajul primei, la care armonicele de ordinul 7 sînt anulate iar amplitudinile armonicelor de ordinul 5 sînt reduse la jumătate. Este necesar ca în sistemele electrice să se utilizeze numai scheme de funcționare a redresoarelor de tipul A.

b) Din examinarea curbelor de variație a coeficienților de amplificare se constată că există pericolul apariției rezonanței de curent pe armonicele 5 și 7 pentru anumite scheme de conexiuni ale sistemului. Din exemplul de calcul se constată că rezonanța pe armonica 5 poate să apară în cazul cînd în centrală funcționează un singur generator, iar rezonanța pe armonica 7 poate să apară în cazul cînd în centrală funcționează 2 generatoare. Se observă de asemenea că o dată cu mărirea numărului de generatoare frecvența de rezonanță se deplasează în domeniul armonicelor superioare, care nu prezintă pericol pentru rețea. O atenție deosebită trebuie acordată rezonanței pe armonica 5, deoarece aceasta rămîne necompensată. Exemplul de calcul arată că tocmai din cauza amplificării mari a armonicei de ordinul 5 nu este posibilă funcționarea cu un singur generator în centrală cu toate că puterea nominală a acestuia (31,5 MVA) este de trei ori mai mare decît puterea nominală a celor patru grupuri redresoare (4×2,7 MVA).

II. Regimurile recomandabile ale generatoarelor trebuie determinate astfel încît generatoarele să fie încărcate cît mai aproape de puterea nominală. Din analiza rezultatelor obținute în exemplul de calcul se pot trage următoarele concluzii:

a) Funcționarea cu armonicele compensate și cu două generatoare în centrală duce la încărcarea generatoarelor cu numai 71% din puterea nominală și deci această funcționare nu poate fi considerată acceptabilă.

b) Funcționarea cu armonicele compensate și cu trei generatoare în centrală duce la încărcarea generatoarelor cu 94% din puterea nominală și deci această funcționare poate fi considerată acceptabilă.

c) Se poate stabili o relație aproximativă între puterea redresoarelor și a generatoarelor care le alimentează în condiții acceptabile. Dacă se consideră acceptabilă funcționarea în care generatoarele sînt încărcate cu aproximativ 94% din puterea nominală rezultă că puterea grupurilor redresoare alimentate dintr-un sistem nu trebuie să depășească aproximativ 11% din puterea sistemului.

Catedrele de centrale și rețele electrice
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Kaganov I. L.:* Electronîie i ionîie preobrazovateli. Gosenergoizdat 1956.

[2] *L. M. Postnicov:* Proectirovanie electriceschih maşinî. Gostehisdat U.R.S.S. — Kiev, 1952.

[3] *Richter R.:* Elektrische Maschinen Die Induktionemaschinen.

[4] *Siromiatnicov I. A.:* Rejigh rabotî sinhronnîh generatorov. Gosenergeizdat, 1952.

[5] *M. P. Kostenko* şi *L. P. Neuman:* Electromagnitnoe proţessî vî sistemah sî moşnîmi vîpreamiteleami ustanovkami Izd. A.N. S.S.S.R. 1946.

[6] *Basta J.:* Anlauf eines massivem Stahlzylinderst im magnetischen Drehfeld E.U.M., 1955, pag. 222.

[7] *Rosemberg E.:* Wirbelstrôme in massivem Eisen E.U.M., 1923, p. 317—701—717.

[8] *Kubler E.* şi *W. Leukert:* Oberwellen belastung von Drehstromnetzen durch Stromerichter. E. U. M. (1936), pag. 37.

[9] *Budeanu C.:* Aspecte tehnice ale fenomenelor reactive şi deformante. Electricitatea 1951, nr. 2, pag. 13 şi nr. 3, pag. 6.

[10] *Prigent H.:* Production et propagation des fréquences harmoniques dans les réseaux de transport d'énergie. RGE 1953, pag. 303.

[11] *Laurent P. G.:* Observations sur les courants harmoniques produits par les mutateurs dans les réseaux d'alimentation. CIGRE, raport, 1925, Paris, 1946.

[12] *Novacu V.:* Introducere în Electrodinamică — Edit. Academiei R.P.R., 1955.

[13] *Rudemberg E.:* Procese tranzitorii în sistemele electromagnetice, I. L. Moscova, 1955.

[14] *Dr. Schulze E.:* Verhalten der Kraftwerksgeneratoren bei Oberwellenbelastung Bericht N. 3/48 (Institut für Energetik) Berlin.

[15] *Traivos M. D.:* Armonicile superioare în sistemul energetic şi acţiunea lor asupra funcţionării echipamentului electric (Elektricestvo anul 1956, nr. 3) — (în traducere, pag. 156).

[16] *Dinculescu C., Arie A., Potolea E., Iordănescu I.:* Influenţa armonicilor produse de o instalaţie de redresoare asupra unui sistem energetic (Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din I.P.B., 1958).

ВЛИЯНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКОВ, ПРОИЗВЕДЕННЫХ ВЫПРЯМИТЕЛЯМИ, НА РАБОТУ ЕЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Краткое содержание)

В работе исследоваются гармоники тока произведены выпрямителями и термические эффекты этих гармоник на генераторы. Для определения режимов работы генераторов была разработана методика основана на две теории знакомы из технической литературы и именно замещение гармоник тока через ток обратной последовательности и исследовани нагрузки генераторов в несимметричнои нагрузке.

Для определения дополнительных потерей в железе ротора дано расчётное уравнение особенно простое и практическое, в которое входит синхрониое сопротивление машины X, лиждужеледное пространство δ и поларный шаг τ.

INFLUENCE OF CURENT HARMONICS DUE TO RECTIFIERS, ON A POWER SYSTEM

(Summary)

The paper contains a study of the current harmonics due to rectifier systems and their heating effects on generators. A method for the study of the loading conditions of the generators was elaborated, usig two well-known theories of the technical litterature; these are: equivalence of the current harmonics with a current of inverse sequescy and study of the loading of generators functioning with unsymetrical currents.

A simple and practical formula was elaborated for calculating the extralosses in the solid rotor of the generator, which formula uses the synchronous reactance of the generator, the air-gap δ and the pole-pitch τ.

INFLUENCE DES COURENTS HARMONIQUES PRODUITS PAR DES REDRESSEURS SUR LE FONTIONNEMENT D'UN SYSTEM ÉLECTRIQUE

(Résumé)

On étudie les harmoniques de courant produites par les groupes redresseurs et les effet thermiques de celles-ci sur les générateurs. Pour determiner les régimes de fonctionement des generateur, on à etabli une methode fondée sur deux théories connues dans la littérature tehnique; ce sont: l'equivalance des harmonique de courant à un courant de succesion inverse et l'étude du functionnement des générateurs en regime dissymétrique.

Pour determiner les pertes supplémentaire dans le corps massif du rotor, on à établi une formule très simple et practique, dans laquelle figurent la reactance synchrone X du generateur, l'entrefer δ et le pas polaire τ.

EINFLUSS DEN VON STROMRICHTER NERZENGTEN STROMOBERWELLEN AUF DAS VERHALTEN EINES ELEKTRISCHEN NETZES

(Zusammenfassung)

Es werden die von Gleichrichteranlagen heworgerufenen Stromoberwellen studiert, sowie deren Wirkung auf die Erwärmung der Generatoren. Zwecks Ermittlung der Betriebszustände der Generatoren wurde eine Methode ausgearbeitet, welche sich auf zwei, aus der Fachliteratur bekanten Theorien, stützt, u. zw. Ersatz der Stromoberwellen durch ein symetrisches Stromsystem entgegengesetzer Drehrichtung und Studium der Belatung der Generatoren in unsymetrischem Betrieb.

Zur Ermittlung der zusätzlichen Verluste im massiven Körper des Rotors, wurde eine besonders einfache und praktische Formel ausgearbeitet in welcher folgende Kenngrössen vorkommen : der Synchronblindwidestand des Generators X, der Luftspalt δ und die Polteilung τ.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

O DEFINIȚIE INVARIANTĂ A MĂRIMILOR DE STARE MACROSCOPICĂ A CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN MEDII ÎN MIȘCARE *

ALEXANDRU TIMOTIN

1. În electrodinamica relativistă macroscopică mărimile de stare macroscopică a cîmpului electromagnetic, în raport cu un referențial inerțial *oarecare*, sînt definite direct (experimental) numai în vid, cu ajutorul acțiunilor ponderomotoare exercitate asupra unor corpuri de probă. În interiorul corpurilor polarizate electric sau magnetizate, aceste mărimi se introduc direct (cu ajutorul unor cavități potrivit alese) numai în referențialul propriu R_0, care se găsește în repaus relativ și instantaneu cu punctul din corp considerat, și anume în modul cunoscut din teoria clasică a lui Maxwell și Hertz (v. [1]). Valorile lor în alt referențial inerțial sînt deduse pe baza postulării modului lor de transformare la schimbarea sistemului inerțial de referință, compatibil cu invarianța ecuațiilor lui Maxwell. Prezentarea sistematică a unei teorii fizice impune însă existența posibilității de a defini în prealabil, într-un singur mod în orice referențial inerțial (adică invariant), mărimile fundamentale ale teoriei.

În lucrarea de față ne propunem să stabilim o asemenea definiție directă, invariantă, calculînd cîmpul electric și cîmpul magnetic în vidul unor cavități de forme și orientări adecvate și arătînd că mărimile de stare $\bar{E}$, $\bar{D}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$ (definite relativist în referențialul inerțial R, oarecare) pot fi exprimate ca funcții lineare și omogene de vectorii din vidul cavităților considerate. Un asemenea calcul nu prezintă nici un fel de dificultate de principiu și are la bază conservarea componentelor normale ale inducțiilor $\bar{B}$ și $\bar{D}$ și conservarea componentelor tangențiale ale intensităților „active" $\bar{E}+\bar{v}\times\bar{B}$ și $\bar{H}-\bar{v}\times\bar{D}$, la trecerea prin orice suprafață de discontinuitate neîncărcată cu sarcină electrică (v. [2]). Rezultatul prezintă interes, și reprezintă generalizarea imediată a situației cunoscute de la medii în repaus, numai în măsura în care formulele care exprimă mărimile de stare nu conțin decît mărimile (măsurate în

* Comunicare prezentată la a 6-a sesiune științifică a cadrelor didactice din I.P.B., din 17—18 decembrie 1960.

vidul cavităților) cari sînt de aceeași natură cu cele definite (adică mărimi electrice respectiv mărimi magnetice), și nu conțin viteza locală $\bar{v}$ a mediului.

În cele ce urmează vom arăta că această situație se realizează efectiv în cazul folosirii unui sistem de trei cavități-fante triortogonale, din care prima e transversală față de viteză.

2. Considerăm, mai întîi, o cavitate vidă de forma unei fante extrem de plate de normală $\bar{n}$. Cavitatea se deplasează față de R cu viteza $\bar{v}$ a mediului și măsurăm, cu corpuri de probă *fixe* în R, vectorul cîmp electric $\bar{E}_f$ și vectorul inducție magnetică $\bar{B}_f$ din interiorul cavității. În materialul din imediata vecinătate a cavității intensitățile $\bar{E}$ și $\bar{H}$, inducțiile $\bar{B}$ și $\bar{D}$, polarizația electrică $\bar{P}=\bar{D}-\varepsilon_0\bar{E}$ și magnetizația $\bar{M}=\frac{1}{\mu_0}\bar{B}-\bar{H}$ au valorile lor locale, neperturbate — așa cum se știe — de practicarea cavității. Un calcul simplu bazat pe conservarea componentelor menționate mai sus arată că la trecerea prin orice suprafață de discontinuitate (atașată corpului) se conservă mărimile:

$$\bar{D}\bar{n} \text{ și } (\bar{E}\times\bar{n})\left(1-\frac{(\bar{v}\bar{n})^2}{c_0^2}\right)+\mu_0\,\bar{n}\times\bar{P}\,(\bar{v}\bar{n})^2+\mu_0\,(\bar{v}\bar{n})\,\bar{n}\times(\bar{M}\times\bar{n})$$

(1)

$$\bar{B}\bar{n} \text{ și } (\bar{H}\times\bar{n})\left(1-\frac{(\bar{v}\bar{n})}{c_0^2}\right)+\bar{n}\times\bar{M}\frac{(\bar{v}\bar{n})}{c_0^2}-\bar{n}\times(\bar{P}\times\bar{n})\,(\bar{v}\bar{n})$$

cu $c_0^2=\frac{1}{\mu_0\,\varepsilon_0}$ și $\bar{n}$ versorul normal.

Din aceste relații se obțin pentru mărimile din imediata vecinătate a suprafeței (față de vid) a unui corp, și deci și pentru mărimile din cavitatea-fantă, valorile:

$$\bar{E}_f=\frac{\bar{D}_f}{\varepsilon_0}=\bar{E}+(\bar{P}\bar{n})\,\bar{n}\frac{1}{\varepsilon_0}+[\bar{n}\times(\bar{n}\times\bar{P})\,(\bar{v}\bar{n})^2\mu_0+\mu_0\,(\bar{v}\bar{n})\,\bar{n}\times\bar{M}]\frac{1}{1-\frac{(\bar{v}\bar{n})^2}{c_0^2}}$$

(2)

$$\bar{B}_f=\mu_0\bar{H}_f=\bar{B}-\bar{n}\times(\bar{M}\times\bar{n})\,\mu_0+[\bar{n}\times(\bar{n}\times\bar{M})\,(\bar{v}\bar{n})^2/c_0^2-$$

$$-\bar{n}\times\bar{P}\,(\bar{v}\bar{n})]\frac{\mu_0}{1-\frac{(\bar{v}\bar{n})^2}{c_0^2}}$$

(3)

După cum se constată în expresiile mărimilor electrice apar cele magnetice și reciproc. Alegînd convenabil orientarea fantelor acest inconvenient poate fi eliminat.

3. Menținîndu-ne deocamdată la calculul mărimilor electrice, considerăm trei fante triortogonale de orientări

$$(4) \qquad \bar{n}_1 = \bar{v}/v, \ \bar{n}_2 \perp \bar{n}_1 \text{ și } \bar{n}_3 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$$

în cari vectorii — cîmp — electric $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$, rezultă

$$(5) \qquad \bar{E}_1 = \bar{E} + (\bar{n}_1 \bar{P})\,\bar{n}_1 \frac{1}{\varepsilon_0} + \left[\bar{n}_1 \times (\bar{n}_1 \times \bar{P}) \frac{v^2}{c^2 \varepsilon_0} + \right.$$

$$\left. + \bar{v} \times \bar{M} \frac{1}{c^2 \varepsilon_0}\right] \frac{1}{1 - v^2/c_0^2}$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E} + (\bar{n}_2 \bar{P})\,\bar{n}_2 \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E}_3 = \bar{E} + (\bar{n}_3 \bar{P})\,\bar{n}_3 \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Se verifică imediat relațiile

$$\bar{E}_j \bar{n}_j = \bar{D} \bar{n}_j \frac{1}{\varepsilon_0} \text{ și } \bar{E}_2 \bar{n}_1 = \bar{E}_3 \bar{n}_1 = \bar{E} \bar{n}_1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

și pentru mărimile de stare electrică $\bar{E}$ și $\bar{D}$ se obțin următoarele relații de definiție în funcțiune de vectorii-cîmp electric din vidul cavităților arătate:

$$(7) \qquad \boxed{\begin{aligned} \bar{D} &= \varepsilon_0 [\bar{n}_1 (\bar{E}_1 \bar{n}_1) + \bar{n}_2 (\bar{E}_2 \bar{n}_2) + \bar{n}_3 (\bar{E}_3 \bar{n}_3)] \\ \bar{E} &= \bar{E}_3 + \bar{n}_3 (\bar{E}_2 - \bar{E}_3) \bar{n}_3) = \bar{E}_2 + \bar{n}_2 (\bar{E}_3 - \bar{E}_2) \bar{n}_2) \end{aligned}}$$

Pentru mărimile de stare magnetică $\bar{B}$ și $\bar{H}$ se obțin pe aceeași cale expresiile analoge

$$(8) \qquad \boxed{\begin{aligned} \bar{B} &= \bar{n}_1 (\bar{B}_1 \bar{n}_1) + \bar{n}_2 (\bar{B}_2 \bar{n}_2) + \bar{n}_3 (\bar{B}_3 \bar{n}_3) \\ \bar{H} &= \frac{1}{\mu^0} [\bar{B}_3 + \bar{n}_3 (\bar{n}_3 (\bar{B}_2 - \bar{B}_3))] = \frac{1}{\mu_0} [\bar{B}_2 + \bar{n}_2 (\bar{n}_2 (\bar{B}_3 - \bar{B}_2))]. \end{aligned}}$$

Valorile expresiilor de mai sus constituie invarianți ai rotației sistemului de cavități triortogonale în jurul direcției $\bar{n}_1$ a vitezei locale $\bar{v} = v\,\bar{n}_1$; în particular dacă se alege $\bar{n}_2 \perp \bar{P}$ se obține $\bar{E} = \bar{E}_2$, iar dacă se alege $\bar{n}_2 \perp \bar{M}$ se obține $\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_2$.

Institutul Politehnic din București
Catedra de Electrotehnică I

BIBLIOGRAFIE

[1] *R. Rădulet:* Bazele teoretice ale Electrotehnicii, vol. I, Lit. Învățământului, București 1955.

[2] *Ș. Țițeica:* Electromagnetism (note de curs predate la Universitatea C. I. Parhon în 1954—55).

[3] *V. Novacu:* Introducere în Electrodinamică, vol. II, Edit. Acad. R.P.R., 1955.

[4] *A. Einstein:* Teoria relativității, Edit. Tehnică, 1957.

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ИНВАРИАНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩИХ

(Краткое содержание)

В статье доказывается что величины состояния электромагнитного поля, $\bar{E}$, $\bar{D}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$ имеют прямое определение в любой инерциальной системы отсчета, посредством векторов $\bar{E}_j$ и $\bar{B}_j$ $(j = 1\ 2\ 3)$ измеренные в вакууме трех плоских чилиндрических полостей с ориентацией $\bar{n}_j$, представляющие триортогональную систему, единичный вектор $\bar{n}_1$ имея направление паралелнное местной скорости тела. Получаются инвариантые соотношения

$$\bar{E} = \bar{E}_3 + \bar{n}_3 [\bar{n}_3 (\bar{E}_2 - \bar{E}_3)] \quad ; \quad \bar{D} = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \bar{n}_j (\bar{E}_j \bar{n}_j)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} [\bar{B}_3 + \bar{n}_3 (\bar{n}_3 (\bar{B}_2 - \bar{B}_3))] \quad ; \quad \bar{B} = \sum_{j=1}^{3} \bar{n}_j (\bar{B}_j \bar{n}_j)$$

которое не зависят от скорости тела.

A INVARIANT MACROSCOPICAL DEFINITION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD QUANTITIES IN MOVING BODIES

(Summary)

In this paper is shown that the state quantities of the macroscopic electromagnetic field $\bar{E}$, D, $\bar{B}$, $\bar{H}$, can be introduced directly, in any inertial reference frame, by using vectors $\bar{E}_j$ and $\bar{B}_j$, $(j=1, 2, 3)$, as measured in the vacuum of cilindrical very flat cavities, the orientation

unit vector of which, $\bar{n}_j$ constitute a triortogonal basis, $\bar{n}_1$ beeing parallel with the local body velocity. Thus the expressions

$$\bar{E} = \bar{E}_3 + \bar{n}_3(\bar{n}_3(\bar{E}_2 - \bar{E}_3)) \quad ; \quad \bar{D} = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \bar{n}_j(\bar{E}_j \bar{n}_j)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0}(\bar{B}_3 + \bar{n}_3(\bar{n}_3(\bar{B}_2 - \bar{B}_3))) \quad ; \quad \bar{B} = \sum_{j=1}^{3} \bar{n}_j(\bar{B}_j \bar{n}_j)$$

are obtained; they have the same form in any interial reference frame.

UNE DEFINITION MACROSCOPIQUE INVARIANTE DES GRANDEURS D'ETAT DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

(Résumé)

On démontre que les grandeurs d'état $\bar{E}$, $\bar{B}$, $\bar{D}$, $\bar{H}$ du champ électromagnétique macroscopique peuvent être introduites, de manière directe, en chaque referentiel d'inertie, en utilisant les vecteurs $\bar{E}_j$ et $\bar{B}_j$ ($j=1, 2, 3$) mesurés dans le vide de trois cavités cylindriques, trés applaties, dont les verseurs $\bar{n}_j$ constituent un repère triortogonal, le verseur $\bar{n}_1$ étant dirigé suivant la direction de la vitesse locale du milieu.

EINE MAKROSKOPISCHE INVARIANTE DEFINITION DER ELEKTROMAGNETISCHEN FELDGRÖSSEN IM BEWEGTEN KÖRPER

(Zusammenfassung)

Es wird gezeigt dass die makroskopischen Zustandgrössen $\bar{E}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{H}$, des elektromagnetischen Felds im jedem Inertialbezugsystem eingeführt werden können, mit Hilfe der Vektoren $\bar{E}_j$, $\bar{B}_j$ ($j=1, 2, 3$), gemessen in drei leeren Spalte — dessen Versoren $\bar{n}_j$ einen triortogonalen Achsensystem bilden, wobei der Verson $\bar{n}_1$ paralle zur Ortsgeschwindigweit ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XIV — 1962, Fascicola 2

FORȚA MINIMĂ DE ATRACȚIE LA ELECTROMAGNEȚII MONOFAZAȚI

VALERIU PANAITE

Una din mărimile de bază la electromagneții monofazați, prevăzuți cu spire în scurtcircuit, este forța minimă. Cunoașterea exactă a acestei mărimi, prezintă o importanță deosebită atît în proiectare cît și în exploatarea electromagneților.

Forța minimă de atracție creată de un electromagnet, la aceiași valoare a fluxului, depinde de o serie de parametri. Alegerea corectă a parametrilor la proiectarea electromagneților conduce la economii de material însemnate. Se poate astfel ajunge ca un electromagnet cu dimensiuni reduse, la care s-a adoptat parametrii optimi, să dezvolte o forță minimă mai mare decît a unui electromagnet cu dimensiuni mari, la care însă nu s-a acordat suficientă atenție la alegerea acestor mărimi. De asemeni, în exploatare, dacă un electromagnet monofazat nu dezvoltă forța minimă necesară, începe să producă vibrații supărătoare atît prin zgomotul care-l face cît și prin deranjamentele pe care le poate provoca (desfacerea și slăbirea pieselor, sudarea contactelor etc.).

In prezenta lucrare, se propun relații de calcul pentru forța minimă de de atracție, indicîndu-se parametrii optimi cari duc la o rațională dimensionare a electromagneților, Deosebit de importantă este observația că direcția de tăiere a tolelor în porțiunea polului electromagnetic are o influență foarte mare asupra forței minime de atracție. Neglijarea acestui lucru face ca rezultatele pentru poziția închisă, să nu aibă decît valoarea unor simple aproximații. Tolele miezului magnetic avînd forme diferite (L, E, I), în funcție de tipul electromagnetului, fac ca în mod fatal anumite porțiuni să coincidă cu direcția de laminare a foaiei de tablă, iar altele nu. De asemeni stanțarea tablei silicioase făcîndu-se în general după criterii economice, urmărind obținerea unui număr maxim de tole, se ajunge ca miezul electromagnetului să fie format din tole tăiate după direcții diferite în raport cu direcția de laminare. Acest lucru face ca la o serie de electromagneți, indentici ca tip și mărime construiți din aceeași tablă silicioasă, miezul magnetic să prezinte caracteristici deosebite. Astfel se explică diferența destul de mare care poate să apară între forțele minime de atracție la electromagneții aceleași serii.

Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, decembrie 1960.

De asemeni se observă că se poate ajunge la relații de calcul pentru poziția închis, valabile atît la electromagneții de tip E cît și la electromagneții de tip U, demonstrîndu-se astfel reducerea, pe cale analitică, a electromagnetului de tip E la tipul U.

2. Considerații asupra polului magnetic ecranat.

2.1. *Distribuția fluxurilor.*

Prezența spirei în scurtcircuit determină, în această porțiune a electromagnetului, existența a două fluxuri decalate în timp: fluxul Φ_2 care străbate secțiunea ecranată S_2 și fluxul Φ_1 care trece prin secțiunea neecranată S_1 (fig. 1). În fig. 1, s-au notat întreferurile ecranate și neecranate cu δ_2 și δ_1.

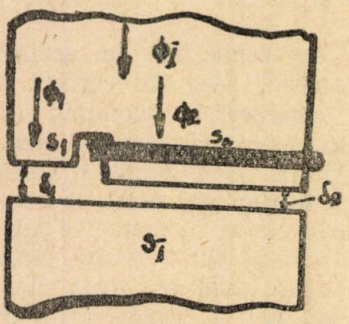


Fig. 1. Polul electromagnetului ecranat

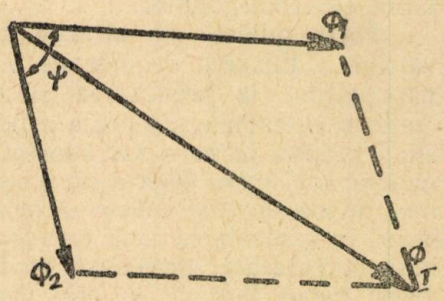


Fig. 2. Diagrama vectorială a fluxurilor Φ_1 și Φ_2

Spira în scurtcircuit este echivalentă cu o impedanță magnetică, defazînd în urmă fluxul ecranat Φ_2 cu un unghi ψ față de fluxul neecranat Φ_1.

Fluxul rezultant $\underline{\Phi}_I = \underline{\Phi}_1 + \underline{\Phi}_2$, străbate secțiunea totală a polului $S_I = S_1 + S_2$.

Distribuția fluxurilor Φ_1 și Φ_2 este determinată în afară de mărimile: S_1, S_2, δ_1, δ_2, ψ și de reluctanța fierului în porțiunea neecranată.

Se fac următoarele notații:

$R_{\delta_1} = \dfrac{\delta_1}{\mu_0 S_1}$ — reluctanța întreferului neecranat

$R_{\delta_2} = \dfrac{\delta_2}{\mu_0 S_2}$ — reluctanța întreferului ecranat

$R_1 = R_{\delta_1} + R_{f_1} = \upsilon R_{\delta_1}$ — reluctanța fierului și întrefierului în porțiunea neecranată,

$Z_m = \sqrt{R_{\delta_1}^2 + X_m^2} = R_{\delta_2}\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\psi}$ — impedanța magnetică a porțiunii ecran

f_u — factorul de umplere al tolelor,

ν — factor de corecție,
μ_0 — permeabilitatea magnetică a aerului.

$$k = \frac{S_2}{S_1}$$

$$n = \nu \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Raportul fluxurilor Φ_1 și Φ_2 va fi:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{R_1}{Z_m} = \frac{S_2}{S_1} \nu \frac{\delta_2}{\delta_1} \cos\varphi = k n \cos\varphi \qquad (1)$$

În mod asemănător, raportul inducțiilor din porțiunea ecranată și neecranată este:

$$\frac{B_2}{B_1} = n \cos\psi \qquad (2)$$

În cazul cînd inducțiile magnetice sînt foarte mici ($B_1 < 1$ [T]) factorul ν poate fi considerat egal cu 1. Existența spirei în scurtcircuit determină în porțiunea neecranată o inducție de cîteva ori mai mare. Astfel dacă $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1$ și $\varphi = 80°$ raportul inducțiilor ar trebui să fie $\frac{B_1}{B_2} = 5{,}6$

La inducții mari pentru același raport $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ și același defazaj ψ, raportul $\frac{B_1}{B_2}$ scade din cauza saturației porțiunii de fier străbătute de fluxul Φ_1. Neglijarea acestui efect de saturație, respectiv a factorului ν, poate să ducă, în majoritatea cazurilor, la erori inadmisibile. Reluctanța totală a porțiunii neecranate, ținînd seama de saturația fierului este:

$$R_1 = R_{\delta_1} + R_{f_1} = R_{\delta_1}\left(1 + \frac{R_{f_1}}{R_{\delta_1}}\right) = \nu R_{\delta_1} \qquad (3)$$

Neglijînd fluxurile de umflări în porțiunea neecranată vom avea pentru reluctanța fierului relația:

$$R_f = \frac{H_f l_f}{\Phi_1} \qquad (4)$$

în care H_f —este cîmpul magnetic în fier corespunzător inducției B_1 (considerînd și factorul de umplere al miezului magnetic, f_u), iar l_f este lungimea porțiunei de fier saturate.

Din măsurătorile de laborator făcute cu ajutorul unor bobine sondă plasate deasupra spirei în scurtcircuit și trecute printr-un canal practicat în miezul de fier, s-a putut constata că osciloscopul catodic, că fluxurile Φ_1 și Φ_2 se reunesc în imediată apropiere a canalului prin care trece spira

în scurtcircuit. În consecință pentru majoritatea electromagneților, lungimea l_f se poate considera egală cu adîncimea canalului spirei (cca. 3 mm).

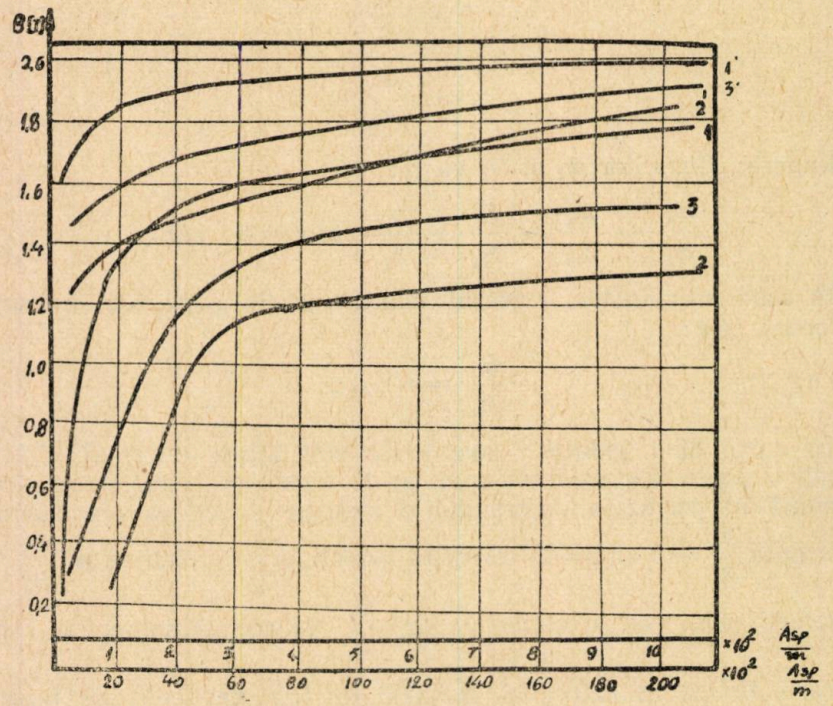


Fig. 3. Curbe de magnetizare pentru tola E_4—1,3

Din relațiile (3) și (4) se poate scoate factorul

$$\nu = 1 + \frac{\mu_0 H_f}{B_1 f_u} \cdot \frac{l_t}{\delta_1} = 1 + \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_f}{f_u \delta_1} \qquad (5)$$

Permeabilitatea relativă μ_r depinde în afară de caracteristicele tolei și inducție, de direcția de tăiere a tolei. În fig. 3 sînt reprezentate curbele de magnetizare ale tolei din tablă siliceoasă E_4—1, 3, cu grosimea de 0, 35 mm. Curbele 1 și 1′ sînt curbele de magnetizare ale tolei tăiate longitudinal, 2 și 2′ pentru tole tăiate transversal, 3 și 3′ pentru tole amestecate (tăiate longitudinal și transversal). Se observă astfel starea de anizotropie magnetică destul de pronunțată, care caracterizează în general tabla silicioasă laminată.

În construcția electromagneților, tolele tăindu-se de forme diferite (*L*, *E*, *T*, etc.), în mod fatal una din ramuri va fi în direcție longitudinală iar alta în direcție transversală.

Pentru a se obține caracteristicele impuse prin proiectare electromagneților, trebuie să se respecte o anumită direcție de tăiere a tuturor tolelor.

În fig. 4 se poate urmări variația factorului ν cu inducția și cu direcția de tăiere a tolelor. La ridicarea acestor curbe s-a considerat raportul $\frac{l_f}{\delta_1} = 100$. Curba 1 se referă la tolele tăiate longitudinal, 2 la tolele tăiate transversal, iar 3 la tolele amestecate.

În cazul cînd $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1$, factorul ν este egal cu n.

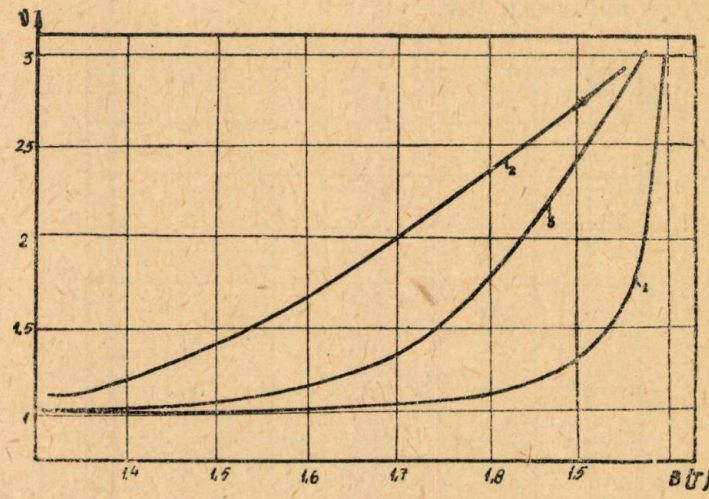


Fig. 4. Variația coeficientului de corecție ν.

Pentru simplificarea relațiilor de calcul se poate lua ca inducție magnetică de bază, în calcule, inducția B_1 a porțiunei neecranate. În acest caz pentru porțiunea ecranată inducția va fi conform relației (2):

$$B_2 = B_1 \frac{n}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} \tag{6}$$

Există de asemeni egalitatea:

$$\Phi_I^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + 2\,\Phi_1 \Phi_2 \cos \psi \tag{7}$$

sau:

$$\Phi_I = \sqrt{1 + \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right) \cos \psi} \tag{8}$$

Introducînd în (8) relația (1) și de asemeni $\frac{S_1}{S_I} = \frac{1}{k+1}$, se ajunge, considerînd factorul de umplere f_u, la expresia inducției magnetice B_I, din pol:

$$B_I = \frac{\sqrt{(kn+1)^2 + \operatorname{tg}^2 \psi}}{f_u (k+1) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} B_1 \tag{9}$$

2.2. *Pierderile în spira în scurtcircuit.*

În timpul funcționării electromagnetului în spira în scurtcircuit se induc curenți intenși. Densitatea de curent atinge valori în jurul a 20 A/mm^2. Deși puterea dezvoltată în spiră la electromagneții de mărime medie poate fi (10—15)w, temperatura în timpul funcționării nu depășește, la spirele în scurtcircuit bine dimensionate, 100—120°C. Acest lucru se datorește condițiilor bune de răcire pe care le are spira, fiind fixată direct pe miezul de fier.

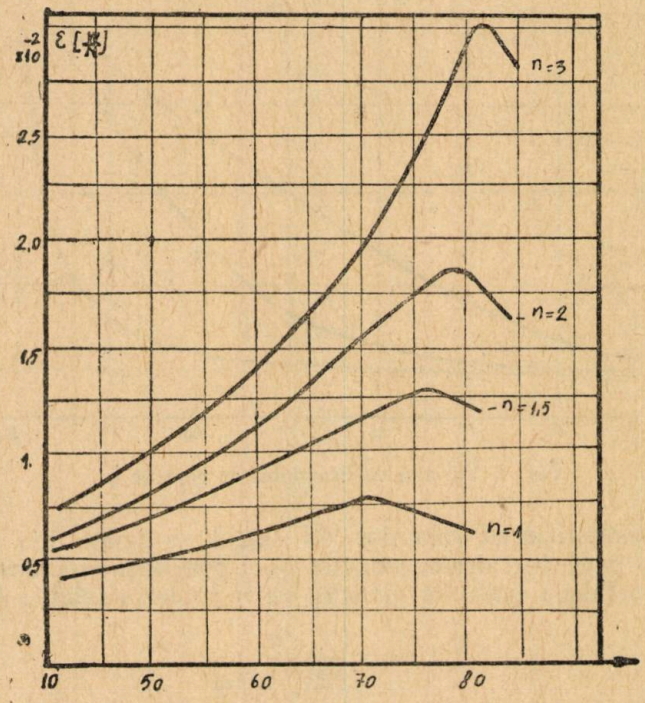


Fig. 5. Coeficientul de pierderi raportate ε, funcție de defazajul ψ, pentru k = 2.

Puterea dezvoltată de spira în scurtcircuit poate fi calculată cu relația :

$$P_{sp} = \frac{\omega^2 \Phi_2^2}{2r} \tag{10}$$

în care : $\omega = 2\pi f$ — pulsația

r — rezistența spirei

Din relațiile (8) și (1) se poate scoate pentru fluxul ecranat expresia :

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_1 \, kn}{\sqrt{(kn+1)^2 + tg^2 \psi}} \tag{11}$$

Rezistența spirei în scurtcircuit [B_1] se consideră egală cu:

$$r = \frac{\omega \Lambda_2}{\operatorname{tg} \psi} \tag{12}$$

în care Λ_2 este permeanța întrefierului ecranat δ_2. Înlocuindu-se expresiile (11) și (12) în relația (10) și de asemeni raportul:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{k+1}{k} \tag{13}$$

se ajunge la formula:

$$P_{sp} = \omega \delta_2 \frac{\Phi_1^{2*}}{2\mu_0 S_1} \frac{(k+1)\, kn^2 \operatorname{tg} \psi}{(kn+1)^2 + \operatorname{tg}^2 \psi} = F_0 \cdot \varepsilon \tag{14}$$

în care F_0 reprezintă valoarea dublă a forței medii dezvoltată de pol în cazul cînd nu ar exista spira în scurtcircuit.

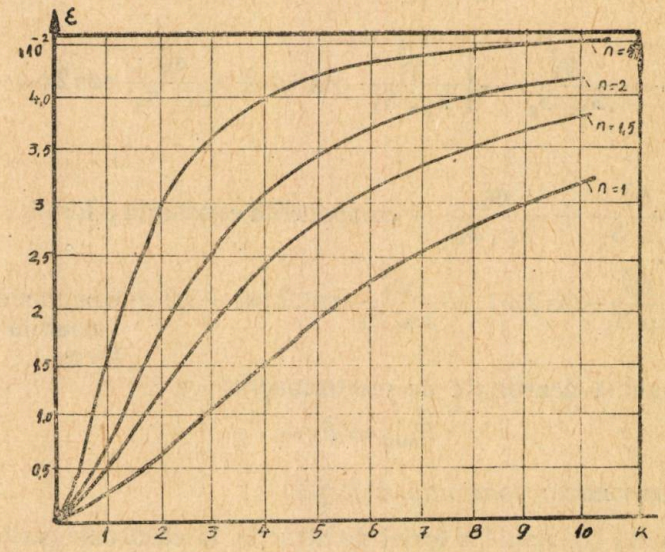


Fig. 6. Variația coeficientului de pierdere raportate în funcție de parometrul k.

Întrefierul minim δ_2 pentru electromagneții cu suprafață bine prelucrată și curățită se poate considera egal cu 0,025 mm.

Pentru același defazaj ψ, pierderile în spira în scurtcircuit cresc direct proporțional cu întrefierul δ_2. De asemenea pierderile, cresc cu creșterea defazajului (fig. 5), atingînd valori maxime pentru:

$$\operatorname{tg} \psi = kn + 1 \tag{15}$$

În relația (14) termenul ε reprezintă coeficientul de pierderi raportate la forța F_0 și se exprimă în $\left[\frac{W}{N}\right]$.

În fig. 6 este redată valoarea coeficientului de pierderi raportate, funcție de parametrul k, la diferite valori ale lui n.

Pentru defazaj, la trasarea curbelor din fig. 6, s-a luat valoarea $\psi = 80°$.

3. Forța minimă la electromagneții monofazați

3.1. *Electromagnetul de tip U.*

Circuitul magnetic al electromagnetului de tip U are forma din fig 7.

Păstrînd notațiile din § 2.1., forța instantanee de tracție care acționează asupra armăturii electromagnetului va fi:

$$F_t = 2\left[\frac{\Phi_1^2 \sin^2 \omega t}{1\,\mu_0 S_1} + \Phi_2^2 \sin^2(\omega t - \psi)\right] \tag{16}$$

sau:

$$F_t = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_1} + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S_2} - \left[\frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_1}\cos \omega t + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S_2}\cos 2(\omega t - \psi)\right] \tag{17}$$

Notăm:

$$F_c = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_1} + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S_2} \text{ — componenta constantă a forței}$$

$$F_v = \frac{\Phi_1^2}{2\mu S_1}\cos 2\omega t + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S_2}\cos 2(\omega t - \psi) \text{ — componenta variabilă a forței} \tag{18}$$

Forța minimă dezvoltată de electromagnet va fi:

$$F_{min} = F_c - F_v \tag{19}$$

3.I.I. *Componenta constantă a forței.*

Componenta constantă a forței de atracție, la electromagneții de tip U, relația (18), poate fi scrisă sub forma:

$$F_c = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_1}\left[1 + \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^2 \left(\frac{S_1}{S_2}\right)\right] \tag{20}$$

Înlocuindu-se în relația (20) expresiile (1), și (8), de asemeni înlocuind cu:

$$\frac{S_I}{S_1} = k + 1 \tag{21}$$

se ajunge la forma:

$$F_c = \frac{\Phi_1^2}{2\mu S_I}(k+1)\frac{kn^2 + 1 + tg^2\psi}{(kn+1)^2 + tg^2\psi} = F_0 \cdot \Delta_{cu} \tag{22}$$

S-au făcut notațiile :

$$F_0 = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_1}$$

$$\Delta_{vu} = \frac{(k+1)(kn^2+1+tg^2\psi)}{(kn+1)^2+tg^2\psi} \tag{23}$$

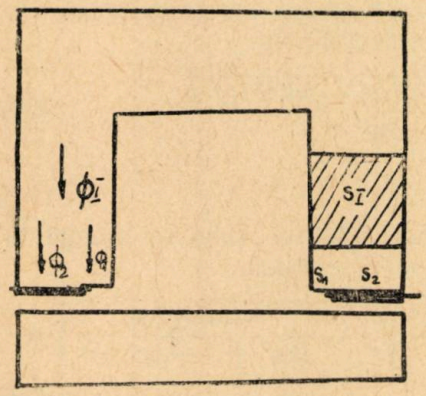


Fig. 7. Electromagnetul de tip U.

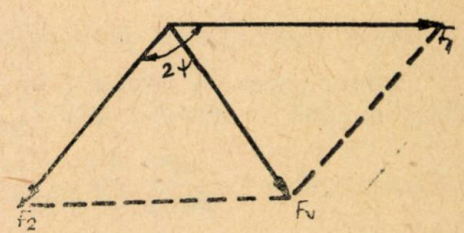


Fig. 8. Diagrama vectorială a componentei variabile a forței

Termenul F_0 reprezintă valoarea medie a forței de atracție, care ar acționa asupra armăturii dacă nu ar exista spiră în scurtcircuit. Se observă că spira mărește forța de atracție medie, lucru verificat și experimental [B_8].

3.1.2. *Componenta variabilă a forței.*

Componenta variabilă a forței de atracție, exprimată de relația (18) se poate reprezenta sub forma unei diagrame vectoriale ca în fig. 8, în care s-au făcut următoarele notații :

$$F_1 = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_1}$$

$$F_2 = \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S_2} \tag{24}$$

Termenul F_1 reprezintă valoarea medie a forței corespunzătoare porțiunilor neecranate, iar F_2 valoarea medie a forței corespunzătoare porțiunilor ecranate.

Modulul componentei variabile a forței de atracție va fi :

$$F_v = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\psi} \tag{25}$$

Procedînd în mod asemănător ca la relația (20) se ajunge ca expresia (25) să capete forma:

$$F_v = \frac{\Phi_1^2}{2\mu S_1}(k+1)\frac{\sqrt{(kn^2+1+tg^2\psi)^2-4kn^2tg^2\psi}}{(kn+1)^2+tg^2\psi} = F_0 \cdot \Delta_{vu} \quad (26)$$

F_0 — are aceeași semnificație ca și în relația (22) iar termenul Δ reprezintă raportul între componenta variabilă a forței de atracție (valoa rea maximă) pentru cazul cînd există spiră și aceeași componentă (la valoarea maximă) cînd nu există spiră în scurtcircuit.

$$\Delta_{vu} = \frac{(k+1)\sqrt{(kn^2+1+tg^2\psi)^2-4kn^2tg^2\psi}}{(kn+1)^2+tg^2\psi} \quad (27)$$

3.1.3. *Forța minimă de atracție.*

Înlocuindu-se în relația (19) formulele (21) și (25) se ajunge la forța minimă de atracție dată de următoarea expresie:

$$F_{min} = F_0(k+1)\frac{kn^2+1+tg^2\psi}{(kn+1)^2+tg^2\psi}\left[1-\sqrt{1-\frac{4kn^2tg^2\psi}{(kn^2+1+tg^2\psi)^2}}\right] = F_0\,\Delta_{mu} \quad (28)$$

în care:

$$\Delta_{mu} = (k+1)\frac{kn^2+1+tg^2\psi}{(kn+1)^2+tg^2\psi}\left[1-\sqrt{1-\frac{4kn^2tg^2\psi}{(kn^2+1+tg^2\psi)^2}}\right] \quad (29)$$

Se observă că forța minimă se poate pune și sub forma:

$$F_{min} = F_c\left[1-\sqrt{1-\frac{4kn^2tg^2\psi}{(kn^2+1+tg^2\psi)^2}}\right] \quad (30)$$

în care F_c este componenta constantă a forței dată de relația (22). Deoare ce forța minimă de atracție $F_m = F_c(1-p)$ în care p reprezintă pulsația forței de atracție [B_8] rezultă expresia pulsației:

$$P = \sqrt{1-\frac{4kn^2tg^2\psi}{(kn^2+1tg^2\psi)}} \quad (31)$$

În fig. 9 se reprezintă variația în timp a forțelor de atracție și a fluxurilor. Curba F_{1t} reprezintă forța instantanee corespunzătoare porțiunii neecranate:

$$F_{1t} = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_1}(1-\cos 2\omega t) \quad (32)$$

Curba F_{2t} reprezintă forța instantanee de atracție corespunzătoare porțiunii ecranate:

$$F_{2t} = \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S_2}[1-\cos 2(\omega t-\psi)] \quad (33)$$

Curbele Φ_1 și Φ_2 corespund fluxurilor ecranate și neecranate. Forța rezultantă instantanee exprimată de relația (16) este reprezentată de curba F_i. Valoarea minimă indicată de curba F_i este egală cu forța minimă de atracție care poate fi calculată cu relația (27).

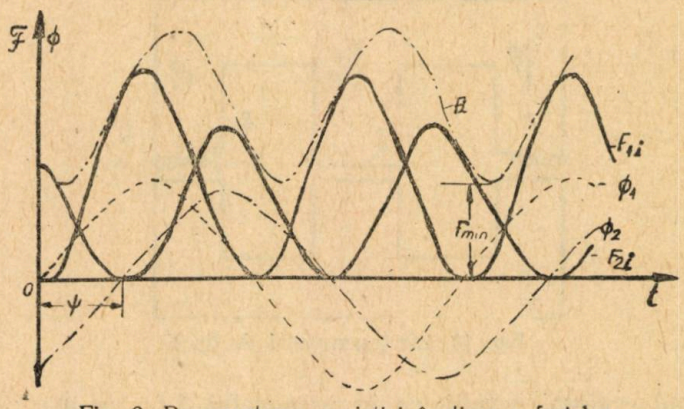


Fig. 9. Reprezentarea variației în timp a forțelor și fluxurilor la electromagnetul tip. U.

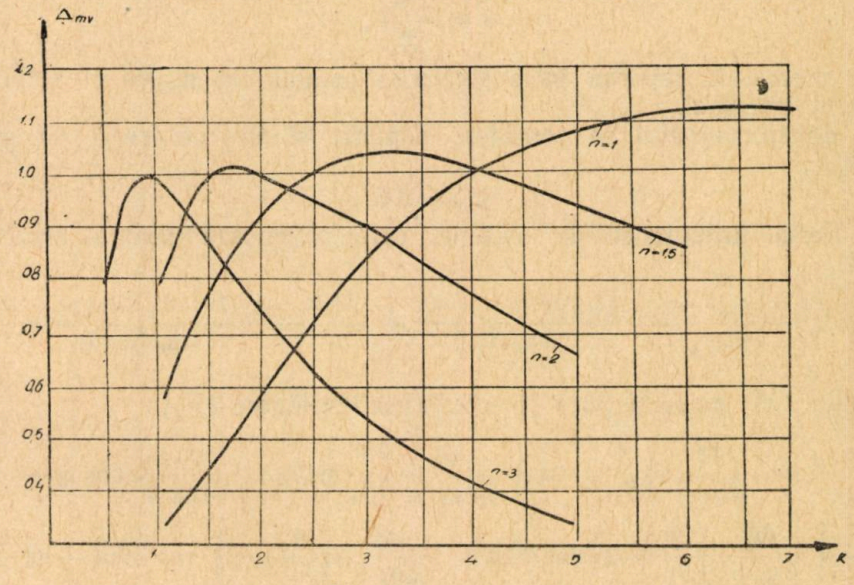


Fig. 10. Variația raportului $\frac{F_{min}}{F_0} = \Delta_{mv}$ cu parametrul k pentru $\psi = 70^0$

În fig. 10 s-au trasat valorile factorului Δ_{mu} pentru $\psi = 70°$, la diverse valori ale parametrului k și n. Se observă că se pot obține situații optime pentru care la anumite valori ale lui φ, n și k, să avem forța minimă maximă.

3.2. *Electromagnetul de tip E.*

Considerăm electromagnetul de tip E cu spire în scurtcircuit pe polii marginali, conform fig. 11.

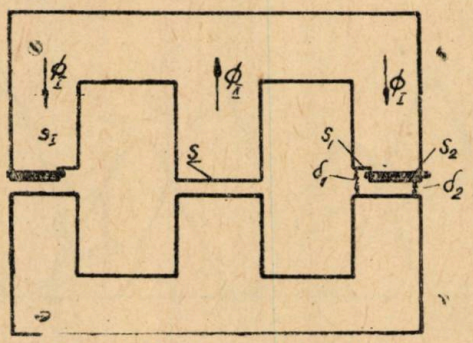


Fig. 11. Electromagnetul de tip E.

Păstrînd aceleaşi notaţii, ca în paragraful 3.1., va apare în plus în acest caz, parametrul :

$$\alpha = \frac{S}{S_I}, \tag{34}$$

care reprezintă raportul între secţiunea polului din mijloc şi secţiunea, polului marginal.

Electromagnetul se consideră simetric şi în consecinţă va exista relaţia :

$$\Phi_{II} = 2\Phi_I. \tag{35}$$

Forţa instantanee de atracţie, care acţionează asupra armăturii, va fi :

$$F_i = 2\left\{\frac{\Phi_1^2 \sin^2 \omega t}{2\mu_0 S_1} + \frac{\Phi_2^2 \sin^2(\omega t - \psi)}{2\mu_0 S_2} + \frac{2[\Phi_1 \sin \omega t + \Phi_2 \sin(\omega t - \psi)]^2}{2\mu_0 S}\right\} \tag{36}$$

Relaţia (35) poate fi pusă şi sub forma următoare [B_9] ;

$$F_i = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S}\left(\frac{S}{S_1} + 2\right) + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S}\left(\frac{S}{S_2} + 2\right) + \frac{4\Phi_1\Phi_2}{2\mu_0 S}\cos\psi -$$

$$- \left[\frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S}\left(\frac{S}{S_1} + 2\right)\cos 2\omega t + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S}\left(\frac{S}{S_2} + 2\right)\cos 2(\omega t - \psi) + \right.$$

$$\left. + \frac{4\Phi_1\Phi_2}{2\mu_0 S}\cos 2\left(\omega t - \frac{\psi}{2}\right)\right] \tag{37}$$

Din expresia (36) suma termenilor constanţi reprezintă valoarea componentei constante a forţei F_c iar termenii variabili — componenta variabilă a forţei de atracţie F_v

3.2.1. *Componenta constantă a forței.*

Componenta constantă a forței este dată de relația:

$$F_c = \frac{\Phi_5^2}{2\mu_0 S}\left[\frac{S}{S_1} + 2 + \left(\frac{S}{S_2} + 2\right)\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^2 + 4\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\cos\psi\right] \tag{38}$$

Inlocuind cu (1) și de asemeni cu

$$\left.\begin{aligned} \frac{S}{S_1} &= \alpha(1+k) \\ \frac{S}{S_2} &= \frac{\alpha(k+1)}{k} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

se ajunge la formula:

$$F_c = F_0\left[\frac{2}{\alpha} + \frac{(k+1)(kn^2+1+\operatorname{tg}^2\psi)}{(kn+1)^2+\operatorname{tg}^2\psi}\right] = F_0\,\Delta_{cE} \tag{40}$$

care reprezintă componenta constantă a forței de atracție pentru electromagnetul de tip *E*.

Termenul F_0, dat de relația următoare:

$$F_0 = \frac{\Phi_I^2}{2\mu_0 S_I}$$

are aceiași semnificație ca la paragraful 3.2.1. Δ_{cE} reprezintă creșterea componentei constante datorită spirei în scurtcircuit.

3.2.2. *Componenta variabilă a forței.*

Expresia componentei variabile a forței de atracție, cuprinsă în relația (36), poate fi reprezentată într-o diagramă vectorială [B_6], lucru care permite obținerea cu ușurință a valorii modulului. Folosind aceleași înlocuiri ca și în formula (37), se obține pentru componenta variabilă a forței de atracție, următoarea relație:

$$F_v = \frac{\Phi_I^2}{2\mu_0 S_I}\left(\frac{\sqrt{\left\{\frac{2}{\alpha}[(kn+1)^2+\operatorname{tg}^2\psi)] + (k+1)(kn^2+1+\right.}}{\sqrt{\left.+\operatorname{tg}^2\psi)\right\}^2 - 4kn^2\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)(k+1)^2\operatorname{tg}^2\psi}}{(kn+1)^2+\operatorname{tg}^2\psi}\right) = F_0\Delta_{vE} \tag{41}$$

De asemeni termenul F_0, reprezintă valoarea medie a forței de atracție, corespunzătoare polilor marginali, în cazul în care nu ar exista spiră în scurtcircuit.

3.2.3. *Forța minimă de atracție.*

Valoarea forței minime de atracție va fi dată, ținînd seamă de relația (40) și (41), de următoarea expresie:

$$F_{min} = F_c - F_v = F_0 \left[\frac{2}{\alpha} + (k+1)(kn^2 + 1 + tg^2\psi)\right] \times$$

$$\times \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4kn^2\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)(k+1)^2 tg^2\psi}{\left\{\frac{2}{\alpha}[(kn+1)^2 + tg^2\psi] + (k+1)(kn^2+1\,tg^2\psi)\right\}}}\right] =$$

$$= F_0 \Delta_{mE} \qquad (42)$$

În mod asemănător, ca și la relația (29), se poate scoate din formula (41), expresia pulsației forței de atracție:

$$p = \sqrt{1 - \frac{4kn^2\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)(k+1)^2 tg^2\psi}{\left\{\frac{2}{\alpha}[(kn+1)^2 + tg^2\psi] + (k+)(kn^2+1+tg^2\psi)\right\}^2}} \qquad (43)$$

Se observă că în relațiile (39), (40), (41), (42), deduse pentru electromagnetul de tip *E*, dînd parametrului α valoarea ∞ se ajunge la relațiile (21), (25), (27) și (30), valabile la electromagnetul de tip *U*. În acest caz, forța dezvoltată de polul din mijloc, la electromagnetul de tip *E*, devenind egală cu zero, electromagnetul se transformă în tipul *U*.

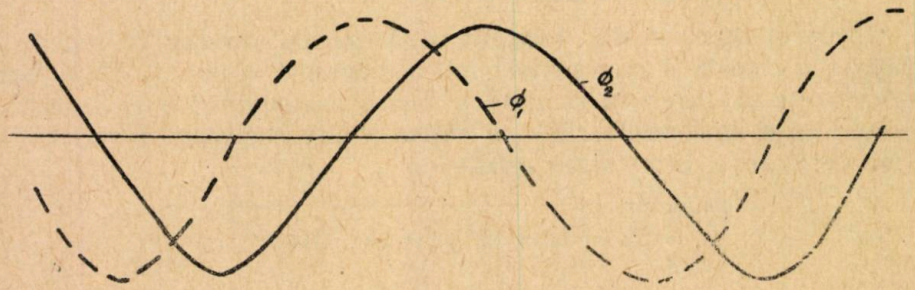


Fig. 12. Oscilograma fluxurilor Φ_1 și Φ_2

Pentru a urmări mai ușor diversele mărimi care influențează valoarea forței minime, se poate reprezenta într-o diagramă, variația acestor mărimi în timp. La realizarea unei astfel de reprezentări într-un caz real, s-au făcut măsurători asupra unui electromagnet avînd k=2,74 și α=1,24. Defazajul ψ a fost determinat pe baza unei oscilograme

(fig. 12) scoasă cu osciloscopul catodic. Parametrul n a fost stabilit cu ajutorul aceleiași diagrame, prin intermediul relației (1).

În fig. 12 este reprezentată oscilograma din care s-au scos valorile: $\psi=80°10'$ și $n=2{,}46$, Φ_1 fiind curba fluxului neecranat, iar Φ_2 a fluxului ecranat. Cu valorile fluxurilor Φ_1 și Φ_2, au fost determinate fluxurile Φ_I și Φ_{II}.

În fig. 13 s-au reprezentat, în afară de variațiile fluxurilor, și variațiile forțelor de atracție în timp. Curbele forțelor de atracție s-au notat

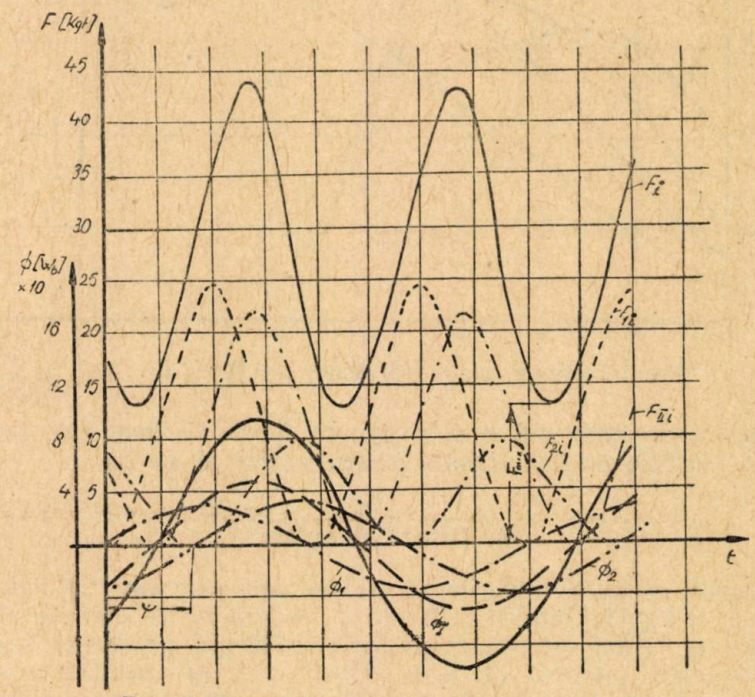


Fig. 13. Reprezentarea variației în timp a forțelor și fluxurilor la electromagnetul de tip E.

astfel: F_{1i} — forța de atracție instantanee dezvoltată pe porțiunea neecranată a polilor marginali; F_{2i} — forța de atracție instantanee dezvoltată pe porțiunea ecranată a aceloraș poli; F_{IIi} — forța de atracție instantanee dezvoltată de polul din mijloc. Curba F reprezintă variația forței rezultante, exprimată și de relația (36) adică $F_{1i}+F_{2i}+F_{IIi}$.

Spre deosebire de electromagnetul tip U, la care în anumite momente F_i poate fi egal cu una din forțele F_{1i} sau F_{2i} (fig. 9), la electromagnetul de tip E, forța rezultantă este permanent mai mare decît fiecare din forțele componente. Forța minimă F_{min}, care interesează în mod deosebit, poate fi la electromagnetul de tip E, mai mare decît F_{2i} în timp ce la tipul U este întotdeauna mai mică decît fiecare din componentele sale

Determinările experimentale au arătat [B_8] că forța de desprindere este cu 5—10% mai mare decît forța minimă, aceasta din cauza inerției armăturii.

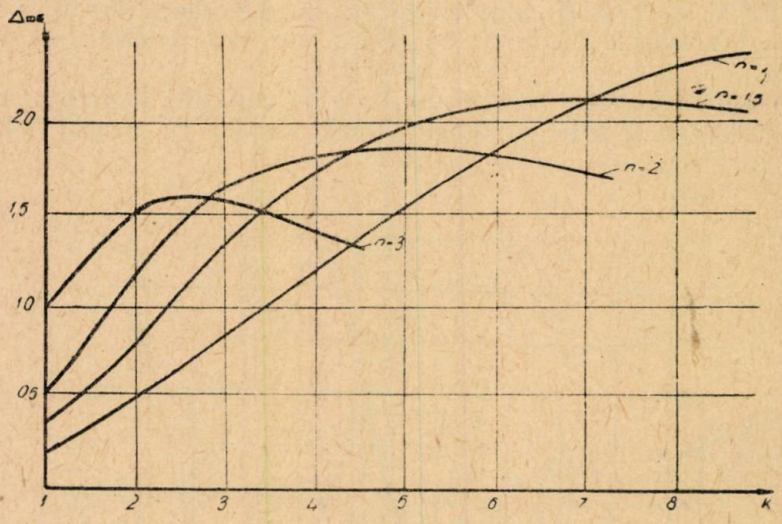


Fig. 14. Curbele $\Delta_{mg} = f(k)$ pentru $\psi = 80°$ și $\alpha = 1{,}2$.

Influența parametrului k și n asupra forței minime, este redată în figura 14. Curbele au fost trasate pentru $\psi = 80°$ și $\alpha = 1{,}2$.

4. Defazajul optim

Defazajul ψ între fluxurile Φ_1 și Φ_2 sau respectiv 2ψ între F_{2i} și F_{1i} (fig. 5 și fig. 7) influențează direct asupra forței minime. Alegerea defazajului ψ la un electromagnet, trebuie făcută ținîndu-se seamă de ceilalți parametri adoptați (k, n, α). Dacă se ia în considerație expresia pulsației forței de atracție (16) și (42), se poate ajunge ușor la o formulă simplă care dă valoarea optimă [B_8] a defazajului ψ_0, corespunzător unui raport minim între componenta variabilă a forței de atracție F_v și componenta constantă a forței de atracție F_c.

Astfel, se găsește pentru electromagnetul de tip U expresia defazajului optim:

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \sqrt{kn^2 + 1} \tag{44}$$

În mod asemănător, pentru electromagnetul de tip E, defazajul optim este:

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \sqrt{\frac{\frac{2}{\alpha}(kn+1)^2 + (k+1)kn^2 + 1)}{\frac{2}{\alpha} + k + 1}} \tag{45}$$

Se observă și în acest caz că relația (45) se reduce la relația (44) făcînd $\alpha = \infty$.

În fig. 15 se poate urmări variația defazajului optim, ψ_0 funcție de parametrul k, pentru diferite valori ale lui n, atît la electromagnetul de tip U, cît și la cel de tip E, la care s-a luat $\alpha = 1{,}2$.

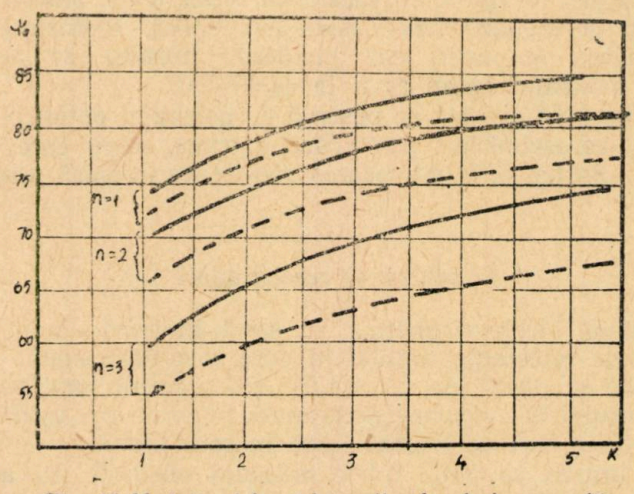


Fig. 15 Variația defazajului optim la electromagneții de tip U și tip E (α=1,2).
— Electromagnet de tip E.
-- Electromagnet de tip U.

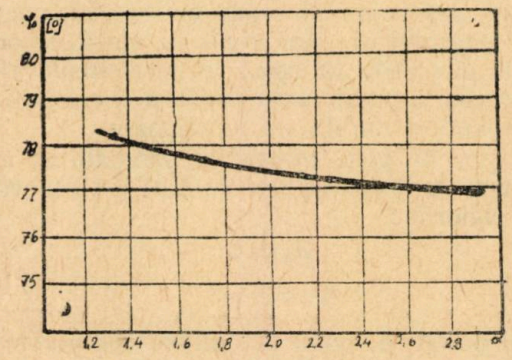


Fig. 16. Variația defazajului optim în funcție de parametrul α.

La aceleași valori ale parametrilor k și n, pentru electromagnetul de tip U, defazajul optim este mai mic decît la tipul E.

Variația defazajului optim cu parametrul α este foarte redusă. O variație a lui α între limitele posibile din punct de vedere constructiv $(1{,}2 \div 2)$ duce la o variație a defazajului optim de 1° (fig. 16).

În fig. 16 s-a luat pentru k valoarea 3, iar pentru n valoarea 2.

Folosind valoarea optimă a defazajului, la calculul forței minime, se poate constata ușor pe diagramele din fig. 10 și fig. 14, că se ajunge în zona valorilor maxime. Acest lucru prezintă o importanță deosebită în calculul electromagneților monofazați. Un alt avantaj al folosirii defazajului optim constă în pierderile reduse în spira în scurtcircuit. Astfel, la un electromagnet de tip U, cu parametrii $k=3$, $n=2$, pierderile în spira în scurtcircuit, corespunzătoare defazajului optim, reprezintă 41% din pierderile maxime. În acest caz pierderile maxime ar avea loc la $\psi=81°50'$, iar defazajul optim ar fi la $\psi_0=74°30'$.

Din relațiile (16) și (44) se observă că defazajul optim este mai mic decît defazajul corespunzător pierderilor maxime, lucru care duce, după cum se vede și din fig. 5, la micșorarea pierderilor în spiră prin adoptarea acestuia.

Concluzii și recomandări

1. La calculul electromagneților cu spiră în scurt circuit trebuie să se țină seamă de reluctanța fierului în porțiunea neecranată. Inducția în această porțiune se poate lua 1,7 ÷ 1,9T. De asemeni lungimea zonei de saturație a miezului în porțiunea neecranată se poate lua egală cu adîncimea canalului prin care se fixează spira în scurtcircuit.

2. Se va urmări ca toate tolele miezului magnetic să aibă aceiași direcție de tăiere în raport cu direcția de laminare în polul la care se află spira în scurtcircuit. Se poate arăta că pentru același electromagnet cu aceiași spiră în scurtcircuit și aceiași bobină de excitație, dacă se confecționează polul ecranat din tole tăiate transversal cu direcția de laminare (figura 3), forța minimă poate să scadă cu 40—50% față de cazul cînd tolele ar fi tăiate longitudinal. Mai mult, în afară de scăderea forței se măresc foarte mult pierderile în spira în scurtcircuit ajungînd de două sau de trei ori mai mari. Acest lucru produce o creștere excesivă a temperaturii spirei limitîndu-i durata de funcționare.

3. Pentru a avea în polii magnetici ecranați ai electromagnetului inducție optimă, adică în jurul valorei de 1,3T [4] se vor adopta pentru parametrii n_0 și k valorile:

$$n_0 \simeq 2$$

$$k \simeq 2 \div 3$$

La electromagnetul de tip E, polul din mijloc are valoarea inducției mai ridicată decît a polilor marginali. Dacă se admite pentru acest pol inducția de 1,5T, atunci pentru parametrul α se poate lua valoarea $\alpha=1,5 \div 2$.

4. Relațiile propuse permit calcularea și recalcularea unor serii întregi de electromagneți. O dată adoptați parametrii principali se calculează valorile optime pentru termenul Δ_{mv} sau Δ_{mE} în funcție de tipul electromagnetului și se verifică apoi experimental rezultatul pe unul din electromagneții proiectați. Concluziile obținute astfel sînt valabile pentru orice fel de electromagneți de același tip indiferent de mărime cu condiția ca inducțiile în piezul de fier să aibă aceleași valori, parametrii

adoptați fiind mărimi relative. Acest lucru prezintă un avantaj deosebit deoarece se poate trece ușor de la un electromagnet de o anumită mărime la altul de altă mărime folosind aceiași parametri și aceleași rezultate experimentale. În acest mod timpul de proiectare a unui electromagnet monofazat se scurtează extrem de mult obținîndu-se rezultate foarte bune.

Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Builov I. A.:* Principiile de construcție ale aparatelor electrice, E.E.S., București, 1954.

[2] *Miheev D. F.* și *Moghilnicov:* Calculul electromagnetului cu spiră în scurtcircuit la flux constant. Electricestvo 72 (1952) 9 p. 3—6.

[3] *Liubcic M. A.:* Calculul și proiectarea electromagneților de c.c. și c.a. *GOSENERGOISDAT,* 1959.

[4] *Neidenow E.:* Optimalle Eiseninduction bei Wechselstromnebenschlussmagneten, Elektrie 17 (1960), 7, p. 266.

[5] *Rothers C. H.:* Electromagnetic devices. Viley S. New-York 1948.

[6] *Steinberg C.:* Calculul spirei în scurtcircuit pentru eliminarea vibrației electromagneților monofazați cu armătură în E. „Probleme și realizări electrotehnice" Întrep. Poligraf. Craiova, 1956.

[7] *Steinberg C., Ionescu C., Panaite V.:* Studiul experimental al repartiției și defazajului fluxurilor în circuite magnetice ramificate. „Probleme și realizări electrotehnice" Ed. Inst. Tehnic Craiova, 1957.

[8] *Steinberg C., Panaite V.:* Pulsația forței de atracție la electromagneții monofazați. „Electrotehnica 7 (1959) 12, p. 435.

МИНИМАЛЬНАЯ СИЛА ПРИТИЯЖЕНИЯ У ОДНОФАЗНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОВ

(Краткое содержаиие)

На основе теоретического анализа работа приводит ряд расчётных соотношений определения минимальнои силы притяжения у однофазных электромагнитов.

Уследуется вчияние направление нарезки листов о также и влияние магнитого сопротивления в неэкранированння облости по минимальную силу притяжения получая ряд полезных выводов.

Поллученые росчётные формулы с большой слёлкостю могумт быть применены при проэктировании электромагнитов.

THE MINIMAL ATTRACTIVE FORCE OF MONOPHASIC ELECTROMAGNETS

(Summary)

On the basis of teoretical analyisis, this work presents formulae, for the determination of the minimal attractive force of the monophasic electromagnets.

The influence of the direction of cut of the sheet and the influence of iron resistence in the unscreened portion on the minimal force is analysed, to come at useful conclusions.

The formulae are easy to use in the dessing of the electromagnets.

LA FORCE MINIMA D'ATTRACTIEN DES ELECTRO-AIMANTS MONOPHASÉS

(Résumé)

A base d'une analyse théorique, l'ouvrage présente une série de relations de calcul pour la détermination de la force minima d'attraction des électro-aimants monophasé.

On analyse l'influence de la direction de decoupage des tôles et l'influence de la reluctance du fer dans la zone non-ecrané sur la force minima en arrivant à des conclusions utile.

Les formules de calcul peuvent étre faciliment utilisées pour le calcul des électro-simants.

MINIMALE ANZIEHUNGSKRAFT BEI EINPHASIGEN ELEKTROMAGNETEN

(Zusammenfassung)

Auf Grund einer theoretische Analyse hat man eine Reihe Rechnungsformeln für Entwurf von einphasigen Electromagnetenzverhalten.

Es werden Einfluss der Schneiddirektion des Bleches und der Reluctanz im ungeschirmten Gebiet analysiert und man gelangt zu nuzlichen Schlassfolgungen.

Die Gleichungen koneen leicht für die Berechnung von Elektromagneten angewendet werden.

Intreprinderea Poligrafică nr. 6, str. Al. Odobescu nr. 12 — c. 5539

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele şi iniţialele de pronume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

≠ 1130

REFERAT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 3

IULIE — SEPTEMBRIE

1962

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

F1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 3

IULIE — SEPTEMBRIE

1962

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883 ORSZÁGOS

SUMAR

MATEMATICĂ

P. MURAVIOV — Решение линейных дифференциальных уравнений посредством интегральных рядов общего вида 13

R. TUDORAN — Unele formule fundamentale ale calculului operațional pentru funcțiile de două variabile stabilite prin metoda algebrică 35

MECANICĂ

A. STAN — Determinarea aproximativă a frecvențelor vibrațiilor transversale ale barelor de secțiune variabilă cu ajutorul metodei diferențelor finite 43

A. STAN, R. VOINEA — Contribuții la problema reducerii zgomotului și vibrațiilor în filaturi 59

M. ATANASIU — Studiul mobilității și al gradului de nedeterminare statică al unui solid rigid supus la legături cu ajutorul teoriei mulțimilor de șuruburi geometrice . . . 69

REZISTENȚA MATERIALELOR

M. BLUMENFELD — Circular symmetricaly loaded plates of constant and variabile thickness, calculated by the three unknowns method 95

TERMOTEHNICA

B. GRÜNWALD, V. RADCENCO — Метод расчета параметров процесса сгорания в двигателях с искровым зажиганием 119

ELECTRONICA

AL. SPĂTARU — Статистическая оценка качества изображения последовательной системы, цветного телевидения с запоминающим устройством 139

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

П. МУРАВЬЁВ — Решение линейных дифференциальных уравнений посредством интегральных рядов общего вида 13

Р. ТУДОРАН — Некоторые фундаментальные формулы операционного алгебраического исчисления для функций двух переменных 35

МЕХАНИКА

А. СТАН — Приближенное определение частот поперечных вибрации стержней переменного сечения при помощи метода конечных разностей 43

А. СТАН, Р. ВОЙНЯ — К вопросу снижения шума и вибрации в хлоакопрядильной фабрике 59

М. АТАНАСЮ — Изучение подвижности и степени статической неопределенности твердого тела, повергаемого связям при помощи теории множест геометрических винтов 69

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

М. БЛУМЕНФЕЛД — Расчет вращающихся симметрично нагруженных дисков методом трех неизвестных . . 95

ТЕРМОТЕХНИКА

Б. ГРЮНВАЛД, В. РАДЧЕНКО — Метод расчета параметров процесса сгорания в двигателях с искровым зажиганием 119

ЭЛЕКТРОНИКА

АЛ. СПЫТАРУ — Статистическая оценка качества изображения последовательной системы цветного телевидения с запоминающим устройством 139

CONTENTS

MATHEMATICS

P. MURAVIOV — The integration of liniar differential equations, in general form by means of P. A. Muraviov integral series 13

R. TUDORAN — A few fondamental formulae of the algebric operational calculation for the fonctions of two variables 35

MECHANICS

A. STAN — The approximative determination of frequencies off transversal vibrations of bars with variable section by the method of finite differences equation 43

A. STAN, R. VOINEA — Contributions to the study of noise level in a cotton factory 59

M. ATANASIU — A study of the mobility and degree of statical indetermination of a rigid solid body subjected to constraints by means of the theory geometrical screws . . . 69

STRENGTH OF MATERIELS

M. BLUMENFELD — Circular symmetrically loaded plates, of constant and variable thickness, calculated by the three unknowns method 95

TERMODYNAMICS

B. GRUNWALD, V. RADCENCO — Method of calculating combustion's parameters of the spark — ignition engine . 119

ELECTRONIQUE

AL. SPATARU — Statistic evaluation of the image quality by the sequential colour television system, with storrage . . 139

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

P. MURAVIOV — L'intégration des équations différentielles sous la forme générale au moyen des séries d'intégrales de P. A. Muraviov 13

R. TUDORAN — Quelques formules fondamentales du calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables . 35

MECANIQUE

A. STAN — Détérmination approximative des frequences des vibrations transversales des barres à section variable par la méthode des équations aux differences finies . . . 43

A. STAN, R. VOINEA — Contributions au problèmes de la reduction de bruit dans une filature à coton 59

M. ATANSIU — Étude de la mobilité et du degré d'indétérmination statique d'un corp solide, rigide soumis à des liaisons, a l'aide de la théories des ensemble de vis géometriques 69

RESISTENCE DES MATERIAUX

M. BLUMENFELD — Le calcul des plaques symétriquement chargées, d'eppaiseur constante ou variable, pàr la méthode des trois inconnues 95

TERMOTECHNIQUE

B. GRÜNWALD, V. RADCENCO — Une méthode de calcule des paramètres du procés de la combustion dans les moteurs à allumage comandée 119

ELECTRONIQUE

AL. SPĂTARU — Evaluation statistique de la qualité d'image du systeme sequentiel de télévision en couleur, à memoire 139

INHALT

MATEMATIK

P. MURAVIOV — Die Integrierung der liniaren Differentialgleichunger in der allgemeinen Form mit hilfe der P. A. Muraviov'schen Integralserien 13

R. TUDORAN — Einige grundliegende Formeln des operationellen algebraischen Rechnens für die Funktionen von zwei Veränderlichen 35

MECHANIK

A. STAN — Die Benützung der Methode mit enlichen Differenzen für die umgefährgenan Bestimmung der transversalen Schwingunggen von Stäbe mit verändlichen Schnitt 43

A. STAN, R. VOINEA — Erforschungen in das Problem der Herabsenkung des Lärms und der Schwingungen in einer Baumwohl - Spinnerei 59

M. ATANASIU — Studium der Beweglichkeit und des statischen Unbestimmtheitsgrades eines festen und starren Korpers mit Hilfe der theorie der geometrischen Schraubenmengen 69

FESTIGKEITSLEHRE

M. BLUMENFELD — Berechnung der Kreisförmigen symmetrisch belasteten Platten von Konstanter und veranderlicher Dicke, mit Hilfe der Methode der drei Unbekannten . . 95

TERMOTECHNIK

B. GRUNDWALD, V. RADCENCO — Eine Berechnungsmethode der Verbrennungs — Parametern beiden Motoren mit Funkenzündung 119

ELEKTRONIK

AL. SPĂTARU — Statistische qualitätsabschätzung des Bildes beim Sequentialen Farbfernsehverfahren, mit aufspeicherung 139

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 3

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОСРЕДСТВОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ РЯДОВ ОБЩЕГО ВИДА

П. А. МУРАВЬЕВ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно интегрирование линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в конечной форме возможно лишь в немногих случаях. В других случаях часто применяется метод степенных рядов, который имеет ряд существенных недостатков. Нами разработан и изложен в этой работе метод, в основе которого лежит метод последовательных приближений. Данное дифференциальное уравнение всегда может быть приведено к специальному уравнению, которое разрешимо в интегральных рядах. Решения в интегральных рядах имеют эффективный характер. Найдено овщее решение неоднородного дифференциального уравнения. В начальной форме этот метод изложен нами в работе [1]. Применение этого метода особенно удобно в тех случаях, где интегрирование может быть выполнено в конечной форме, в частности, этим методом может быть решено уравнение, рассмотренное М. Рошкулец в работе [2]. Нам кажется, что наш метод имеет общие моменты с теми приемами, которые применяет для решения дифференциальных уравнений М. Миу [3].

§ 1. Специальное уравнение и интегральные ряды.

1. В нашей работе будут часто встречаться кратные интегралы. Для сокращения записи там, где это не будет вызывать недоразумений, введем обозначение:

$$\int_{a_1}^{x} q_1\,dx \int_{a_2}^{x} q_2\,dx \cdots \int_{a_k}^{x} q_k\,\varphi(x)\,dx \equiv \int_{a_m\,(1,\,k)}^{x} q_m\,\varphi(x)\,dx. \qquad (1.1)$$

(индекс m пробегает последовательность: 1, 2, 3, ..., K).

Далее нам потребуется понятие „производной с умножением“ данной функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть в сегменте $[c, \partial]$ над функцией $f(x)$ K — раз дифференцируемой в этом сегменте выполнены последовательно операции:

$$\left(\alpha_k \frac{d}{dx}\right)\left(\alpha_{k-1} \frac{d}{dx}\right) \cdots \left(\alpha_1 \frac{d}{dx}\right)[\alpha_0 f(x)],$$

где каждый оператор действует на все предыдущие; $\alpha_i = \alpha_i(x)$ — дифференцируемы достаточное число раз в сегменте $[c, \partial]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, K)$.

Результат этих операций надфункцией $f(x)$ мы будем называть „производной с умножением K-го порядка данной функции $f(x)$ и обозначать в форме:

$$\left(\alpha_k \frac{d}{dx}\right) \cdots \left(\alpha_1\right)[\alpha_0 f(x)] \equiv \widetilde{f}^{(k)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_k)}(x) \equiv \frac{\widetilde{d}^k}{dx^k_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha x)}} f(x). \qquad (1.2)$$

Этот процесс будем называть „умножением с дифференцированием".

2. Строим специальное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными (или постоянными) коэффициентами вида

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots dn)} = h_i y^{(n-i)} + h_{i+1} y^{(n-i-1)} + \cdots + h_{n-1} y' + h_n y \quad (n = 2, 3, 4, \ldots), \qquad (1.3)$$

где α_j — известные, достаточное число раз дифференцируемые функции в $[c, \partial]$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$; h_r — известные непрерывные в $[c, \partial]$ функции $(r = i, i+1, \ldots, n)$; функции α_j, h_r будут определены позднее (пока считаются); i — фиксированное число последовательности $1, 2, 3, \ldots n$.

Решение уравнения [1.3] построим в виде особого интегрального ряда вида:

$$u_k = v_{0k} + v_{1k} + \cdots + v_{sk} + \cdots, (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \qquad (1.4)$$

где

$$v_{0k} \equiv \frac{1}{\alpha_0} \int_{a_m (1,k)}^{x} \frac{dx}{\alpha_m} (\alpha_0 \neq 0, \alpha_m \neq 0); \qquad (1.5)$$

$$v_{sk} \equiv \frac{1}{\alpha_0} \int_{b_m (1,n)}^{x} \frac{1}{\alpha_m} (h_i v^{(n-i)}_{s-1,k} + h_{i+1} v^{(n-i-1)}_{s-1,k} + \cdots + h_{n-1} v'_{s-1,k} + h_n v_{s-1,k})\, dx; \qquad (1.6)$$

$\int_{a_m (k+1,k)}^{x} (\ldots) \equiv 1$; x — действительная переменная, $x \in [c, \partial]$;

a_m, $b_m \in [c, \partial]$ — постоянные.

Функции v_{0k} мы будем называть начальными функциями ряда (1.4); интегральное преобразование (1.6), содержащее n — кратный повторный интеграл, мы будем называть интегратором ряда (1.4).

Рассмотрим свойства ряда (1.4) и докажем, что его сумма u_k будет решением уравнения (1.3).

Теорема 1. Для любого $k=0, 1, 2, .., n-1$ члены ряда (1.4) обладают свойством:

$$\left.\begin{gathered}\widetilde{v}^{(n)}_{0k\,(\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}=0,\\ \widetilde{v}^{(n)}_{sk\,(\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}=h_i\,v^{(n-i)}_{s-i,k}+h_{i+1}\,v^{(n-i-1)}_{s-1,k}+\cdots+h_n\,v_{s-1,\,k}\\ (s=1, 2, 3, \ldots.)\end{gathered}\right\} \qquad (1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая с дифференцированием функции v_{0k} из (1.5), очевидно, после n шагов получим нуль так как $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Умножан с дифференцированием функции v_{sk} из (1.6), легко видеть, что получим правую часть второго равенства из (1.7).

Замечание. Теорема (1) будет справедлива и тогда, когда в равенствах (1.5) и (1.6) интегралы будут неопределенными.

Теорема 2. Пусть все функции α_j, α_j^{-1} $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$ из (1,5), (1.6) непрерывно дифференцируемы в $[c, \partial]$ достаточное число раз, причем $\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_{n-i-1}\equiv 1$; функции h_r $(r=i, i+1, \ldots, n)$ из (1.6) непрерывны в $[c, \partial]$; постоянные a_m, b_m из (1.5), (1.6) принадлежат сегменту $[c, \partial]$, причем $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$; $b_1<\partial$.

Тогда ряд (1.4) для людого $k=0, 1, 2\ldots n-1$ сходится абсолютно и равномерно по крайней мере в сегменте $[b, \partial]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы в сегменте $[c, \partial$ существуют:

$$\max\left|\frac{1}{\alpha_j}\right|\equiv\varrho\,(j=0, 1, 2, \ldots, n),\ \max|h_r|\equiv\delta\ \ (r=i, i+1, \ldots, n);$$

$$\max|v^{(\lambda)}_{0k}|\equiv\omega\ \ (\lambda=0. 1, 2, \ldots, n-i).$$

Полагая, что $x\in[b_1, \partial]$ и учитывая (1.6), получим:

$$|v_{sk}|<\omega\,\varrho^{s(i+1)}\,\delta^s\,\sigma^s_{n,i}\,\frac{(x-b_n)^{n+(s-1)i}}{[n+(s-1)i]!},\ \ (s=1, 2, 3, \ldots)$$

где i, n — фиксированы $(n=2, 3, \ldots;\ i=1, 2, 3, \ldots, n)$;

$$\sigma_{n,i}=1+\frac{h}{i+1}+\frac{h^2}{(i+1)^2}+\cdots+\frac{h^{n-i}}{(i+1)^{n-i}},\ h=\partial-b_n,$$

∂ — правая грань сегмента $[c, \partial]$.

Так как $x-b_n\leqslant h$, то будем иметь:

$$|(v_{sk}|<\omega\,\varrho^{s(i+1)}\,\delta^s\,\sigma^s_{n,i}\,\frac{h^{n+(s-1)i}}{[n+(s-1)i]!}\equiv w_s. \qquad (1,8)$$

Числовой знакоположительный ряд с общим членом w_s мажорирует ряд (1.4) и по признаку Даламбера сходится, а поэтому сходится абсолютно и равномерно ряд (1.4) по крайней мере в $[b_1, \partial]$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Ряд (1.4) является частным решением уравнения (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подвергаем u_k из (1.4) операции и применяем теорему (1):

$$\frac{\tilde{d}^n}{dx^n_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha n)}}$$

$$\tilde{u}^{(n)}_{k\,(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n)} = \tilde{v}^{(n)}_{0k\,(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha n)} + \frac{\tilde{d}^{(n)}}{dx^n_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha n)}} \{v_{1k} + v_{2k} + \cdots\} =$$

$$= (h_i v^{(n-i)}_{0k} + h_{i+1} v^{(n-i-1)}_{0k} + \cdots + h_n v_{0k}) + (h_i v^{(n-i)}_{1k} +$$

$$+ h_{i+1} v^{(n-i-1)}_{1k} + \cdots + h_n v_{1k}) + \cdots = h_i u^{(n-i)}_k + h_{i+1} u^{(n-i-1)}_k + \cdots + h_n u_k,$$

т. е.

$$\tilde{u}^{(n)}_{k\,(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha n)} = h_i u^{(n-i)}_k + h_{i+1} u^{(n-i-1)}_k + \ldots + h_n u_k \qquad (k = 0,\ 1, 2, \ldots, n-1)$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема (3) справедлива для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому уравнение (1.3) имеет следующую последовательность частных решенйй:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \tag{1.9}$$

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений решением уравнения (1.3) будет функции

$$y = c_0 u_0 + c_1 u_1 + \cdots + c_{n-1} u_{n-1}, \tag{1.10}$$

где c_j — произвольные постоянные $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Теорема 4. Последовательность (1.9) является фундаментальной системой решений уравнения (1.3), если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n \equiv b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что последовательность функций из (1.9) линейно зависима, т. е. равенство

$$u \equiv c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + C_{n-1} u_{n-1} \equiv 0 \tag{1.11}$$

выполняется тождественно тогда, когда не все $c_j = 0$. $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$

Тождество (1.11) подвергаем операции:

$$\frac{\tilde{d}^{n-1}}{dx^{n-1}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1})}}$$

Выполняя ее последовательно, будем получать:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \alpha_0 u = 0, \\ 2)\ \widetilde{u}'_{(\alpha_0 \alpha_0)} = 0, \\ 3)\ \widetilde{u}''_{(\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2)} = 0, \\ \quad\cdots\quad\cdots \\ n-1)\ \widetilde{u}^{(n-2)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-2})} = 0, \\ n)\ \widetilde{u}^{(n-1)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-2})} = 0. \end{array}\right| \qquad (1.12)$$

Из тождества n) при $x = b$ необходимо получим $c_{n-1} = 0$; из тождества $n-1$) при $x = b$ необходимо получим $c_{n-2} = 0$; и т. д. из тождества 1) при $x = b$ получим $c_0 = 0$. Таким образом, $c_j = 0$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Но это противоречит нашему предположению о линейной зависимости функций последовательности (1.9).

Теорема доказана.

Замечание. Если не выполняется условие $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$, но имеет место соотношение

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n,$$

то вопрос с том, будет ли часлидовательность (1.9) фундаментальной системой решений уравнения (1.3) в каждом конкретном случае требуется рассмотреть отдельно.

3. В этом разделе нашей работы построим ряд w_n, который является частным решением специального неоднородного уравнения вида

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n)} = h_i\, y^{(n-i)} + h_{i+1}\, y^{(n-i-1)} + \cdots + h_n\, y + z_n(x), \qquad (1.13)$$

где $z_n(x$ — непрерывная функция в сегменте $[c, \partial]$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Строим функцию

$$w_{on} \equiv \frac{1}{\alpha_0} \int_{r_m (1, n)}^{x} \frac{z_n(x)}{\alpha_m}\, dx,\ r_m \in [c. \partial] \text{ — постоянные.} \qquad (1.14)$$

Теперь строим ряд

$$w_n = w_{on} + w_{1n} + w_{2n} + \cdots + w_{sn} + \cdots, \qquad (1.15)$$

порожденный интегратором

$$w_{sn} \equiv \frac{1}{\alpha_0} \int_{b_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_1} \int_{b_2}^{x} \frac{dx}{\alpha_2} \cdots \int_{b_n}^{x} \frac{1}{\alpha_n} (h_i\, w^{(n-i)}_{s-1,\,n} + h_{i+1}\, w^{(n-i-1)}_{s-1,\,n} + \cdots + h_n\, w_{s-1,\,n})\, dx \qquad (1.16)$$

Легко видеть что выполняется теорема (1), т. е. имеем:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{w}^{(n)}_{0n\,(\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha n)} &= z_n(x), \\ \widetilde{w}^{(n)}_{sn\,(\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n)} &= h_i\, w^{(n-i)}_{s-1,\,n} + \cdots + h_n\, w_{s-1,\,n} \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Заметим, что теорема (2) об абсолютной и равномерной сходимости ряда полностью применима к ряду (1.15).

Теорема 5. Ряд (1.15) является частным решением неоднородного уравнения (1.13) для $x \in [b_1, \partial]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\widetilde{w}^{(n)}_{n\,(\alpha_0\,\alpha_1\,..,\,\alpha n)} = \widetilde{w}^{(n)}_{on\,(\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n)} + \frac{\widetilde{d}^n}{dx^n_{(\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n)}}\,(w_{1n} + w_{2n} + \cdots) =$$

$$= z_n(x) + h_i\, w^{(n-i)}_n + h_{i+1}\, w^{(n-i-1)}_n + \cdots + h_n\, w_n;$$

$$\widetilde{w}^{(n)}_{n\,(\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha n)} = z_n(x) + h_i\, w^{(n-i)}_n + \cdots + h_n\, w_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $u = c_0\, u_0 + c_1\, u_1 + \ldots + c_{n-1}\, u_{n-1}$ есть общее решение уравнения

$$\widetilde{u}^{(n)}_{(\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n)} = h_i\, u^{(n-i)} + h_{i+1}\, u^{(n-i-1)} + \cdots + h_n\, u$$

а w_n есть частное решение уравнения (1.13).

Тогда общее решение уравнения (1.13) есть функция

$$y = u + w_n \tag{1.18}$$

Доказательство непосредство следует из общей теории линейных уравнений о структуре решения линейного неоднородного уравнения.

2 §. Приводимость липейного дифференциального уравнения обычного вида к уравнению специального вида.

В первой части нашей работы мы построили общее решение специального уравнения (1.13) в форме интегральных рядов. Но, вообще говоря, может оказатся, что обычное дифференциальное линейное уравнение нельзя привести к уравнению специального вида. Поэтому вопрос о приведимости является одним из главных вопросов в нашей работе. Мы покажем, что обычное уравнение всегда приводимо эффективным путем к специальному уравнению.

Напишем дифференциальный оператор в развернутой форме:

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n)} \equiv b_0\, y^{(n)} + b_1\, y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\, y' + b_n\, y, \tag{2.1}$$

b_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ есть некоторые функции от α_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и их производных.

Легко видеть, что $b_0 = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \neq 0$.

Разделив обе части (2.1) на b_0 получим:

$$\frac{1}{b_0} \widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n)} = y^{(n)} + a_1 y^{(n-i)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y, \qquad (2.2)$$

где

$$a_j \equiv \frac{b_j}{b_0} \quad (j = 1.2, \dots, n)$$

Теперь обращаемся к уравнению (1.13):

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n)} = h_i y^{(n-1)} + h_{i+1} y^{(n-i-1)} + \dots + h_n y + z_n(x). \qquad (1.13)$$

Учитывая (2.2), мы его запишем в виде:

$$y^{(n)} + \dots + \left(a_i - \frac{h_i}{b_0}\right) y^{(n-i)} + \left(a_{i+1} - \frac{h_i + 1}{b_0}\right) y^{(n-i-1)} + \dots + \left(a_n - \frac{h_n}{b_0}\right) y = \frac{z_n(x)}{b_0} \qquad (2.3)$$

Обычное линейное дифференциальное уравнение с переменными или постоянными коэффициентами будем рассматривать в виде:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-i} y' + p_n y = \varphi(x), \qquad (2.4)$$

p_j, $\varphi(x)$ — непрерывные в сегменте $[c, \partial]$, $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Сравнивая (2.3) и (2.4), приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_1 - \frac{h_1}{b_0} &= p_i, \\ &\cdots \\ a_i - \frac{h_i}{b_0} &= p_i, \\ &\cdots \\ a_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{b_0} &= p_{n-1}, \\ a_n - \frac{h_n}{b_0} &= p_n, \\ \frac{z_n}{b_0} &= \varphi(x), \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

где i есть одно из чисел: $1, 2, 3, \dots, n$.

Определение. Мы скажем, что уравнение (2.4) приводимо к специальному уравнению (2.3), если сможет быть найдено какое-нибудь частное решение системы уравнений (2.5) относительно неизвестных функций

$$\alpha_j \cdot h_m \ (j = 0, 1, 2, \ldots, n; \ m = i, i+1, \ldots; n)$$

Далее рассмотрим некоторые теоремы о приводимости уравнения (2.4) к уравнению (2.3).

Теорема 7. При $i = 1$ уравнение (2.4) всегда приводимо к уравнению (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теоремы (2) о сходимости рядов, при $i = 1$ имеем:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-2} \equiv 1,$$

откуда следует, что

$$b_0 = \alpha_{n-1}\,\alpha_n .$$

Учитывая эти результаты, развернем оператор $\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha\,\alpha_1 \ldots\, \alpha_n)}$:

$$\widetilde{y}^{(n-2)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots\, \alpha_{n-2})} = y^{(n-2)},$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots\, \alpha_{n-1})} = \alpha_{n-1}\, y^{(n-1)},$$

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots\, \alpha_n)} = \alpha_n \left(\alpha_{n-1}\, y^{(n)} + \alpha'_{n-1}\, y^{(n-1)}\right),$$

откуда

$$\frac{1}{b_0}\, \widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots\, \alpha_n)} = y^{(n)} + \frac{\alpha'_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\, y^{(n-1)}$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{\alpha'_{n-1}}{\alpha_{n-1}}, \quad a_2 = a_3 = \ldots = \alpha_n \equiv 0.$$

Теперь система уравнений (2.5) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha'_{n-1}}{\alpha_{n-1}} - \frac{h_1}{\alpha_{n-1}\,\alpha_n} = p_1, \\
&-\frac{h_2}{\alpha_{n-1}\,\alpha_n} = p_2, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&-\frac{h_n}{\alpha_{n-1}\,\alpha_n} = p_n. \\
&\frac{z_x}{\alpha_{n-1}\,\alpha_n} = \varphi(x).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Положим $h_1 = 0$. Тогда $\alpha_{n-1} = e^{\int p_1 dx}$,

$$h_j = -p_j \alpha_{n-1} \alpha_n, \ (j = 2, 3, \ldots, n), \ z_n = \alpha_{n-1} \alpha_n \varphi(x),$$

$\alpha_n \neq 0$ произвольная функция, в частности можно положить $\alpha_n = 1$.

Таким образом, получили следующее частное решение системы (2.5):

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-2} = 1, \ \alpha_{n-1} = e^{\int p_1 dx}, \\ \alpha_n \text{ — произвольная функция,} \\ h_j = -p_j \alpha_{n-1} \alpha_n, \ (j = 2, 3, \ldots, n), \ h_1 = 0; \\ z_n = \alpha_{n-1} \alpha_n \varphi(x). \end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

Теорема доказана.

По поводу этой теоремы сделаем некоторые замечания.

Замечание 1. Система (2.5) может иметь и другие частные решения, отличные от решения (2.7). Эти решения будут существенным образом зависеть от индивидуальных особенностей уравнения (2.4).

Замечание 2. Весьма существенно заметить, что теорема (7), устанавливающая приводимость данного уравнения к специальному уравнению, не требует никаких сведений о фундаментальной системе решений данного уравнения (2.4). Следовательно, мы всегда можем в форме интегральных рядов найти общее решение данного уравнения вида (2.4). При решении задачи Коши с начальными данными особенно просто и удобно находятся значения произвольных постоянных c_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ (что будет показано далее в конкретных случаях).

Возможны и другие пути решения задачи о приводимости данного уравнения к специальному уравнению.

В частности, один из таких путей дает следующая.

Теорема 8. Если последовательность функций

$$z_1, z_2, \ldots, z_i; \ (i < n)$$

в системе уравнений

$$z_1 = \frac{1}{\beta_1}, \ Z_2 = \frac{1}{\beta_1} \int \frac{dx}{\beta_2}, \ldots, \ z_i = \frac{1}{\beta_1} \int \frac{dx}{\beta_2} \int \cdots \int \frac{dx}{\beta_i} \qquad (2.8)$$

с неизвестными β_j $(j = 1, 2, \ldots, i)$ будет известной фундаментальной системой решений уравнения

$$z^{(i)} + p_1 z^{(i-1)} + p_2 z^{(i-2)} + \ldots + p_{i-1} z' + p_i z = 0, \qquad (2.9)$$

где коэффициенты p_m $(m=1, 2, 3, \ldots, i)$ уравнений (2.9) и (2.4) одинаковы, то данное уравнение (2.4) приводимо к специальному уравнению (2.3). $(i=1, 2, 3, \ldots, n-1;\ i$ — фиксировано).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного уравнения (2.4) построим специальное уравнение (2.3) следующим путем:

Из данной системы уравнений (2.8) путем дифференцирования легко находим неизвестные функции $\beta_j\,(j=1, 2, \ldots, i)$. Поэтому далее их будем считать известными.

Как известно (см., например, [4]), система (2.8) дает возможность уравнение (2.9) представить и виде:

$$\widetilde{z}^{(i)}_{(\beta_1 \cdot \beta_2 \ldots \beta_i 1)} \equiv z^{(i)} p_1 z^{(i-1)} + \cdots + p_i z = 0. \tag{2,10}$$

Положив в (2.10)

$$z \equiv t^{(n-i)}, \tag{2.11}$$

мы получим следующее уравнение:

$$\widetilde{t}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-i-1} \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n)} \equiv t^{(n)} + p_1 t^{(n-1)} + \ldots + p_i t^{(n)} = 0, \tag{2.12}$$

где

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-i-1} \equiv 1,\ \alpha_{n-i+j} = \beta_{j+1}\ (j=0, 1, \ldots, i-1) \tag{2.13}$$

$\alpha_n \neq 0$ — производная функция.

Пусть теперь в уравнениях (1.13) и (2.3) функции

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

определяются системой равенств (2.13).

Тогда

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n)} \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_i y^{(n-i)}, \tag{2.14}$$

откуда сразу следует, что

$$b_0 = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n = 1$$

$$u \quad \alpha_n = \frac{1}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}. \tag{2.15}$$

Заметим, что в (2.14) будут равны нулю все коэффициенты при производных более низкого порядка, чем $y^{(n-i)}$.

Теперь уравнение (2.3) примет вид:

$$y^{(n)} + (p_1 - h_1) y^{(n-1)} + \ldots + (p_i - h_i) y^{(n-i)} + (-h_{i+1}) y^{(n-i-1)} + \\ + \ldots + (-h_n) y = z_n(x) \tag{2.16}$$

Сравнивая данное уравнение (2.4) и специальное уравнение (2.16), приходим к системе уравнений:

$$\left.\begin{array}{rl} p_1 - h_1 = & p_1, \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ p_i - h_i = & p_i, \\ -h_{i+1} = & p_{i+1}, \\ -h_{i+2} = & p_{i+2}, \\ \vdots & \vdots \\ -h_n = & p_n, \\ z_n = & \varphi(x) \end{array}\right\} \tag{2.17}$$

откуда сразу следует, что $h_1 = h_2 = \ldots = h_i = 0$.

Таким образом, получаем следующее решение системы (2.17)

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = h_2 = \ldots = h_i = 0,\ h_k = -p_k\ (k = i+1, i+2, \ldots, n); \\ Z_n = \varphi(x);\ \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-i-1} \equiv 1;\ \beta_{j+1} = \alpha_{n-i+j} \\ (j = 0, 1, 2, \ldots, i-1); \qquad \alpha_n = \dfrac{1}{\alpha_1 \alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}}, \end{array}\right\} \tag{2.18}$$

что и доказывает нашу теорему.

Теорема (8) приводит нас к следующему практическому правилу перехода от данного уравнения вида (2.4) к специальному уравнению вида (2.3):

Правило. 1. Для данного уравнения (2.4) составляет „усеченное уравнение".

$$t^{(n)} + p_1 t^{(n-1)} p_2 t^{(n-2)} + \ldots + p_i t^{(n-i)} = 0 \tag{2.19}$$

и „вспомогательное уравнение"

$$z^{(i)} + p_1 z^{(i-1)} + p_2 z^{(i-1)} + \ldots + p_i z = 0 \tag{2.20}$$

с таким расчетом, чтобы фундаментальная система решений уравнения (2.20) могла быть найдена в конечной форме. Это всегда возможно, например, при $i = 1$.

2. Решаем систему уравнений (2.8):

$$z_1 = \frac{1}{\beta_1},\ z_2 = \frac{1}{\beta_1}\int \frac{dx}{\beta_2}, \ldots, z_i = \frac{1}{\beta_1}\int \frac{dx}{\beta_2} \ldots \int \frac{dx}{\beta_i}$$

с неизвестными функциями $\beta_j\ (j = 1, 2, \ldots, i)$.

3. Находим функции $\alpha_k\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ по формулам:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots, = \alpha_{n-i-1} \equiv 1,\ \alpha_{n-i+j} = \beta_{j+1}\ (j = 0, 1, 2, \ldots, i-1);$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}$$

4. Находим функции h и z_n по формулам:

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_i \equiv 0,\ h_k = -p_k\ (k = i+1, i+2, \ldots, n);\ z_n = \varphi(x)$$

В результате получаем для данного уравнения (2.4) специальное уравнение (1.13) в виде:

$$\tilde{y}{}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n)} = h_{i+1}\, y^{(n-i-1)} + h_{i+2}\, y^{(n-i-2)} + \ldots + h_n\, y + z_n(x),$$

для которого находим общее решение в форме интегральных рядов. Это решение и будет общим решением данного уравнения (2.4).

Существенно заметить, что теоремы (7) и (8) дают возможность эффективным путем перейти от любого данного линейного дифференциального уравнения с переменными (или постоянными) коэффициентами к специальному уравнению, для которого построено общее решение в форме интегральных рядов вида (1.4) и (1.15).

§ 3. Уравнения второго и третьего порядков.

В качестве иллюстрации теоретических положений рассмотрим в общем виде уравнения второго и третьего порядков.

1. *Уравнения второго порядка.*

Рассматриваем уравнение вида:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = \varphi(x), \tag{3.1}$$

где p_1, p_2, φ — непрерывные функции от x в $[c, d]$ (или постоянные).

Специальное уравнение строим для (3.1) на основании теоремы (7) Решение (2.7) системы (2.6) получим в виде:

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = e^{\int p_1 dx},\ \alpha_2 = 1;\ h_1 = 0,\ h_2 = -p_2 \alpha_1,\ z_2 = \alpha_1 \varphi(x).\} \tag{3.2}$$

Специальное уравнение (1.13) примет вид:

$$\tilde{y}{}''_{(1\ \alpha_1\ 1)} = -p_2 \alpha_1 y + \alpha_1 \varphi(x) \tag{3.3}$$

Общее решение уравнения (3.1) будет иметь вид:

$$y = u + w_2, \tag{3.4}$$

где имеем:

$$u = c_0 u_0 + c_1 u_1,$$

$$u_k = v_{0k} + v_{1k} + v_{2k} + \ldots + v_{sk} + \ldots\ ;\ (k = 0, 1;\ s = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$v_{00} = 1,\ v_{01} = \int_{\alpha_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_1};$$

$$v_{sk} = -\int_b^x \frac{dx}{\alpha_1} \int_b^x \alpha_1 p_2 v_{s-1,\,k}\, dx;$$

$$w_2 = w_{02} + w_{12} + \ldots + w_{s2} + \ldots, \quad (s = 1; 2, 3, \ldots)$$

$$w_{02} = \int_{r_1}^x \frac{dx}{\alpha_1} \int_{r_2}^x \alpha_1 \varphi(x)\, dx;$$

$$w_{s2} = -\int_b^x \frac{dx}{\alpha_1} \int_b^x \alpha_1 p_2 w_{s-1,\,2}\, dx.$$

Заметим, что применяя теорему (8) для приведения уравнения (3.1) к специальному виду, получим в данном случае такие же результаты.

2. *Уравнения третьево порядка.*

Рассмотрим уравнение вида:

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = \varphi(x). \tag{3.5}$$

Специальное уравнение построим, пользуясь правилом, полученным на основании теоремы (8).

Усеченное уравнение в общем случае следует взять в виде:

$$t''' + p_1 t'' = 0.$$

Положив в нем $z = t''$, получим вспомогательное уравнение в виде

$$z' + p_1 z = 0,$$

откуда

$$z_1 = e^{-\int p_1 dx}, \quad \beta_1 = \frac{1}{z_1} = e^{\int p_1 dx}.$$

Далее находим:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \beta_1, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\beta_1}.$$

$$h_1 = 0, \quad h_2 = -p_2, \quad h_3 = -p_3; \quad z_3 = \varphi(x).$$

Специальное уравнение (1.13) примет вид:

$$\tilde{y}{}'''_{(11\,\alpha_2\,\alpha_3)} = -p_2 y' - p_3 y + \varphi(x). \tag{3.6}$$

Общее решение уравнения (3.5) получим в виде:

$$y = u + w_3, \tag{3.7}$$

где имеем :

$$u = c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2;$$

$$u_k = v_{0k} + v_{1k} + \ldots + v_{sk} + \ldots \quad (k = 0, 1, 2; s = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$v_{00} = 1, \; v_{01} = \int_{a_1}^{x} dx = x - a_1, \; v_{02} = \int_{a_1}^{x} dx \int_{a_2}^{x} \frac{dx}{\alpha_2};$$

$$v_{sk} = -\int_{b}^{x} dx \int_{b}^{x} \frac{dx}{\alpha_2} \int_{b}^{x} \alpha_2 (p_2 v'_{s-1,k} + p_3 v_{s-1,k}) \, dx;$$

$$w_3 = w_{03} + w_{13} + w_{23} + \ldots + w_{s3} + \ldots \quad (s = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$w_{03} = \int_{r_1}^{x} dx \int_{r_2}^{x} \frac{dx}{\alpha_2} \int_{r_3}^{x} \alpha_2 \varphi(x) \, dx;$$

$$w_{s3} = -\int_{b}^{x} dx \int_{b}^{x} \frac{dx}{\alpha_2} \int_{b}^{x} \alpha_2 (p_2 w'_{s-1,3} + p_3 w_{s-1,3}) \, dx.$$

В заключение этого параграфа заметим, что совершенно аналогично можно было бы написать конкретные формулы для решения уравнений более высоких порядков.

§ 4. Примеры (Иллюстративного характера)

1. Исследование колебаний упругого стержня переменной площади поперечного сечения приводится к нахождению функции y, определяемой уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \lambda q(x) y = 0 \qquad (4.1)$$

и граничными условиями (λ — параметр).

Размеры данной работы не позволяют нам рассмотреть решение краевой задачи. Поэтому, преследуя иллюстративные цели, мы ограничимся решением задачи Коши при начальных условиях:

$$\text{при } x = 0 \;\; y(0) = l_0, \; y'(0) = l_1, \; y''(0) = l_2, \; y'''(0) = l_3. \qquad (4.2)$$

В нашей записи уравнение (4.1) примет вид:

$$\tilde{y}{}^{(4)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)} = \lambda q y.$$

Уравнение уже дано в специальном виде и поэтому вопрос о его приведение отпадает.

В данном случае имеем:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = p(x),\ \alpha_3 = \alpha_4 = 1;$$
$$\tilde{y}{}^{(4)}_{(11\,\alpha_2\,11)} = \lambda q y. \tag{4.3}$$

Общее решение уравнения (4.3) будет иметь вид:

$$y = c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3. \tag{4.4}$$

$$u_k = v_{0k} + v_{1k} + \ldots + v_{sk} + \ldots (k\ 0, 1, 2, 3;\ s = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

Начальные функции имеют вид:

$$v_{00} = 1,\ v_{01} = \int_0^x dx = x,\ v_{02} = \int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{\alpha_2},\ v_{03} = \int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{\alpha_2} \int_0^x dx. \tag{4.6}$$

Интегратор, порождающий ряды (4.5) примет вид:

$$v_{sk} = \lambda \int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{\alpha_2} \int_0^x dx \int_0^x q(x)\, v_{s-1,\,k}\, dx, \tag{4.7}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 0, 1, 2, 3.)$$

Для определения произвольных постоянных при решении задачи Коши легко получается общая формула:

$$c_k = \left\{ \tilde{y}{}^{(k)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_k)}(x) \right\}_{x=a} \tag{4.8}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Пользуясь этой формулой сразу получаем:

$$c_0 = l_0,\ c_1 = l_1,\ c_2 = l_2 \alpha_2(0),\ c_3 = l_2 \alpha_2'(0) + l_3 \alpha_2(0).$$

Таким образом, окончательно будем иметь:

$$y = l_0 u_0 + l_1 u_1 + l_2 \alpha_2(0) u_2 + [l_2 \alpha_2'(0) + l_3 \alpha_2(0)] u_3. \tag{4.9}$$

В качестве второго примера мы приведем решение уравнения, рассмотренного М. Рошкулец в работе [2].

Наш кажется, что наш метод интегральных рядов вполне применим для решения уравнений такого типа.

2. Одно уравнение порядка n типа уравнений Фукса. М. Рашкулец рассматривает уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p_{n-1}} \left[\ldots x^{-p_1} \frac{d}{dx}\left(x^{-p_0} y\right) \right] \right] = -x^{\beta} y, \tag{4.10}$$

где p_k — постоянные $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

и $$\beta = -(p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}).$$

(В обозначениях автора мы заменили α_k на p_{n-k}, так как в нашей работе α_k употребляются для другой цели).

Введя обозначения:

$$x^{-p_0} y \equiv v,\ \alpha_0 \equiv 1,\ \alpha_1 \equiv x^{-p_1},\ \alpha_2 \equiv x^{-p_2},\ \ldots,\ \alpha_{n-1} \equiv x^{-p_{n-1}},\ \alpha_n \equiv -x^{r_1+p_2+\ldots+p_{n-1}} \tag{4.11}$$

и учитывая (1.2) мы сразу уравнение (4.10) запишем в специальной форме (1.3) относительно искомой функции v:

$$\underset{\sim}{v}^{(n)}_{(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n)} = \lambda x \tag{4.12}$$

где $h_j \equiv 0$ для $j = i,\ i+1,\ \ldots,\ n-1$; $h_n = \lambda$ — параметр.

Решение уравнение (4.12) сразу получаем по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Из (4.11)} && y = x^{p_0} v;\\
&\text{в силу (1.10)} && v = c_0 u_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_{k-1} u_{k-1}\\
&\text{в силу (1.4), (1.5), (1.6) имеем:} && \\
& && u_k = v_{0k} + v_{1k} + v_{2k} + \ldots + v_{sk} + \ldots;\\
& && (s = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, n-1)\\
& && v_{0k} = \int\limits_{a_m\,(1,\,k)}^{x} x^{p_m}\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1);\\
& && v_{sk} = \lambda \int\limits_{b_m\,(1,\,n)}^{x} x^{p_m}\, v_{s-1,\,k}\, dx \quad (s = 1, 2, \ldots;\ b_m \equiv b)
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

При $\lambda = 1$ получаем решение уравнения (4.10) относительно v.

Из двух последних формул (4.13) видно, что реализация рядов в данном случае не представляет затруднений, ибо все сводится к повторному интегрированию степеней x^{p_m}.

Нижние пределы интегрирования — постоянные a_m, b находятся в нашем распоряжении. Их следует выбирать, учитывая два соображения:

1) чтобы интегрирование было возможным;

2) чтобы интегрирование было наиболее простым.

Для большей ясности в применении нашего метода к решению уравнений рассмотрим более детально некоторые случаи решения уравнения (4.12) при $n = 2$.

Полагая в (4.12) $n = 2$, будем иметь:

$$\underset{\sim}{v}''_{(\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2)} = \lambda v,$$

а в развернутой форме получаем:

$$v'' - \frac{p_1}{x} v' + \lambda v = 0 \tag{4.14}$$

1° Пусть постоянная p_1 удовлетворяет условию:

$$-1 < p_1 < +1. \tag{1a}$$

По формулам (4.13) имеем:

$$y = x^{r_0} v;$$

$$v = c_0 u_0 + c_1 u_1;$$

$$u_0 = v_{00} + v_{10} + v_{20} + \ldots;$$

$$u_1 = v_{01} + v_{11} + v_{21} + \ldots;$$

$$v_{00} = 1;\ v_{01} = \int_0^x y^{p_1}\, dx = \frac{x^{p_1+1}}{p_1+1}; \tag{1b}$$

$$v_{sk} = -\lambda \int_0^x x^{p_1}\, dx \int_0^x x^{-p_1} v_{s-1,\,k}\, dx \quad (k = 0, 1;\ s = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1c}$$

Выполняя интегрирование легко получаем:

$$v_{s0} = (-1)^s \frac{\lambda^s\, x^{2s}}{(1-p_1)\, 2 \cdot (2-p_1)\, 4\, (3-p_1)\, 6 \ldots (2s-1-p_1)\, 2s} \quad (s = 1, 2, 3\ldots) \tag{1d}$$

и ряд u_0 получен.

$$v_{s1} = (-1)^s \frac{\lambda^s\, x^{2s+1p_1}}{(1+p_1)\, 2\, (3+p_1)\, 4 \ldots 2s\, (2s+1+p_1)} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1e}$$

и ряд u_1 получен.

2° Пусть $p_1 = -1$, тогда (4.14) примет вид:

$$v'' + \frac{1}{x} v' + \lambda v = 0 \tag{4.15}$$

В этом случае имеем:

$$v_{00} = 1,\ v_{01} = \int_0^x \frac{dx}{x} = \ln x;$$

$$v_{sk} = -\lambda \int_0^x x^{-1}\, dx \int_0^x x\, v_{s-1,\,k}\, dx \quad (k = 0, 1;\ s = 1, 2, 3, \ldots)$$

Совершенно просто получаем:

$$v_{s0} = (-1)^s \frac{\lambda^s x^{2s}}{2^2 4^2 6^2 \dots (2s)^2} \quad (s = 1, 2, 3, \dots);$$

$$u_0 = I_0(x, z) = 1 - \frac{\lambda x^2}{2^2} + \frac{\lambda^2 x^4}{2^2 4^2} - \frac{\lambda^3 x^6}{2^2 4^2 6^2} = \dots;$$

$$u_1 = I_0(x, \lambda) \cdot \ln x + \left\{ \frac{\lambda x^2}{2^2} - \frac{\lambda^2 x^4}{2^2 4^4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots \right\};$$

$$y = x^{p_0} v, \; v = c_0 u_0 + c_1 u_1.$$

Получили решение обобщенного уравнения Бесселя нулевого порядка.

3° Пусть выполняется условие:

$$-3 < p_1 < -1. \tag{3a}$$

$$v_{00} = 1; \; v_{01} = \int_{+\infty}^{x} x^{p_1} dx = \frac{x^{1+p_1}}{1+p_1};$$

$$v_{sk} = -\lambda \int_0^x x^{p_1} dx \int_0^x x^{-p_1} v_{s-1,\,k} \, dx \quad (k = 0, 1).$$

Выполнив интегрирование получаем формулы (1α) и (1e), которые оказались годными и для p_1 при условии (3a).

Пусть, например,

Уравнение (4.14) примет вид:

$$v'' + \frac{2}{x} v' + \lambda v = 0. \tag{4.16}$$

$$u_0 = \frac{\sin(x, \lambda)}{x} = 1 - \lambda \frac{x^2}{3!} + \lambda^2 \frac{x^4}{5!} - \lambda^3 \frac{x^6}{7!} + \dots;$$

$$u_1 = -\frac{\cos(x, \lambda)}{x} = -\frac{1}{x} + \lambda \frac{x}{2!} - \lambda^2 \frac{x^3}{4!} + \dots;$$

$$v = c_0 u_0 + c_1 u_1;$$

и так далее.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] *П. А. Муравьев.* Обобщенная производная и ее применение к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

ж. „Известия ВУЗ" Математика, № 1(26), 1962 стр. 89—100.

[2.] *M. Rosculet.* Sur une equation differentielle d'ordre n qui pour nr. 2 est l'equation de Bessel.
Buletinul institutului Politehnic Bucureşti
Tomul XXII — 1958: Fascicola 1, 9—15.

[3.] *I. Miu.* Integrarea unor clase de ecuaţii diferenţiale cu ajutorul operatorilor diferenţiali.
Buletinul institutului Politehnic Bucureşti
Tomul XXII — 1960: Fascicola 2, 64—70.

[4] *Э. Л. Айнс.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
г. Харьков, ОНТИ, 1939, стр. 163.
Ивановского энергетического института им. В. И. Ленина.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ ИНТЕГРАЛОВ П. А. МУРАВЬЁВ

(Краткое содержание)

В этой работе автор занимается интегрированием дифференциальных уравнений вида

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0,\,\alpha_1\ldots,\,\alpha_n)} = h_i\,y^{(n-i)} + h_{i+1}\,y^{(n-i-1)} + \ldots + h_{n-1}\,y' + h_n\,y + z\,(x) \quad (1)$$

где обозначается

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n)} = \left(\alpha_n\frac{d}{dx}\right)\left(\alpha_{n-1}\frac{d}{dx}\right)\cdots\left(\alpha_1\frac{d}{dx}\right)(\alpha_0\,y)$$

через $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, h_i, h_{i+1}, h_n данных функций. Автор показыват, что n частных решений уравнения (1) с $z \equiv 0$ даны

$$u_k = v_{0k} + v_{1k} + \ldots + v_{sk} + \ldots \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n-1)$$

где

$$v_{ok} = \frac{1}{\alpha_0(x)}\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{\alpha_1(x)}\int_{a_2}^{x}\frac{dx}{\alpha_2(x)}\cdots\int_{a_k}^{x}\frac{dx}{\alpha_k(x)} \quad (\alpha_k \neq 0)$$

и

$$v_{sk} = \frac{1}{\alpha_0(x)}\int_{b_1}^{x}\frac{dx}{\alpha_1(x)}\int_{b_2}^{x}\frac{dx}{\alpha_2(x)}\cdots\int_{b_k}^{x}\frac{1}{\alpha_k(x)}\left(h_i\,v^{(n-i)}_{s-1,\,k} + \ldots + h_n\,v_{s-1,\,k}\right)dx$$

a_i, b_i постоянные. Решения u_k образуют фундаментальную систему интегралов, если $b_1 = b_2 = \ldots\ldots b_n$.

Частное решение неоднородного уравнения (1) получается подобным образом. В продолжении автор занимается при сведении линейых уравнений переменными коэффициентами некоторого порядка, в специальной форме, чтобы позволить применение изложенного метода. Даны примеры для $n=2$ и $n=3$.

THE INTEGRATION OF LINIAR DIFFERENTIAL EQUATIONS, UNDER GENERAL FORM BY MEANS OF P. A. MURAVIEV INTEGRAL SERIES

(Summary)

In this paper, the author deals with the integration of differential equations of the form of:

$$\widetilde{y}^{(i)}_{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = h_1 y^{(n-i)} + h_{i+1} y^{(n-i-1)} + \ldots + h_{n-1} y' + h_n y + z(x) \quad (1)$$

where it is noted

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_i, \alpha_1 \ldots \alpha_n)} = \left(\alpha_n \frac{d}{dx}\right)\left(\alpha_{n-1}\frac{d}{dx}\right)\ldots\left(\alpha_1 \frac{d}{dx}\right)(\alpha_0 y)$$

with $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n h_i, h_{i+1} \ldots h_n$ given functions. The author shows that n particular solutions of the equation (1) with $z \equiv 0$ are giwen by

$$u_k = v_{0k} + v_{1k} + \ldots + v_{sk} + \ldots \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n-1)$$

where

$$v_{ok} = \frac{1}{\alpha_0(x)} \int_{\alpha_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_1(x)} \int_{\alpha_2}^{x} \frac{dx}{\alpha_2(x)} \ldots \int_{\alpha_k}^{x} \frac{dx}{\alpha_k(x)} \quad (\alpha_k \neq 0)$$

and

$$v_{sk} = -\frac{1}{\alpha_0(x)} \int_{b_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_1(x)} \int_{b_2}^{x} \frac{dx}{\alpha_2(x)} \ldots \int_{b_k}^{x} \frac{1}{\alpha_k(x)} (h_i v^{(n-i)}_{s-1,k} + \ldots + h_m v_{s-1,k})\, dx$$

a_i, b_i constant. The solution u make up a fundamental system of integral if $b_1 = b_2 \ldots = b_n$ A particular solution of the non homogenons equation (1) is similarly obtained.

Further on, the author foi reducing the liniar equations deals with variable coefficients of any onder, of a special form, so that it may leado the application of the demonstrated method. Exemples are given for $n=2$ and $n=3$.

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SOUS LA FORME GÉNÉRALE AU MOYEN DES SÉRIES D'INTÉGRALES DE P. A. MURAVIEV

(Résumé)

Dans cet ouvrage l'auteur traite de l'intégration des équations différentielles du genre

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n} = h_i\, y^{(n-i)} + h_{i+1}\, y^{n-i-1} + \ldots + h_{n-1}\, y' + h_n\, y + z(x) \qquad (1)$$

où l'on note

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n)} = \left(\alpha_n \frac{d}{dx}\right)\left(\alpha_{n-1}\frac{d}{dx}\right)\cdots\left(\alpha_1\frac{d}{dx}\right)(\alpha_0\, y)$$

par α_0, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, h_i, $h_{i+1} \ldots h_n$ fonctions données. L'auteur fait voir que n solutions particulières de l'équation (1) ayant $z \equiv 0$ sont données par

$$u_k = v_{0k} + v_{1k} + \ldots + v_{sk} + \ldots \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots n-1)$$

où

$$v_{0k} = \frac{1}{\alpha_0(x)} \int_{\alpha_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_1(x)} \int_{\alpha_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_2(x)} \cdots \int_{\alpha_k}^{x} \frac{dx}{\alpha_k(x)} \quad (\alpha_k \neq 0)$$

et

$$v_{sk} = \frac{1}{\alpha_0(x)} \int_{b_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_1(x)} \int_{b_2}^{x} \frac{dx}{\alpha_2(x)} \cdots \int_{b_k}^{x} \frac{1}{\alpha_k(x)} \quad (h_i\, v^{(n-1)}_{s-1,\,k} + \ldots + k_n\, v_{s-1,\,k})\, dx$$

a_i, b_i constantes. Les solutions u_k forment un système fondamental d'intégrales $b_1 = b_2 = \ldots b_b$. Une solution particulière de l'équation (1) non homogène est obtenue par un moyen semblable. Par la suite, l'auteur traite la réduction des équation linéaires à des coefficients variables d'un ordre quelconque, à une forme spéciale permetant l'application de la méthode plus haut exposée. On fournit des exemples pour $n=2$ et $n=3$.

DIE INTEGRIERUNG DER LINIAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DER ALLGEMEINEN FORM MIT HILFE DER P. A. MURAVIOV'SCHEN INTEGRALSERIEN

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Verfasser mit der Integrierung der Differentialgleichungen der Form

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n)} = h_i\, y^{(n-i)} + h_{i+1}\, y^{(n-i-1)} + \cdots + h_{n-i}\, y' + h_n\, y + z(x) \quad (1)$$

wo

$$\tilde{y}^{(n)}_{(\alpha_0,\,\alpha_1\ldots\alpha_n)} = \left(\alpha_n \frac{d}{dx}\right)\left(\alpha_{n-1}\frac{d}{dx}\right)\cdots\left(\alpha_1\frac{d}{dx}\right)\left(\alpha_0 y\right)$$

mit α_0, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, h_i, $h_{i+1} \ldots h_n$ gegebenen Funktionen bezeichnet werden.

Der Verfasser zeigt dass n besondere Functionen der Gleichung (1) mit $z \equiv 0$ durch $u_k = v_{0k} + v_{1k} + \ldots + v_{sk} \ldots (k = 0, 1, 2 \ldots n-1)$ gegeben sind wo $v_{0k} = \dfrac{1}{\alpha(x)} \int\limits_{\alpha_1}^{x} \dfrac{dx}{\alpha_1(x)} \int\limits_{\alpha_2}^{x} \dfrac{dx}{\alpha_2(x)} \cdots \int\limits_{\alpha_K}^{\alpha} \dfrac{dx}{\alpha_k(x)}$ $(\alpha_k \neq 0)$ und $v_{sk} =$

$$= \frac{1}{\alpha_0(x)} \int\limits_{b_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_1(x)} \int\limits_{b_1}^{x} \frac{dx}{\alpha_2(z)} \cdots \int\limits_{b_K}^{x} \frac{1}{\alpha_k(x)} \left(h_i\, v^{(n-i)}_{s-s,\,K} + \cdots + h_n\, v_{1-1,\,K}\right) dx \quad ai,\ bi$$

konstant sind.

Die Lösungen u_K bilden ein Grundsystem von gegebenen Integralen $b_1 = b_2 = \ldots b_n$.

Eine besondere Lösung der nichthomogenen Gleichung (1) erhält man auf ähnliche Weise. Weiterhin beschäftigt sich der Verfasser mit der Reduktion der liniaren Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten von irgendwelcher Grösse zu Sonderformen wodurch die Anwendung der vorgeführten Methode ermöglicht wird.

Es werden im folgenden Beispiele für $n=2$ und $n=3$ gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 3

UNELE FORMULE FUNDAMENTALE ALE CALCULULUI OPERAȚIONAL PENTRU FUNCȚIILE DE DOUĂ VARIABILE STABILITE PRIN METODA ALGEBRICĂ *)

R. TUDORAN

În 1893, Heaviside [1] a introdus regulile empirice de calcul operațional pentru studiul circuitelor electrice, fără a da o justificare riguroasă din punct de vedere matematic.

În 1922, Carson [2], iar mai tîrziu, în 1932, B. Van Der Pol [3] și Doetsch [4], în 1937, au reluat calculul operațional prin metoda transformatei Laplace, fapt care a schimbat complet problema.

În 1950, J. G. Mikusinski [5] a dat o nouă metodă de prezentare a calculului operațional — metoda algebrică — construind astfel baza teoretică a calculului operațional „completă și liberă de toate restricțiile inutile".

Cu această metodă, la baza căreia stau teoremele : lui Titchmarsh [7], Crum [8], Dufresnoy [9] asupra produsului de compoziție a două funcții, Mikusinski a construit calculul operațional pentru funcțiile numerice continui (resp. sumabile) de o variabilă, avînd suportul în R_+ .

Generalizarea teoremei lui Titchmarsh la funcțiile de mai multe variabile de către : T. L. Lions [10], [11], J. G. Mikusinski, Ryll — Nardezewski [12] și V. Vasilache [13] a făcut posibilă extinderea metodei lui Mikusinski la spațiul funcțiilor numerice continui (resp. sumabile) de mai multe variabile, avînd suportul limitat la stînga, în raport cu conul convex $R_+^n = [0,\infty]^n$

Principiile fundamentale ale unui asemenea calcul operațional au fost expuse de S. Vasilache [14] considerînd spațiul $(C + \Gamma)$ al funcțiilor continui definite în $= X \times Y$, X și Y fiind două conuri convexe isomorfe cu R_+, pe care a definit o structură algebrică determinată de două legi de compoziție interne** : a) adunarea

$$\{a(x,y)\} + \{b(x,y)\} = \{a(x,y) + b(x,y)\}$$

---

* Comunicare prezentată la a VI-a sesiune științifică a cadrelor didactice din I.P.B. — 17—18 decembrie 1960.

** După Mikusinski, a sau $\{a(x,y)\}$ simbolizează funcția din $(C + \Gamma)$ a cărei valoare în punctul (x, y) se notează cu $a(x, y)$.

și b) convoluția

$$\{a(x,y)\}*\{b(x,y)\}=\left\{\int_0^x\int_0^y a(x-\xi, Y-\eta)\,b(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}$$

Inelul, fiind un inel de integritate, deoarece produsul de convoluție este comutativ și fără divizori ai lui zero, poate fi scufundat într-un corp de fracții K (teorema de simetrizare, V. N. Bourbaki [15]) definit prin:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ dacă } b\neq 0,\ d\neq 0 \text{ și } a*d=b*c$$

$a=\frac{a\cdot k}{k}$, $k\neq 0$ un element oarecare din K care este cel mai mic corp comutativ a cărui submulțime formată cu elementele de forma $\frac{a\cdot k}{k}$, $a\in(C_{+\Gamma})$ este isomorfă cu $(C_{+\Gamma})$.

Isomorfia și corpul K fiind unic determinate, se poate identifica funcția a cu orice element al lui K de forma $\frac{ak}{k}$

Legile de compoziție interne în K sînt: adunarea și înmulțirea definite prin:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a*d+b*c}{b*d}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Elementele lui K. se numesc operatori.

Între operatorii lui K. se află și operatorii integrali: l_x, l_y, l și diferențiali: p, q, pq introduși de S. Vasilache [14].

În cele ce urmează, vom stabili cîteva formule fundamentale ale calculului operațional pentru funcțiile de două variabile, utilizînd operatorii: p, q, $pq\in K$, măsurile Dirac δ_x, δ_y, și formulele fundamentale stabilite de S. Vasilache [14].

1. Considerăm operatorul

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)(p+q)}$$

și vom demonstra că

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)(p+q)}=\begin{cases}\{e^x shy\} \text{ ptr. } x>y\\ \{e^y shx\} \text{ ptr. } x<y\end{cases}$$

Intr-adevăr

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)(p+q)} = \frac{1}{pq-p-q+1} \cdot \frac{1}{p+q} =$$

$$= \begin{cases} \{e^{x+y}\} * \{\delta_x (x-y)\} \text{ ptr. } x > y \\ \{e^{x+y}\} * \{\delta_y (y-x)\} \text{ ptr. } y > x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left\{ \int_0^x \int_0^y e^{x+y-(\xi+\eta)} \delta_x (\xi-\eta)\, d\xi\, d\eta \right\} = \{e^x \operatorname{sh} y\} \text{ ptr. } x > y \\ \left\{ \int_0^x \int_0^y e^{x+y-(\xi+\eta)} \delta_y (\eta-\xi)\, d\xi\, d\eta \right\} = \{e^y \operatorname{sh} x\} \text{ ptr. } y > x \end{cases}$$

2. Fie operatorul

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)(p+q-1)},$$

vom demonstra următoarea formulă fundamentală

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)(p+q-1)} = \begin{cases} \{e^y (e^x - 1)\} \text{ ptr. } y > x \\ \{e^x (e^y - 1)\} \text{ ptr. } x > y \end{cases}$$

Avem

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)(p+q-1)} = \frac{1}{pq-p-q+1} \cdot \frac{1}{p+q-1} =$$

$$= \left\{ e^{x+y} \right\} * \begin{cases} \{e^x \delta_y (y-x)\} \text{ ptr. } y > x \\ \{e^y \delta_x (x-y)\} \text{ ptr. } x > y \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left\{ \int_0^x \int_0^y e^{x+y-(\xi+\eta)} e^{\xi} \delta_y (\eta-\xi)\, d\xi\, d\eta \right\} = \{e^y (e^x - 1)\} \text{ ptr. } y > x \\ \left\{ \int_0^x \int_0^y e^{x+y-(\xi+\eta)} e^{\eta} \delta_x (\xi-\eta)\, d\xi\, d\eta \right\} = \{e^x (e^y - 1)\} \text{ ptr. } x > y \end{cases}$$

3. Considerăm operatorul

$$\frac{1}{pq(p+q+a)},$$

unde $a \neq 0$ constant şi vom arăta că

$$\frac{1}{pq(p+q+a)} = \begin{cases} \left\{ \frac{1-e^{-ax}}{a} \right\} \text{ ptr. } y > x \\ \left\{ \frac{1-e^{-ay}}{a} \right\} \text{ ptr. } y < x \end{cases}$$

Într-adevăr

$$\frac{1}{pq(p+q+a)}=\frac{1}{pq}\cdot\frac{1}{p+q+a}=\{1\}*\begin{cases}\{e^{-ax}\delta_y(y-x)\}\ \text{ptr. } y>x\\ \{e^{-ay}\delta_x(x-y)\}\ \text{ptr. } x>y\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\left\{\int_0^x\int_0^y e^{-a\xi}\delta_y(\eta-\xi)\,d\xi\,d\eta\right\}=\left\{\frac{1-e^{-ax}}{a}\right\}\ \text{ptr. } y>x\\ \left\{\int_0^x\int_0^y e^{\ a\eta}\delta_x(\xi-\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}=\left\{\frac{1-e^{-ay}}{a}\right\}\ \text{ptr. } x>y\end{cases}\qquad a\neq 0\,.$$

4. Considerăm operatorul

$$\frac{1}{p^2+\alpha pq+\beta},$$

unde $\alpha>0$ și β sînt constante și vom demonstra formula fundamentală

$$\frac{1}{p^2+\alpha pq+\beta}=\begin{cases}0\ \text{ptr. } \alpha x<y\\ \frac{1}{\alpha}\left\{J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\beta y(\alpha x-y)}\right)\right\}\ \text{ptr. } y<\alpha x\,.\end{cases}$$

unde J_0 este funcția Bessel de ordinul zero.
Avem

$$\frac{1}{p^2+\alpha pq+\beta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{p\left[q+\frac{1}{\alpha}\left(p+\frac{\beta}{p}\right)\right]}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{p}e^{-\frac{\beta y}{\alpha}\frac{1}{p}}\cdot e^{-\frac{y}{\alpha}p}$$

Dar

$$\frac{1}{p}e^{-\frac{\lambda}{p}}=\{J_0(2\sqrt{\lambda x})\}$$

(v. Mikusinski [6], p. II-a cap. VII § 52).
iar

$$e^{-p\frac{y}{\alpha}}=\begin{cases}0\ \text{ptr. } \alpha x<y\\ \left\{\delta_x\left(x-\frac{y}{\alpha}\right)\right\}\ \text{ptr. } y<\alpha x\end{cases}$$

(v. S. Vasilache [14], p. 229).
Prin urmare,

$$\frac{1}{p^2+\alpha pq+\beta}=\{0\}\ \text{ptr. } \alpha x<y$$

și

$$\frac{1}{p^2+\alpha pq+\beta}=\frac{1}{\alpha}\left\{J_0\left(2\sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}x}\right)\right\}*\left\{\delta_x\left(x-\frac{y}{\alpha}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left\{\int_0^x J_0\left(2\sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}\left(x-\xi\right)}\right)\delta_x\left(\xi-\frac{y}{\alpha}\right)d\xi\right\}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left\{J_0\left(2\sqrt{\frac{\beta y}{\alpha}\left(x-\frac{y}{\alpha}\right)}\right)\right\}=\frac{1}{\alpha}\left\{J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\beta y\left(\alpha x-y\right)}\right)\right\}\text{ ptr. } y<\alpha x$$

5. Fie operatorul $\frac{1}{p^2q^2-\alpha^2}$, vom demonstra următoarea formulă fundamentală

$$\frac{1}{p^2q^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\left\{I_0\left(2\sqrt{\alpha xy}\right)-J_0\left(2\sqrt{\alpha xy}\right)\right\}$$

unde I_0 este funcția Bessel modificată de ordinul zero.
Într-adevăr

$$\frac{1}{p^2q^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{pq-\alpha}-\frac{1}{pq+\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left\{I_0\left(2\sqrt{\alpha xy}\right)\right\}-\left\{J_0\left(2\sqrt{\alpha xy}\right)\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\left\{I_0\left(2\sqrt{\alpha xy}\right)-J_0\left(2\sqrt{\alpha xy}\right)\right\}$$

6. Considerăm operatorul $\frac{1}{(pq+\beta)^2-\alpha^2}$. vom demonstra formula fundamentală

$$\frac{1}{(pq+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta-\alpha)xy}\right)-J_0\left(2\sqrt{(\beta+\alpha)xy}\right)\right\}$$

Avem

$$\frac{1}{(pq+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{pq+\beta-\alpha}-\frac{1}{pq+\beta+\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta-\alpha)xy}\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta+\alpha)xy}\right)\right\}\right]=\frac{1}{2\alpha}\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta-\alpha)xy}\right)-J_0\left(2\sqrt{(\beta+\alpha)xy}\right)\right\}.$$

7. Fie operatorul $\frac{pq+\beta}{(pq+\beta)^2-\alpha^2}$ vom demonstra formula fundamentală

$$\frac{pq+\beta}{(pq+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{1}{2}\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta-\alpha)xy}\right)+J_0\left(2\sqrt{(\beta+\alpha)xy}\right)\right\}$$

(α și β constante)

Într-adevăr

$$\frac{pq+\beta}{(pq+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{pq+\beta-\alpha}+\frac{1}{pq+\beta+\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left[\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta-\alpha)xy}\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta+\alpha)xy}\right)\right\}\right]=\frac{1}{2}\left\{J_0\left(2\sqrt{(\beta-\alpha)xy}\right)+J_0\left(2\sqrt{(\beta+\alpha)xy}\right\}\right.$$

Catedra de Matematică
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *O. Heaviside,* On operators in Physical Mathematics. Proc. Ray. Soc. A. 1893, 52, 504—529; 1894, 54, 105—143.
2. *T. Carson,* Heaviside operational calculus. Bell. Syst. Tech. S. 1922, 1, 43—55.
3. *B. Van Der Pol,* K. F. Niessen, Symbolic calculus Phil. Mag., 1932, 13, 537—577.
4. *G. Doetsch,* Theorie und Anwendung der Laplace — Transformation Springer, Berlin, 1937.
5. *J. G. Mikusinski,* Sur les fondaments du calcul operationnel. Studia Math, 1950, 11, 41—70.
6. *J. G. Mikusinski* — Rachunek Operatorow. Monografie Matematiczne, Warszawa, 1957. XXX.
7. *E. C.* Titchmarsh The zeros of certain integral functions. Proc. of the London Math. Soc., 25, 283—302 (1926).
8. *M. Crum,* On the Resultant of two Functions Quaterly Journ. of. Math. Oxford, Series 12, 1941, 46, 108—111.
9. *G. Dufresnoy,* Sur le produit de composition de deux functions. C. R. Acad. Sci. Paris, 1947, 225, 857—859.
10. *J. L. Lions,* Supports de produits de composition. C. R. Acad. Sci. Paris, 1951, 232, 1530—1532.
11. *J. L. Lions,* Supports de produits de composition. C. R. Acad. Sci. Paris 1951, 232, 1622—1624.
12. *J. G. Mikusinski,* C. Ryll — Nardzewski, Un théorème sur le produit de composition de plusieurs variables Studia Math, 1953, 13, 62—68.

13. *S. Vasilache,* Sur le produit de composition des fonctions et distributions à support dans R_+^n, $n \geqslant 1$ C. R. Acad. Sci Paris, 1956, 243, 1468—1471 ; 1591—1593 ; 1788—1791.

14. *S. Vasilache,* sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables. Reuve de Math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., 1957, 2, 181—238.

15. *N. Bourbaki,* Algèbre, 2e éd, Paris, 1951, ch. I.

НЕКОТОРЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ОПЕРАЦИОННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Краткое содержание

В этой статье, автор выводим некоторые фундаментальные формулы операционного алгебраического исчисления для функций двух перелесиных, основы которого были изложены S. Vasilache в работе: Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables [14]

A FEW FONDAMENTAL FORMULAE OF THE ALGEBRIC OPERATIONAL CALCULATION FOR THE FONCTIONS OF TWO VARIABLES

(Summary)

In the present article the author is establishing a few fondamental formulae of the algebric operational calculation for the fonctions of two variables, the basis of which has been exposed by S. Vasilache in the work: „Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables“ (14).

QUELQUES FORMULES FONDAMENTALES DU CALCUL OPÉRATIONNEL ALGÉBRIQUE POUR FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

(Résumé)

Dans cet article l'auteur établie quelques formules fondamentales du calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables, dont les bases ont été exposées par S. Vasilache dans son travail: „Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables“ (14).

EINIGE GRUNDLIEGENDE FORMELN DES OPERATIONELLEN ALGEBRAISCHEN RECHNENS FÜR DIE FUNKTIONEN VON ZWEI VERÄNDERLICHEN

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit, der Verfasser etabliert einige grundliegende Formeln des operationellen algebraischen Rechnens für die Funktionen von zwei Veränderlichen. Die Bazis dieses Problems wurde von S. Vasilache in seiner Arbeit: „Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables" (14) gelegt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 3

DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A FRECVENȚELOR VIBRAȚIILOR TRANSVERSALE ALE BARELOR DE SECȚIUNE VARIABILĂ CU AJUTORUL METODEI DIFERENȚELOR FINITE *

AURELIAN STAN

1. Determinarea frecvenței vibrațiilor transversale ale barelor de secțiuni variabile, este o problemă destul de greu de soluționat în toată generalitatea ei. Cu studiul acestei probleme s-au ocupat diverși cercetători. Unii, au propus metode aproximative dar mai generale, alții au studiat anumite cazuri particulare ale barelor cu diferite secțiuni variabile. Astfel, Kirchhoff [1] determină pentru prima oară frecvența vibrațiilor transversale ale conului, iar Mononobe [2] cu ajutorul funcțiilor Bessel frecvența vibrațiilor transversale ale triunchiului de con și a coșurilor de fabrici.

O metodă aproximativă bazată pe o extindere a metodei energetice Rayleigh- — Ritz — Galerkin a fost folosită de Dr. Hort [3], iar Schwerin [4] introduce pentru prima oară metoda ecuațiilor integrale.

Metodele folosite sînt foarte laborioase și necesită rezolvarea unor complicate ecuații transcendente.

În cele ce urmează, se vor determina frecvențele vibrațiilor transversale ale unei bare de secțiune variabilă, aplicînd ecuațiile cu diferențe finite, metodă care în ultimii ani a fost aplicată la rezolvarea cu bună aproximație a diverselor probleme ale teoriei elasticității.

Metoda diferențelor finite este aplicată pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale liniare și cu derivate parțiale, pornind fie de la metoda trapezului, fie de la metoda parabolei, obținîndu-se aproximații satisfăcătoare pentru practică, dacă se iau un număr relativ mic de intervale. Dar în unele cazuri pentru a se obține rezultate mai exacte, este nevoie să se ia un număr mai mare de intervale, ceea ce mărește volumul calculului. Erorile care se fac sînt în aceste cazuri de ordinul h^2, în care h este mărimea intervalului admis.

O îmbunătățire a metodei diferențelor fiinte, bazată pe o combinare între ecuația diferențială de integrat și dezvoltarea în serie Taylor a

*) Comunicare prezentată la a VII-a sesiune științifică a cedarelor didactice din I.P.B. — 7—8 aprilie 1962.

funcției necunoscute, metoda plurilocală [5], a fost aplicată cu succes în cadrul plăcilor curbe subțiri [6].

2. Pentru stabilirea frecvenței vibrațiilor transversale ale barelor cu secțiune variabilă, prin metoda diferențelor finite se pornește de la ecuația vibrațiilor transversale ale barei, neglijînd forțele tăietoare și momentul de torsiune. În acest caz ecuația vibrațiilor transversale ale unei bare de secțiune varială A_x, de moment de inerție I_x deasemenea variabil, este dată de ecuația:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = -\frac{\gamma}{g} A_x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

unde EI_x este rigiditatea barei la încovoiere, iar γ greutatea specifică a materialului barei.

Modulul de elasticitate E fiind constant și admițînd că ecuația (1) are soluții de forma $y\ (x,t) = Y\ (x).\ T\ (t)$, prin derivări succesive se obține ecuația

$$T'' + p^2 T = 0 \tag{2}$$

cu soluția $T = A\ cos\ pt + B\ sin\ pt$, unde constantele A și B se determină prin condițiile inițiale, și ecuația

$$I \cdot \frac{d^4 Y}{dx^4} + 2\frac{dI}{dx} \cdot \frac{d^3 Y}{dx^3} + \frac{d^2 I}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y}{dx^2} = p^2 \cdot \frac{\gamma}{g} A_x \cdot Y \tag{3}$$

din care se determină funcția $Y(x)$, în raport de condițiile de capăt ale barei.

Pentru a aplica ecuației diferențiale (3) metoda diferențelor finite, admitem că secțiunea și momentul de inerție a unei secțiuni oarecare aflată la distanța x față de un capăt al barei variază după legi cunoscute

$$A_x = A_0 \cdot \varphi\ (x) = A_0 \cdot \varphi\ ; \qquad I_x = I_0 \cdot f\ (x) = I_0 \cdot f \tag{4}$$

Diferențiind relațiile (4), ecuația diferențială (3) devine

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + 2\frac{f'}{f} \cdot \frac{d^3 Y}{dx^3} + \frac{f''}{f} \cdot \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{\varphi}{f} \cdot \frac{\gamma p^2}{E g} \cdot \frac{A_0}{I_0} Y \tag{3'}$$

Se notează cu l lungimea barei a cărei frecvență a vibrației se determină, cu n numărul de intervale și cu $h = \frac{l}{n}$ mărimea unui interval.

Înmulțind ecuația cu h^4 și grupînd în mod convenabil coeficienții ecuației diferențiale, revenind la notația y, aceasta se poate scrie:

$$h^4 y^{IV} + \frac{l}{n} \cdot \frac{f'}{f}\left(2h^3 y'''\right) + \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{f''}{f}\left(h^2 y''\right) = \left(\frac{p^2 \gamma}{Eg} \cdot \frac{A_0}{I_0} \cdot \frac{l^4}{n^4}\right) \cdot \frac{\varphi}{f} y = k \frac{\varphi}{f} y \tag{3''}$$

unde s-a notat

$$k = \frac{p^2 \gamma}{Eg} \cdot \frac{A_0}{I_0} \cdot \frac{l^4}{n^4} \tag{5}$$

3. Pentru a trece de la o ecuație diferențială la o ecuație cu diferențe finite, în cazul unei funcții $y = f(x)$ de o singură variabilă independentă x, presupunem că s-a determinat într-un mod oarecare curba $y = f(x)$ pe care se aleg o serie de puncte P_0, $P_1 \ldots . P_m$. Prin aceste

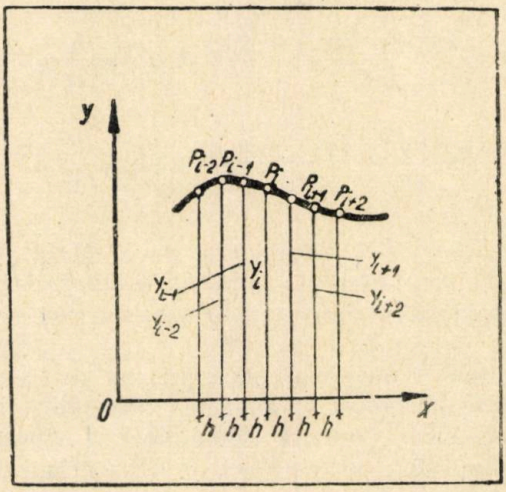


Fig. 1.

$(m + 1)$ puncte consecutive, se înlocuiește curba reală printr-o curbă de interpolare.

Folosind dezvoltarea în serie Taylor

$$y_\alpha = f(x \pm \alpha h) = f(x) \pm \frac{(\alpha h)}{1!} f'(x) + \frac{(\alpha h)}{2!} f''(x) \pm \cdots \tag{6}$$

unde pentru y se iau ordonatele în cinci puncte consecutive y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, corespunzătoare punctelor P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, se pot scrie relațiile:

$$y_{i\pm1} = f(x \pm h) = f(x) \pm \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \pm \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x) \pm \cdots \tag{6a}$$

$$y_{i\pm2} = f(x \pm 2h) = f(x) \pm \frac{(2h)}{1!} \cdot f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) \pm \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) +$$

$$+ \frac{(2h)^4}{4!} f^{IV}(x) \pm \cdots \tag{6b}$$

Din relațiile 6 *a* și 6 *b* se pot obține valorile derivatelor y_i', y_i'', y_i''', y_i^{IV} prin diferențe finite în funcție de punctele adiacente.

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \approx y_i' + \frac{h^2}{6} y_i''' + \frac{h^4}{5!} y_i^V \tag{7a}$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \approx y_i'' + \frac{h^2}{12} y_i^{IV} + \frac{h^4}{360} y^{VI} \tag{7b}$$

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} \approx y_i''' + \frac{h^2}{4} y_i^V + \frac{h^4}{40} y_i^{VII} \tag{7c}$$

$$\frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i+2}}{h^4} \approx y_i^{IV} + \frac{h^2}{6} y_i^{VI} + \frac{h^4}{80} y_i^{VIII} \tag{7c}$$

Din relațiile 7 *a*—7 *d* se observă pe de o parte că derivatele succesive sînt exprimate prin diferențe finite cu o eroare $O(h^2)$, iar pe de altă parte, pentru aproximarea derivatei de ordinul (m) se folosesc $(m + 1)$ puncte.

În scopul obținerii unei mai mari precizii în exprimarea derivatelor prin diferențe finite în raport cu punctele învecinate, fără a mări numărul acestora peste cinci (ecuația diferențială a vibrației transversale a barei fiind de ordinul IV), este necesar a se exprima derivatele succesive în funcție de ordonatele a maximum cinci puncte și derivatele lor. Pentru aceasta, dezvoltînd în serie Taylor derivata întîia și a doua a funcției y se obțin relațiile:

$$\frac{y_{i+1}' - 2y_i' + y_{i-1}'}{h^2} \approx y_i'' + \frac{h^2}{12} \cdot y_i^{IV} + \frac{h^4}{360} y_i^{VIII} \tag{8a}$$

$$\frac{y_i'' - 2y_i'' + y_{i-i}''}{h^2} \approx y_i^{IV} + \frac{h^2}{12} \cdot y_i^{VI} + \frac{h^4}{360} y_i^{VIII} \tag{8b}$$

În scopul obținerii de resturi $O(h^4)$, iar nu $O(h^2)$, se elimină y_i''' între ecuațiile 7 *a* și 8 *a* și y^{IV} între ecuațiile 7 *b* și 8 *b*, de unde rezultă:

$$y_i' \approx \frac{y_{i-1} - y_{i-1}}{2h} + O'(h^2) = \frac{y_{i+1}' + 4y_i' + y_{i-1}'}{6} + O'(h^4) \tag{9a}$$

$$y_i'' \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i-i}}{h^2} + O''(h^2) = \frac{y_{i+1}'' + 10y_i'' + y_{i-1}''}{12} + O''(h^6) \tag{9b}$$

Deasemenea, analog relațiilor (8 *a*) și (8 *b*) există și relațiilor (8*c*) și (8*d*), care exprimă dezvoltarea derivatelor de ordinul trei și patru.

$$\frac{y'''_{i+1} - y'''_i + y'''_{i-1}}{h^2} \approx y^V_i + \frac{h^2}{12} y^{VIII}_i + \frac{h^4}{360} y^{IX}_i \tag{8c}$$

$$\frac{y^{IV}_{i-1} - 2y^{IV}_i + y^{IV}_{i-1}}{h^2} \approx y^{VI}_i + \frac{h^2}{12} y^{VII}_i + \frac{h^4}{360} y^X_i \tag{8d}$$

Prin eliminarea derivatei y^V_i între relațiile (7*c*) și (8*c*) și a derivatei y^{VI} între relațiile (7*d*) și (8*d*) se obține

$$y'''_i \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i-1} + 2y_{i+1} - y_{i-2}}{2h^3} + O^{III}(h^2) =$$

$$\frac{y^{III}_{i-1} + 2y^{III}_i + y^{III}_{i-1}}{4} + O'''(h^7) \tag{9c}$$

$$y^{IV}_i \approx \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} + O^{IV}(h^2) =$$

$$= \frac{y^{IV}_{i+1} + 4y^{IV}_i + y^{IV}_{i-1}}{6} + O^{IV}(h^8) \tag{9d}$$

4. Cu ajutorul relațiilor 9*a* — 9*d*, care reprezintă derivatele succesive în funcție de diferențe finite, în urma unor transformări succesive, ecuația diferențială (3″) se reduce la ecuația cu diferențe finite (10)

$$6\left(1 + \frac{l}{n}\cdot\frac{f'}{f}\right) y_{i+2} + \left[-24 - 12\frac{l}{n}\frac{f'}{f} + 6\frac{l^2}{n^2}\cdot\frac{f''}{f} - k\left(\frac{\varphi}{f}\right)_{i+1}\right] y_{i+1} +$$

$$+ \left[36 - 12\frac{l^2}{n^2}\cdot\frac{f''}{f} - 4k\left(\frac{\varphi}{f}\right)\right] y_i +$$

$$+ \left[-24 + 12\frac{l}{n}\frac{f'}{f} + 6\frac{l^2}{n^2}\cdot\frac{f''}{f} - k\left(\frac{\varphi}{f}\right)_{i-1}\right] y_{i-1} +$$

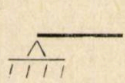
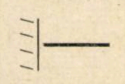
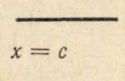
$$+ 6\left(1 - \frac{l}{n}\cdot\frac{f'}{f}\right) y_{i-2} + O(h^4) = 0 \tag{10}$$

Această ecuație cu diferențe finite (10) poate fi aplicată la calcularea frecvențelor vibrațiilor barelor cu secțiuni variabile, ale căror secțiuni și momente de inerție transversale variază în lungul secțiunii. Se va admite că raportul $\frac{\varphi}{f}$ în punctele $(i-1)$, i, $(i+1)$, sînt apropiate; acest lucru este cu atît mai just cu cît numărul intervalelor este mai mare.

5. O imoprtanță deosebită în soluționarea diverselor probleme practice o au condițiile de capăt pe care le pot avea diversele bare (încas-

trate, libere, simplu rezemate, care deasemenea trebuie exprimate în diferențe fiinte. Notînd cu c capătul barei, ecuațiile cu diferențe finite corespunzătoare diferitelor condiții de capăt, au fost deduse și sînt centralizate în tabelul 1.

Tabelul 1

Mod de prindere	Schema	Condiții de contur	Condiții suplimentare în ecuația cu diferențe finite
Capăt simplu rezemat — săgeata și momentul încovoietor nule	 $x = c$	$(y)_{x=c} = 0$ $(y'')_{x=c} = 0$	$y_c = 0$ $y_{c+1} = -y_{c-1}$
Capăt încastrat — săgeată nulă — coeficientul unghiular al liniei elastice nul	 $x = c$	$(y)_{x=c} = 0$ $(y')_{x=c} = 0$	$y_c = 0$ $y_{c+1} = y_{c-1}$
Capăt liber — moment încovoietor și forța tăietoare nule	 $x = c$	$(y'')_{x=c} = 0$ $(y''')_{x=c} = 0$	$y_{c+2} - 2y_{c+1} + 2y_{c-1} - y_{c-2} = 0$ $y_{c+1} - y_c + y_{c-1} = 0$

Valorile indicate în tabel vor fi folosite în aplicațiile care urmează.

6. Determinarea frecvenței vibrațiilor, se face pornind de la ecuația de bază (10) în care se neglijează termenii $O(h^4)$. Aceasta poate fi scrisă sub forma simbolică

$$B_{n,i} \cdot y_{i-2} + B_{n,i} \cdot y_{i-1} + C_{n,i} \cdot y_i + D_{n,i} \cdot y_i + E_{n,i} \cdot y_{i+2} = 0 \qquad (10')$$

unde coeficienții A—E care depind de numărul intervalelor n și de punctul P_i, în care se scrie ecuația.

$$A_{n,i} = 1 - \frac{l}{n} \cdot \frac{f'}{f}; \quad B_{n,i} = -4 + 2\frac{l}{n} \cdot \frac{f'}{f} + \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{f''}{f} - \frac{k}{6}\left(\frac{\varphi}{f}\right)$$

$$C_{n,i} = 6 - 2\frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{f''}{f} - \frac{2}{3}k\left(\frac{\varphi}{f}\right);$$

$$D_{n,i} = -4 - 2\frac{l}{n} \cdot \frac{f'}{f} + \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{f''}{f} - \frac{k}{6}\left(\frac{\varphi}{f}\right); \qquad (11)$$

$$E_{n,i} = 1 + \frac{l}{n} \cdot \frac{f'}{f}$$

Scriind ecuațiile (10′) în diferitele puncte ale intervalelor și ținînd seama de condițiile de capăt, se obține o ecuație de gradul n în k, din a cărei rezolvare se vor obține rădăcinele $k_1, k_2 \ldots\ldots k_n$. Cu ajutorul acestor rădăcini se pot determina frecvențele diferitelor moduri de vibrații. O rădăcină k a ecuației fiind determinată, din relația (5) rezultă frecvența

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{n^2 \sqrt{k_i}}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EgI_0}{\gamma A_0}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\nu^2}{l^2} \sqrt{\frac{EgI_0}{\gamma A_0}} \tag{12}$$

unde coeficientul de frecvență ν_i, corespunzător aproximației n în raport de rădăcina k_i este dat de relația

$$\nu_i = n \sqrt[4]{k_i} \tag{13}$$

7. *Aplicații*

7.1. Să considerăm cazul unei bare de secțiune variabilă, încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt. Ținînd seama de condițiile de capăt $y_{-1} = 0$; $y_{-2} = y_0$; $y_1 = 2y_0$; $y_2 = 5y_0$, ecuația cu diferențe finite (10′) scrisă pentru punctul corespunzător extremității barei, devine

$$A_1 + C_1 + 2D_1 + 5E_1 = 0 \tag{10′}$$

Înlocuind $n = 1$ în expresiile lui A_1, C_1, D_1, E_1 se obține

$$k_1 = 4\left(\frac{f}{\varphi}\right)_1$$

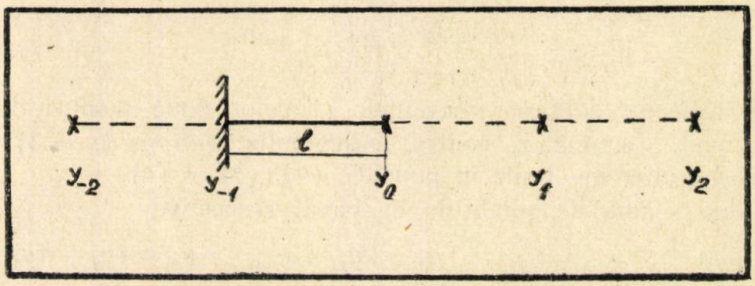


Fig. 2.

Pentru aproximația a doua ($n = 2$), se iau două intervale egale, de mărime $l/2$ și se scriu ecuațiile cu diferențe finite în punctele (a) și (b): pentru punctul (b)

$$A_b \cdot y_{-2} + B_b \cdot y_1 + C_b \cdot y_0 + D_b \cdot y_1 + E_b \cdot y_2 = 0$$

pentru punctul (a)

$$A_a \cdot y_{-1} + B_a \cdot y_0 + C_a \cdot y_1 + D_a \cdot y_2 + E_a \cdot y_3 = 0$$

Ținînd seama de condițiile de capăt corespunzătoare

$$y_{-1} = 0\,; \qquad y_{-2} = y_0\,; \qquad y_2 = 2y_1 - y_0\,;$$

$$y_3 = 2y_2 - 2y_0 + y_1 = 4y_1 - 4y_0\,,$$

sistemul de ecuații (14) se reduce la sistemul omogen

$$(A_b + C_b - E_b)\,y_0 + (D_b + 2E_b)\,y_1 = 0$$

$$(B_a - D_a - 4E_a)\,y_0 + (C_a + 2D_a + 4E_a)\,y_1 = 0$$

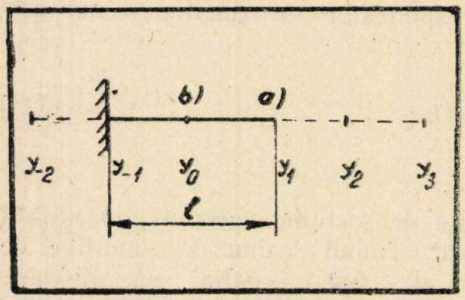


Fig. 3.

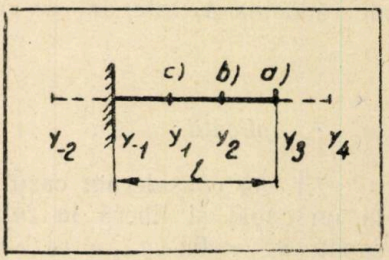


Fig. 4.

Prin transformări succesive a determinantului sistemului care trebuie să fie nul, se obține ecuația de gradul doi în k:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\varphi}{f}\right)_a\cdot\left(\frac{\varphi}{f}\right)_b k^2 - \left\{\left(\frac{\varphi}{f}\right)_a\cdot\left[6 - l\left(\frac{f'}{f}\right)_b - \frac{l^2}{2}\left(\frac{f''}{f}\right)_b\right] + 2\left(\frac{\varphi}{f}\right)_b\right\} k +$$

$$+ 4 - 2l\left(\frac{f'}{f}\right)_b = 0 \qquad (15)$$

a cărei rădăcini definesc frecvențele primelor două moduri de vibrații.

În mod asemănător, pentru aproximația a treia ($n = 3$), se scriu ecuațiile cu diferențe finite în punctele (a), (b) și (c).

Ținînd seama de condițiile de capăt respective

$$y_{-1} = 0\,; \qquad y_{-2} = y_0\,; \qquad y_3 = 2y_2 - y_1\,; \qquad y_4 = 4y_2 - 4y_1 + y_0\,,$$

se obține un sistem de ecuații omogen în y_0, y_1, y_2 a cărui determinant caracteristic Δ_3 trebuie să fie nul. Se obține în felul acesta ecuația de gradul trei în k,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 - k\left(\frac{\varphi}{f}\right)_a & -4 & 2 \\ L & M & N \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

unde

$$L=-2+\frac{l^2}{9}\left(\frac{f''}{f}\right)_b-\frac{k}{6}\left(\frac{\varphi}{f}\right)_b;\quad P=1+\frac{l}{3}\left(\frac{f'}{f}\right)_c$$

$$M=5-\frac{l}{3}\left(\frac{f'}{f}\right)_b-2\frac{l^2}{9}\left(\frac{f''}{f}\right)_b-\frac{2}{3}k\left(\frac{\varphi}{f}\right)_b$$

$$N=-4+2\frac{l}{3}\left(\frac{f'}{f}\right)_b+\frac{l^2}{9}\left(\frac{f''}{f}\right)_b-\frac{k}{6}\left(\frac{\varphi}{f}\right)_b$$

$$Q=-4-\frac{2}{3}l\left(\frac{f'}{f}\right)_c+\frac{l^2}{9}\left(\frac{f''}{f}\right)_c-\frac{k}{6}\left(\frac{\varphi}{f}\right)_c$$

$$R=7-\frac{l}{3}\left(\frac{f'}{f}\right)_c=-2\frac{l^2}{9}\left(\frac{f''}{f}\right)_c-\frac{2}{3}k\left(\frac{\varphi}{f}\right)_c$$

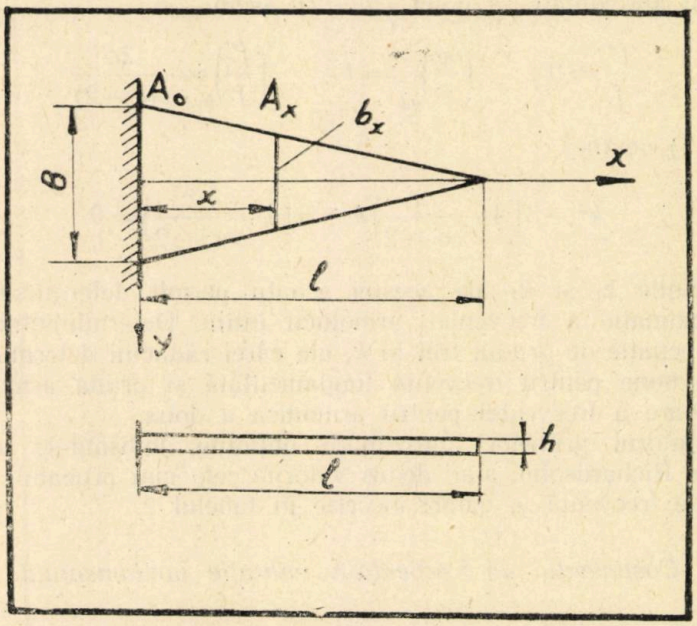


Fig. 5.

din care se deduc valorile primelor trei moduri de vibrații, corespunzătoare rădăcinilor k_1, k_2, k_3 ale ecuației $\Delta_3 = 0$.

7.2. Să aplicăm rezultatele de mai sus în cazul concret al unei pene triunghiulare (fig. 5), a cărei secțiune și momente de inerție variază după legile de mai jos [7]

$$A_x=a\left(1-c\frac{x}{l}\right)$$

$$I_x=b\left(1-c\frac{x}{l}\right)$$

În acest caz, conform notațiilor admise, avem :

$$A_0 = \alpha\,; \qquad I_0 = b\,; \qquad \frac{A}{A_0} = \frac{I}{I_0} = 1 - c\frac{x}{l} = f = \varphi\,.$$

$$\frac{\varphi}{f} = 1\,; \qquad \frac{f'}{f} = \frac{c}{cx - l}\,; \qquad \frac{f''}{f} = 0$$

Prima aproximație dă

$$k_1 = 4\left(\frac{f}{\varphi}\right) = 4\,; \qquad \nu_1 = n\sqrt{k_1} = \sqrt{2}$$

Pentru aproximația a doua ($n = 2$) avem

$$\frac{f''}{f} = 0\,; \qquad \left(\frac{\varphi}{f}\right)_{a,b} = 1\,; \qquad \left(\frac{f'}{f}\right)_b = \frac{2c}{l(c-2)}$$

ecuația (15) devine

$$k^2 - 3\left(4 - \frac{c}{c-2}\right)k + 6\left(1 - \frac{c}{c-2}\right) = 0$$

Rădăcinile k_1 și k_2 ale acestei ecuații permit determinarea, într-a doua aproximație a frecvenței, armonicii întîia. Determinantul Δ_3, conduce la o ecuație de gradul trei în k, ale cărei rădăcini determină aproximații mai bune pentru frecvența fundamentală și prima armonică și o primă valoare a frecvenței pentru armonica a doua.

Cu ajutorul primelor aproximații obținute, folosind-se metoda de extrapolare Richardsohn, s-au dedus valorile cele mai probabile ale coeficientului de frecvență ν, valori înscrise în tabelul 2.

Coeficientul de frecvență ν, vibrație fundamentală

Tabelul 2

Aproximații c	$n=1$	$n=2$	$n=3$	Valori extrapolare $\nu_{1/1}$	Valori extrapolare $\nu_{3/2}$	Valori extrapolare $\nu_{3/2/1}$	Valori Timoșenko
0	2	1,7006	1,7878	1,71970	1,85756	1,8652	1,875
0,2	2	1,7351	1,8369	1,8420	1,91834	1,92787	—
0,4	2	1,7733	1,8875	1,89299	1,95654	1,98959	2,02
0,6	2	1,8161	1,9685	1,9500	2,0904	2,1078	2,12
0,8	2	1,8645	2,0575	2,01459	2,21155	2,2366	2,32
1	2	1,9192	2,1983	2,08752	2,42158	2,4630	2,68

Cu ajutorul metodei diferențelor finite se obțin pentru primele două armonice coeficienții de frecvență aproximativi ν dați de tabelul 3.

Tabelul 3

c	armonica 1-a			Armonica 2-a pentru $n=3$
	pentru $n=2$	pentru $n=3$	valori extrapolare	
0	3,6813	4,0909	4.41858	8,181
0,2	3,7042	4,1206	4,45372	8,192
0,4	3,7325	4,1730	4,5254	8.203
0,6	3,7685	4,1047	4,5356	8,234
0,8	3,8117	4,2578	4,6146	8,272
1,0	3,8791	4,2877	4,6510	8,358

7.3. Un alt exemplu interesant se referă la vibrația unei bare de profil exponențial, încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt (fig. 6). Astfel de bare cu secțiune circulară se folosesc drept concentratori de ultrasunete.

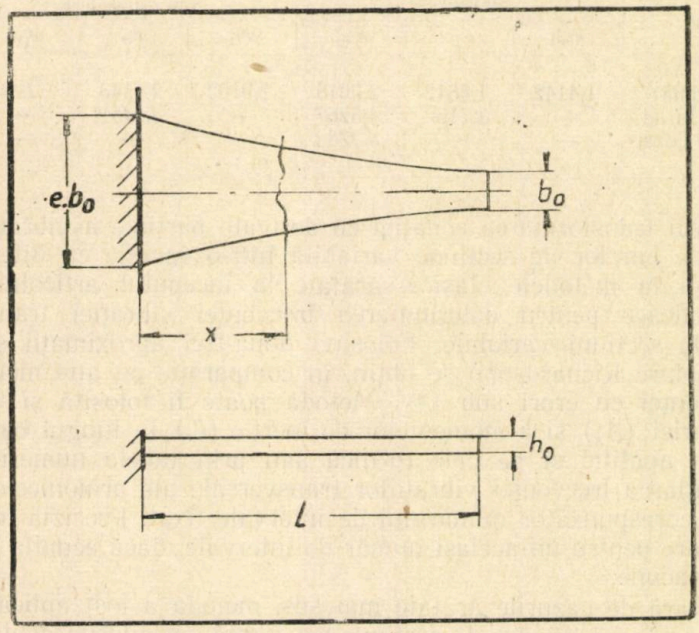


Fig. 6.

În acest caz avem relațiile:

$$A_x = A_0 \cdot e^{1-\frac{x}{l}} = A_0 \cdot \varphi \; ; \qquad I_x = I_0 \cdot e^{1-\frac{x}{l}} = I_0 \cdot f$$

$$\frac{\varphi}{f} = 1 \; ; \qquad \frac{f'}{f} = -\frac{1}{l} \; ; \qquad \frac{f''}{f} = \frac{1}{l^2}$$

Pentru prima aproximație $n = 1$ se obține $k_1 = 4 \left(\frac{\varphi}{f}\right) = 4$ de

unde $I_1 = \sqrt{k_1} \approx 1{,}4142$. Pentru aproximația a doua ($n = 2$) avem $\left(\frac{\varphi}{f}\right)_a = \left(\frac{\varphi}{f}\right) = 1$; $\left(\frac{f'}{f}\right)_b = -\frac{1}{l}$; $\left(\frac{f''}{f}\right)_b = \frac{1}{l^2}$ și ecuația în k (15′) devine $4k^2 - 51\,k + 36 = 0$ cu rădăcinile $k_1 = \frac{3}{4}$ și $k_2 = 12$. Aceste rădăcini dau coeficienții de frecvență respectivi $\nu_1 = 2 \cdot \sqrt[4]{3/4} \approx 1{,}8612$ și $\nu_2 = 2 \cdot \sqrt[4]{12} \approx 3{,}716$. Aproximația a treia conduce la o ecuație de gradul trei în k cu rădăcinile $k_1 = 0{,}5948$; $k_2 = 13{,}4637$; $k_3 = 57{,}5415$.

În tabelul 3 au fost centralizate valorile ce se obțin pentru coeficienții de frecvență ν corespunzătoare vibrației fundamentale și primelor două armonice.

Tabelul 3

Vibrația	Aproximații			Valori ale lui ν prin extrapolare			Valori calculate în [8]
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$\nu^3/_1$	$\nu^3/_2$	$\nu^3/_{3/1}$	
Fundamentală	1,4142	1,8612	2,0018	2,0102	2,1143	*2,1273*	2,12
Armonica întîia	—	3,716	4,3267	—	*4,8152*	—	4,97
Armonic a doua	—	—	*6,2782*	—	—	—	—

8. Prin transformarea ecuației cu derivate parțiale a vibrațiilor transversale ale barelor de secțiune variabilă într-o ecuație cu diferențe finite se adaugă la metodele clasice, arătate la începutul articolului, încă o metodă eficace pentru determinarea frecvenței vibrației transversale a barelor de secțiuni variabile. Folosind două-trei aproximații și metodele de extrapolare Richardsohn se obțin, în comparație cu alte metode, valori ale frecvenței cu erori sub 1%. Metoda poate fi folosită și atunci cînd variația ariei (A_x) și a momentelor de inerție (I_x) în lungul barei, nu sînt cunoscute analitic ci pe cale grafică sau prin tabele numerice. Metoda permite aflarea frecvenței vibrațiilor transversale ale armonicelor de ordin superior, corespunzător numărului de intervale fixat. Precizia metodei este și mai mare pentru un același număr de intervale, dacă ecuația diferențială prezintă lacune.

În afară de cazurile arătate mai sus, metoda a fost aplicată cu bune rezultate în cazul barelor de secțiune constantă, cu diferite moduri de prindere, coșuri de fabrică etc.

Institutul Politehnic București
Catedra de Mecanică Teoretică

BIBLIOGRAFIE

[1] *Kirchhoff G.:* Monatsberichte, p. 815 (1879).
[2] *Mononobe N.:* Die Eigenschwingungen eingespanter Stäbe von veränderlichem Querschnitt, Z.A.MM., Bd. 1—1921.

[3] *Dr. Hort:* Berechnung der Eigentöne mit gleichförmiger, insbesondore verjüngster stäbe, Z. für T. Physik II, 1925, pag. 181.
[4] *Schwerin E.:* Über transversal schwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitte, z. für T. Physik, 1927.
[5] *L. Kolaț:* Cislennîe metodî reseniia diferențialnîh uravnenii, Moscova 1953.
[6] *M. Soare:* Aplicarea metodei plurilocale la calculul plăcilor subțiri. Studii și cercetări de mecanică aplicată XI 1, (1960).
[7] *Timoșenko:* Théorie des vibrations, 1947, p. 391.
[8] *Eduard Suppiger:* Z.A.M.P., VII.6.1956.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ ВИБРАЦИЙ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

(Краткое содержание)

Путём преобразования уравнения поперечных колебаний, стержней переменного сечения (1), в дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами (3'), и затем в уравнение в конечных разностях (10) в зависимости от пяти примыкающих точек, поулчается еще один приблеженный но эффективный метод для определений поперечных колебаний такого рода стержней.

Закон изменения площади A_x и момента инерции 1_x можно (выразить аналитически (4) графически, или в виде таблиц.

Применение два-три приближения и способа экстраполяции получаются, по сравнению с другими методами погрешности ниже 1—2%. Точность метода значительно больше если дифференциальное. уравнение представляет недостатки, а также даёт возможность приближённого определения частоты гармонических колебаний любого порядка.

Метод был применен с хорошими результатами к стержням с экспонениуиальными профилеями (употребленными в качестве сосредочителей ультразвуков), шпонки фабричные трубы и. т. д.

THE APPROXIMATIVE DETERMINATION OF FREQUENCIES OFF TRANSVERSAL VIBRATIONS OF BARS WITH VARIABLE SECTION BY THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES EQUATION

(Summary)

A approximative but effective new method is given in this paper, which gives the transversal vibrations of bars with variable section.

The method consists of the transformation of the equation (1) for transversal vibrations of these bars into a differential equation of 4 th degree

with variable coefficients (3′) and afterwards into an equation with finite differences (10 function of five adjacent points.

The law of variation of the area A_x of the transversal section and of its moment of inertia I_x can be expressed analitically by the equation (4), grafically, or by tables. Employing two or three aproximations and extrapolation methods errors under 1%—2%, are obtained, in comparison to other methods. The precision of the methods is greater if the differential equation is incomplete and permits also the approximative determination of the frequences of harmonic vibrations of superior order. This method has been applied to bars with exponential profile, employed as velocity transformer to ultrasonic instruments, wedges etc.

DETERMINATION APPROXIMATIVE DES FREQVENCES DES VIBRATIONS TRANSVERSALES DES BARRES A SECTION VARIABLE PAR LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

(Résumé)

En transformant l'équation des vibrations transversales d'une verge à section variable (1), dans une équation differentielle du quatrième degrée (3′) à coefficients variables, et par la suite dans une équation aux differences finies (10), en fonctions de cinq points adiacents, on ajoute ainsi encore une méthode approximative mais efficace, pour la determination des freqvences des vibrations transversales des verges à section variable. La loi de la variation de l'aire de la verge (A_x), et du moment d'inertie I_x peut être exprimée analytiquement (4), graphiquement, ou même par des tableaux.

En utilisant deux—trois approximations et les methodes d'exrapolations on obtient par rapport à d'autres méthodes de calcul des erreurs qui ne depassent pas 1% à 2%. La précision obtenue est de beaucoup plus grande si l'équation aux differences finies presente de lacunes. La méthode permet aussi la déterminations approximative des frequences des vibrations transversales de n'importe quelle harmonique.

La méthode à été appliquée aux verges à section exponentielle emppolyée comme concentrateurs des ultrasons, des coins, des cheminées d'usines, etc.

DIE BENÜTZUNG DER METHODE MIT ENDLICHEN DIFFERENZEN FÜR DIE UMGEFÄHR GENAU BESTIMMUNG DER TRANSVERSALEN SCHWINGUNGGEN VON STÄBE MIT VERÄNDLICHEN SCHNITT

(Zusammenfassung)

Durch Umwandlung der Gleichung der transversalen Schwingungen für Stäbe mit verändlichen Schnitt (1), im lineare Differentialgleichung 4-ten Grades mit veränderlicher Koeffizienten (3′) und dann in eine

Gleichung mit endlichen Differenzen (10), in Abhängigkeit von 5 adiazenten Punkten, erhält man eine neue umgefährgenaue, aber wirksame Methode für die Bestimmung der transversalen Schwingungen von solchen Stäben. Das Variations-gesetz der Fläche A_x und des Trägheitesmoments I_x kann analytisch (4), graphisch oder durch Tabellen ausgedrückt werden.

Durch 2—3 Annährungen und Extrapolation methoden erhält man in Vergleich mit anderen Methoden Fehler unter 1% bis 2%.

Die Genauigkeit der Methode ist viel grösser wenn die Differentialgleighung nicht vollständig ist. Ausserdem kann man durch diese Methode die Schwingungs-frequenzen von Oberwellen von beliebiger Ordnung bestimmen.

Unsere Methode wurde mit guten Resultaten auf Stäben mit exponentiallen Profil (welche als Konzentratoren von Ultraschall benützt wurden), Keile, Fabrikskamine augewendet etc.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 3

CONTRIBUȚII LA PROBLEMA REDUCERII ZGOMOTULUI ȘI VIBRAȚIILOR ÎN FILATURI *

AURELIAN STAN, RADU VOINEA

1. Mașinile textile, din filaturi, țesăturii și din industria tricotajelor au o durată de serviciu relativ mare, care depășește 50 de ani. Datorită acestui fapt uzura lor morală este mai mare decît a mașinilor din alte sectoare industriale. Uneori apare necesitatea folosirii unui utilaj mai vechi, dar recondiționat, modernizat, care să permită astfel o mărire a productivității. Pentru laminoare, flyere, ringuri etc., îmbunătățirea transmisiilor, modernizarea acționării fuselor și a mosoarelor la flyere, duce la mărirea vitezei acestora deci la o creștere a randamentului.

Dar atît mărirea vitezelor de lucru a mașinilor textile cît și folosirea în continuare a unor mașini care au fost modernizate pun o problemă foarte importantă, anume problema reducerii zgomotului și vibrațiilor produse de aceste mașini.

Problema reducerii nivelului intensității zgomotului și a trepidațiilor în industria textilă prezintă și o deosebită importanță economică și socială, deoarece aceasta are repercusiuni directe asupra productivității muncii, căci este știut că zgomotul are și un rol deosebit de important în geneza oboselii și a surmenajului.

În afară de efectul pe care zgomotul îl are asupra productivității muncii, zgomotul poate produce, dacă nivelul intensității lui depășește anumite limite, afecțiuni ale organului auditiv, afecțiuni ale diverselor organe și aparate ale corpului omenesc și o reducere a inteligibilității vorbirii.

2. Problema combaterii zgomotului în filaturi este o problemă complexă, deoarece sursele de zgomot sînt multiple și variate, halele în care sînt instalate mașinile sînt foarte mari, iar de multe ori mașinile pot fi de diferite categorii, tipuri și grade de uzură. În plus nu este posibil să se aducă o contribuție eficientă în acest domeniu mai puțin cercetat, fără a efectua măsurări obiective ale situației concrete a diferitelor mașini și locuri de muncă, pentru a putea cunoaște eficacitatea soluțiilor adoptate. În cercetarea efectuată s-a urmărit să se determine:

a) nivelul de intensitate acustică și nivelul de tărie a zgomotului produs de diferitele mașini aflate în filaturi;

* Comunicare prezentată la a VII-a sesiune științifică a cadrelor didactice din I.P.B. 7—8 aprilie 1962.

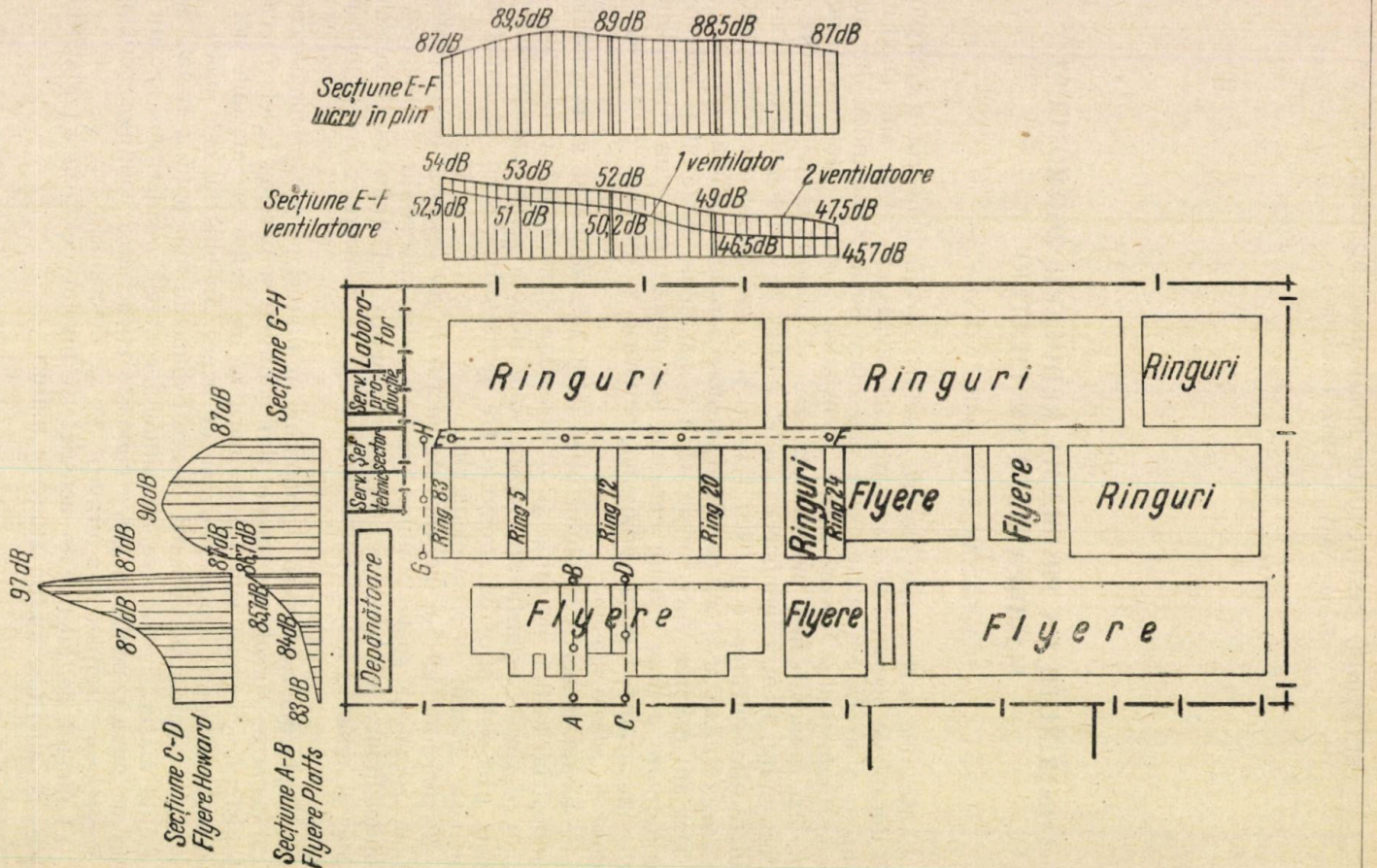


Fig. 1. Planul halei și variația nivelului de intensitate a zgomotului.

b) spectrul de frecvențe produs de către mașinile cele mai zgomotoase din filaturi (flyere, ringuri) și ventilatoare;

c) variația nivelului de intensitate acustică în diferitele părți ale halei de lucru (culuare) sau în lungul diferitelor mașini (flyere, ringuri etc.);

d) variația, în funcție de timp, a nivelului de intensitate acustică;

e) reducerea nivelului de intensitate sonoră obținută prin aplicarea la mașinile existente a unor măsuri constructive;

f) stabilirea unor măsuri de reducere a nivelului de intensitate a zgomotului și vibrațiilor care ar sta la baza definitivării proiectelor ce se întocmesc și care ar avea de scop îmbunătățirea condițiilor de lucru în filaturi. Aceste măsuri se referă atît la combaterea transmiterii zgomotului pe cale aeriană cît și la transmiterea acestuia prin conducție solidă.

3. Determinările obiective s-au referit, atît la nivelul global al intensității zgomotului, cît și la spectrul de frecvențe. La determinarea nivelului global maxim absolut al intensității zgomotului s-a folosit un fonometru. Pentru spectrul de frecvențe s-a făcut o înregistrare a zgomotului pe bandă de magnetofon, după care s-a efectuat analiza acestuia la un analizor de frecvențe cu lărgimi de bandă de 1/3 octavă. Au fost alese diferite locuri de măsurare, unele în imediată vecinătate a surselor de zgomot, altele în pozițiile de lucru a muncitorilor, pe culuare de circulație, în birourile conducătorilor de sectoare de producție etc.

4. *Rezultate obținute*

Cele mai zgomotoase surse din filaturi sînt flyerele și ringurile. Nivelul global de intensitate produsă de flyere variază dealungul acestuia, nivelul maxim (90—92 dB) fiind în dreptul cutiei cu angrenaje. Ringurile ating de asemenea un nivel de intensitate ridicat (92—94 dB), maximum nivelului, fiind pe axul de simetrie al acestuia.

Ventilatoarele, funcționînd singure, produc pe culuare un nivel de intensitate de 45—52 dB, nivel ce variază în lungul conductelor de aspirație.

Funcționarea tuturor mașinilor din hală face să crească, pe culuare nivelul global al zgomotului ventilatoarelor de la 45—52 dB la 86—89 dB (Fig. 1).

În ceea ce privește spectrele de frecvențe, se constată că la flyere predomină componentele de frecvență mijlocie (între 350—800 Hz) și înaltă (peste 800 Hz), cu o componentă maximă în jurul frecvenței de 1500—2000 Hz, (fig. 2) în timp ce la ventilatoare predomină componentele de joasă frecvență (fig. 3).

În timp, nivelul de intensitate acustică este constant datorită multitudinii surselor de zgomot care acționează aproape permanent.

Comparativ cu spectrul de frecvențe al zgomotului produs de flyer, spectrul produs de ringuri este asemănător; însă acțiunea dăunătoare a ringului este superioară aceleia produsă de flyer (fig. 4).

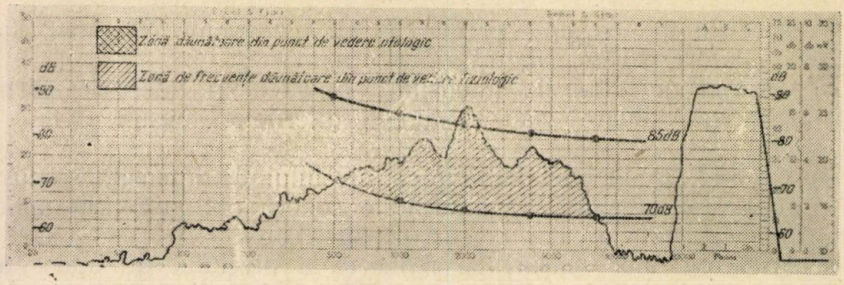


Fig. 2. Spectrul de frecvență produs de un flyer (flyer 64).

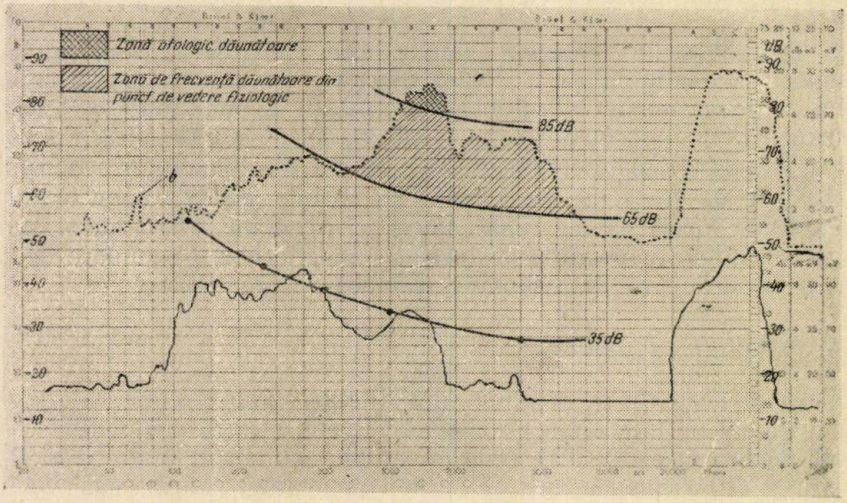


Fig. 3. Spectre de frecvență pentru ventilatoare (a) și pentru cazul funcționării concomitente a unui flyer (203) și a ventilatoarelor.

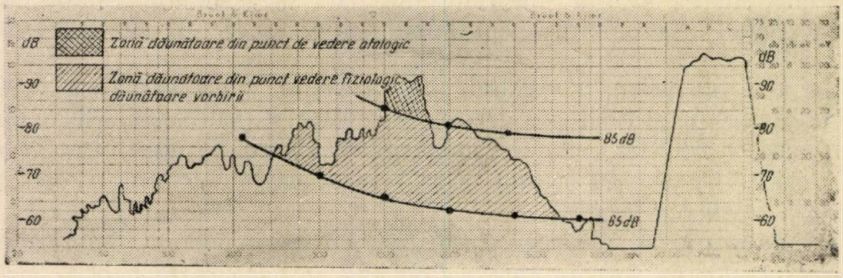


Fig. 4. Spectrul de frecvență produs de un ring (ring 83).

Pentru a vedea efectele dăunătoare produse de zgomot asupra organismului omenesc au fost trasate pe diagramele de frecvență curbele ISO[1] de egală tărie, care arată efectul dăunător produs de zgomot, în funcție de diferitele frecvențe (fig. 5).

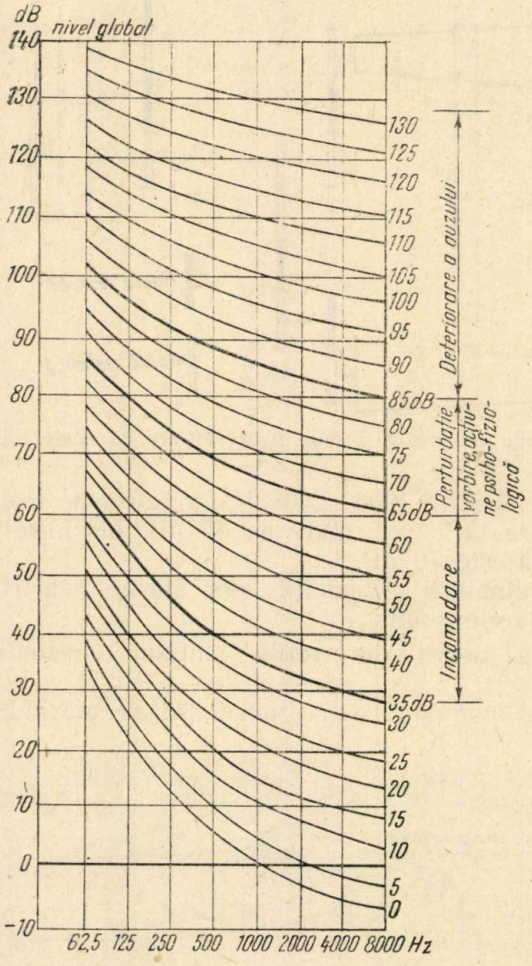


Fig. 5. Curbe ISO de egală tărie.

Din aceste curbe rezultă că dacă nivelul de intensitate este cuprins între 35—65 dB, aceasta are o acțiune psihologică asupra individului, producîndu-i o incomodare.

[1] Curbe propuse a fi standardizate pe plan internațional de către organizația internațională de standarde.

Pentru nivelele de intensitate cuprinse între 65—85 dB se produce o perturbare a vorbirii și o acțiune psiho-fiziologică, iar dacă nivelul depășește 85 dB, se produce chiar o deteriorare a auzului.

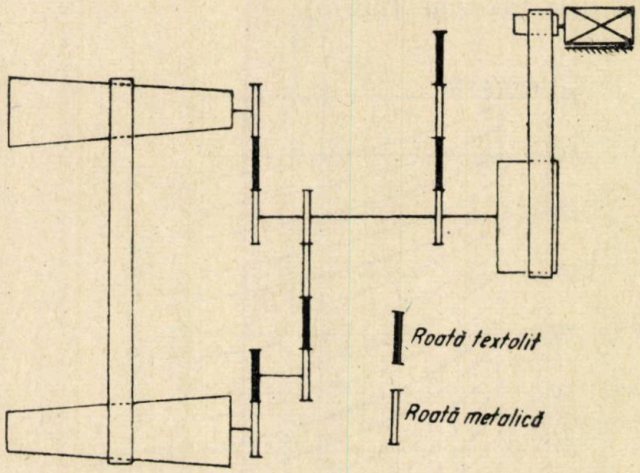


Fig. 6. Schema cinematică a unui flyer Howard cu unele roți de textolit.

Se constată că între 1000—2000 Hz, spectrul de frecvență a flyerului arată un nivel de tărie mai mare ca 85 dB, iar între 500 și 5000 Hz un nivel ce depășește 70 dB.

În vederea stabilirii eficacității unor măsuri constructive s-au experimentat următoarele soluții:

— înlocuirea unora din roțile lanțului cinematic cu roți din textolit (fig. 6)

— ecranarea anumitor părți zgomotoase ale mașinilor

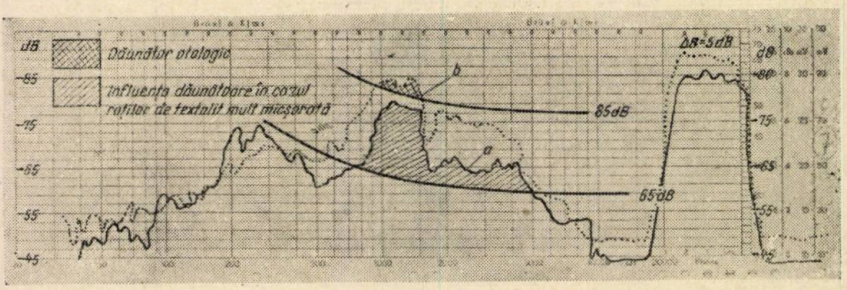


Fig. 7. Spectre de frecvență pentru un flyer cu roți de textolit (a) și cu roți metalice (b).

În figura 7, se prezintă comparativ spectrul de frecvențe al zgomotului produs de un același flyer în cazul că se folosesc sau nu roți de textolit. Se constată o scădere a nivelului global cu 5—6 dB și o scădere

a nivelului de intensitate la frecvențele înalte concomitent cu o ușoară creștere a frecvențelor joase. Acestea din urmă sînt însă mai ușor de suportat.

Ecranarea cutiei angrenajului unui flyer cu o serie de plăci de fibrolemn arată o scădere a nivelului global cu 3—4 dB și o deplasare a spec-

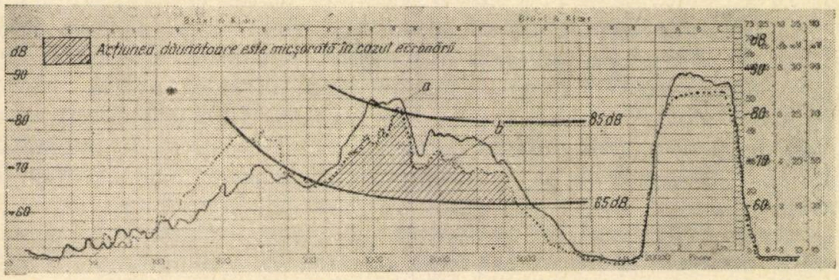


Fig. 8. Spectre de frecvență pentru un flyer cu roți metalice, neecranat (a) și ecranat cu material fibrolemnos (b).

trului către domeniul frecvențelor joase, așa cum se arată în fig. 8. În realitate la o ecranare mai îngrijită se obține o scădere și mai mare a nivelului global.

5. *Concluzii*

Nivelul global de intensitate acustică existent, este ridicat depășind nivelul global de 85 dB, nivel care, după indicațiile date de curbele ISO, produce acțiuni dăunătoare din punct de vedere otologic. De asemenea în birourile din imediata vecinătate a halelor de lucru nivelul global depășește nivelul admisibil.

Din analiza spectrală rezultă că nivelul de intensitate maximă se află în zona 1000—2000 Hz, ceea ce corespunde zonei de sensibilitate maximă a urechii, de unde și senzația neplăcută pe care o au cei expuși în mediu zgomotos din filaturi.

Experiențele efectuate arată că folosirea roților de textolit, sau din alte materiale analoage, în locul unor roți metalice, ecranarea și carcasarea angrenajului este o cale eficace pentru reducerea nivelului de intensitate a zgomotului. Din datele obținute pe baza măsurărilor efectuate a rezultat prin folosirea roților de textolit o reducere de 4—5 dB care la prima vedere pare mică față de 90 dB nivelul global în locurile cele mai zgomotoase. Nu trebuie uitat însă că scara nivelului de intensitate este o scară logaritmică și că urechea omenească este foarte sensibilă, putînd percepe o variație a nivelului de intensitate de 1—1,5 dB.

O reducere a nivelului sonor cu 10 dB, înseamnă de fapt o reducere a tăriei zgomotelor la jumătate.

6. *Propuneri*

Ca urmare a măsurărilor efectuate și a interpretării rezultatelor, se arată mai jos o serie de propuneri, unele de natură locală specifice intreprinderii cercetate și altele care se referă la organizarea intreprinderilor textile în general.

a) O dată cu revizia generală a mașinilor textile (flyere, ringuri, laminoare, războaie de țesut etc.) să se verifice comparativ, pe cale obiectivă și nivelul de intensitate acustică a acestora, măsurate în condiții comparative, cu acelea avute înainte ca mașina să fi intrat în revizie.

b) Este indicat să fie scoase din aceeași hală de lucru mașinile zgomotoase, pentru a nu supune pe muncitori la un nivel de intensitate de zgomot mai ridicat decît al mașinii cu care lucrează (de exemplu depănătoarele trebuiesc scoase din hala flyerelor și ringurilor).

c) Asupra transmiterii zgomotului pe cale aeriană este posibil să se aducă îmbunătățiri prin folosirea de corpuri funcționale, dacă instalația aspiră în bune condiții eventualele deșeuri.

d) Asupra transmiterii zgomotului și vibrațiilor prin conducție solidă este necesar ca în amplasarea mașinilor textile să ia măsuri pentru izolarea de vibrații a fiecărei mașini în parte, deoarece este știut că dacă zgomotele sînt însoțite și de vibrații mecanice, caracterul dăunător al acestora asupra omului și condițiilor sale de lucru este și mai accentuată.

e) Este necesar să se înlocuiască unele din roțile metalice ale angrenajelor din filaturi (ringuri, flyere etc.) cu roți din materiale fibro-lemnoase, textolit sau alte materiale echivalente care pot coborî nivelul de intensitate acustică cu 5—6 dB. Pentru economie se poate înlocui la unele roți numai o coroană cu dinți ai angrenajului.

f) Ecranarea și carcasarea cutiilor cu angrenaje ale mașinilor cu pereți de o anumită structură acustică vor reduce nivelul global de intensitate acustică cu 3—4 dB în cazul ecranării și cu 6—8 prin folosirea carcaselor.

g) Luarea tuturor măsurilor enumerate mai sus, pot aduce unele îmbunătățiri substanțiale coborînd nivelul global al intensității acustice cu 8—10 dB, reducere care va avea o influență apreciabilă asupra sănătății muncitorilor și asupra productivității muncii.

h) În ceea ce privește măsurile organizatorice generale și de proiectare, este indicat ca la așezarea mașinilor în ateliere (în cadrul ordinei impuse de fluxul tehnologic) să se țină seama și de anumite considerente care pot creia o posibilitate de coborîre a nivelului global al intensității zgomotului. În acest scop, mașinile trebuiesc așezate cu părțile cele mai zgomotoase ale lor (cutiile cu angrenaje) spre pereții halei. Pereții trebuie tratați cu materiale absorbante de sunet evitîndu-se astfel creșterea nivelului global al intensității acustice a zgomotului.

i) Măsurile de reducere a vibrațiilor și a nivelului zgomotului trebuiesc însă luate de la proiectare, știind că modificările ulterioare sînt mai greu de realizat, sînt mult mai costisitoare, iar rezultatele ce se pot

obține nu pot fi comparate ca eficacitate cu acelea ce se obțin printr-o proiectare inițială corectă și o execuție îngrijită.

În noile proiecte a întreprinderilor textile este necesar ca la alegerea tipului de mașină să se țină seamă și de nivelul global al intensității zgomotului produs de mașină respectivă. De asemenea la montare trebuie studiate și condițiile concrete în care vor lucra mașinile (natura fundației, structura statică a clădirii etc.) pentru a se evita o eventuală amplificare a nivelului intensității zgomotului și a vibrațiilor.

Este necesar ca proiectele să fie avizate de către specialiști și din punct de vedere al zgomotului și vibrațiilor așa cum acestea sînt avizate și din alte puncte de vedere: structură, încălzit, ventilat, iluminat etc.

Această problemă a izolării fonice a întreprinderilor textile devine și mai acută datorită faptului că în prezent se merge pe ideia de a se folosi pentru întreprinderile textile tipuri de hale cu acoperișul orizontal și fără luminatoare, care din punct de vedere acustic pot deveni, dacă nu se iau măsuri corespunzătoare, adevărate cutii de rezonanță.

Catedra de Mecanică Teoretică
Institutul Politehnic București

К ВОПРОСУ СНИЖЕНИЯ ШУМА И ВИБРАЦИИ В ХЛОПКОПРЯДИЛЬНОЙ ФАБРИКЕ

(Краткое содержание)

В настоящей работе представлены результаты исследований связанных с шумами и вибрациями в хлопкопрядильной фабрике. Определяется общий уровень интенсивности и спектр частот шума возникающего при работе флаеров, и вентиляторов (рис. 2, 3, 4).

Предлагается ряд конкретных мер для исправления положения отделением шумящих машин от нешумящих, покрытие каркасами сцеплений, использование колес из текстолита, ориентирование шумящих машин в направлении к стенам цеха каморые должны быть обработаны акустичеки-меры снижающие общий уровень интенсивности на 8—10 dB. снижая шакисч образо вдвые уровень силы шумов.

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF NOISE LEVEL IN A COTTON FACTORY

(Summary)

In this paper are given the results of the researches referring to the noise and the vibrations in a cotton factory. The global sound pressure level has been determined as noise spectrograms for flyers, rings and ventilators (fig. 2, 3, 4).

There are proposed a series of measures for the bettering of conditions : the separation of noisy machines from the others, the use of boxwood gearings, and of textolite wheels, the installation of the more noisy parts of the machines against the walls of the hall, which must be treated acoustically etc. The measures diminue the global sound pressure level by 8—10 dB, reducing in this manner the level of the noises by about half.

CONTRIBUTIONS AU PROBLÈME DE LA REDUCTION DU BRUIT DANS UNE FILATURE DE COTON

(Resumé)

Le travail presentent les resultats des recherches qui ont été faites dans une filaturre à coton, en ce qui concerne le bruit et les vibrations des machines qui existent dans une telle filature.

Les recherches ont determinées le niveau total de l'intensitée acoustique et le spectre de frequence des flyers, des machines à tordre et des ventilateurs de l'usine (fig. 2, 3, 4).

Comme suite on propose une séries de mesures concrètes pour remmedier la situation : séparation des machines bruyantes de celles non bruyantes, utilisation des capotes fermées pour le train d'engrenages, ainsi que des roues en materiaux fibreux, l'orientation des machines avec l'extremitée la plus bruyante vers les murs des halles, qui doivent être traité au point de vue acoustique, etc., mesures qui diminues le niveau total de l'intensité acoustique de 8—10 dB. Ainsi le niveau de sonie se reduit de moitié.

ERFORSCHUNGEN IN DAS PROBLEM DER HERABSENKUNG DES LÄRMS UND DER SCHWINGUNGEN IN EINER BAUMWOHL— SPINNEREI

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden Farschungsergebnisse über den Lärm und die Schwingungen in einer Baumwoll — Spinnerei veröffentlicht. Das globale Intensitätsniveau und das Frequenspektrum des von Flyer, Rings und Ventilatoren hervorgerufenen Lärmes wurde ermittelt (Abb 2, 3, 4).

Als Abhilfe werden verschiedene Massnahmen vorgeschlagen. Absonderung der geräuschigen Maschinen von den stilleren, Verschahlung der Antriebe, Benutzung von Textolit — Rädern, geräuschige Maschinenteile den Wänden der Halle zuwenden, die akustisch bearbeitet werden müssen etc.

Diese Massnahmen das globale Intensitätniveau um 8 bis 10 dB senken und somit das Niveau der Lärmstärke auf die Hälfte herabsenken.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 3

STUDIUL MOBILITĂȚII ȘI AL GRADULUI DE NEDETERMINARE STATICĂ AL UNUI SOLID RIGID SUPUS LA LEGĂTURI CU AJUTORUL TEORIEI MULȚIMILOR DE ȘURUBURI GEOMETRICE

MIHAIL ATANASIU

Într-o lucrare anterioară [1] am pus în evidență problemele de bază ale teoriei legăturilor, dificultățile legate de rezolvarea lor, precum și o serie de particularități ale mărimilor care caracterizează starea cinetostatică relativă a două corpuri.

În această lucrare care constituie o continuare a lucrării [1] se expune un punct de vedere nou privind analiza cinetostatică a legăturilor solidului rigid avînd la bază teoria mulțimilor de șuruburi geometrice [3].

I. *Teoria mulțimilor de șuruburi geometrice*

Analiza cinetostatică a unei legături trebuie să țină în mod evident seama de caracterul mărimilor care definesc la un moment dat această stare; după cum am arătat [1], la caracterizarea stării cinetostatice relative momentane a două corpuri îmbinate printr-o legătură, se folosesc în prezent două categorii de mărimi: mărimi vectoriale (pentru studiul interacțiunilor) și mărimi geometrice (pentru studiul poziției relative a celor două corpuri). Metodele folosite pentru analiza cinetostatică a unei legături, sînt în marea lor majoritate metode geometrice și vectoriale. Rezultatele aplicării acestor metode la analiza cinetostatică a legăturilor solidului ne sînt cunoscute; ele prezintă o serie de deficiențe dintre care cele mai importante sînt acelea că în cazurile simple dau rezultate, dar în cazurile complicate ele conduc la o serie de calcule laborioase care îngreunează foarte mult aplicarea lor practică. Una dintre cauze o constituie, după părerea noastră, faptul că la elaborarea acestor metode nu s-a ținut seama de particularitățile acestor mărimi prezentate mai sus.

În cele ce urmează vom prezenta o metodă teoretică nouă pentru analiza cinetostatică a legăturilor solidului; această metodă prezintă pe de o parte avantajul unei simplități de calcul care dă posibilitatea aplicării ei ușoare la toate cazurile de legături ale solidului întîlnite în practică, iar pe de altă parte ea prezintă avantajul unei mari generalități, în sensul că la elaborarea ei nu s-a făcut nici o restricție în ceea ce

privește natura diferitelor legături ale unui solid. Această metodă folosește și generalizează rezultatele teoriei mulțimilor de drepte cunoscută din geometria proiectivă, introducînd un element teoretic nou denumit *șurubul geometric*. Acest element generalizează într-un anumit sens dreapta, renunțînd la una din caracteristici care, după cum s-a arătat în lucrarea [1], este neesențială în definirea stării cinetostatice relative a

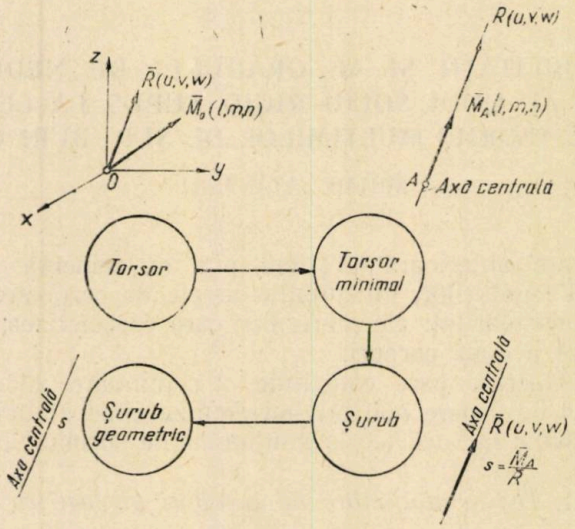


Fig. 1

două corpuri, element care este constituit de rezultanta unui sistem de vectori alunecători situată pe axa centrală a acestui sistem. Bazele teoriei mulțimilor de șuruburi geometrice au fost expuse într-o lucrare anterioară [3]; de aceea în cele ce urmează ne vom mărgini să menționăm unele rezultate ale acestei teorii, împreună cu o serie de precizări utile pentru aplicarea ei la analiza cinetostatică a legăturilor solidului. Elementul caracteristic al acestei teorii îl constituie șurubul geometric. În fig. 1 este arătat în mod schematic modul în care se ajunge de la noțiunea de torsor cunoscută din algebra vectorilor alunecători, la noțiunea de șurub geometric. Dacă considerăm un sistem de vectori alunecători, efectuînd reducerea acestui sistem într-un punct oarecare O din spațiu, obținem cele două elemente de reducere rezultanta $\bar{R}\ (u, v, w)$ și momentul rezultant $\bar{M}_0\ (l, m, n)$. Aceste două elemente alcătuiesc *torsorul de reducere* al sistemului de vectori considerat în punctul O. Cu ajutorul acestor două elemente se poate trece la calculul *torsorului minimal* al aceluiași sistem de vectori reprezentat prin elementele vectoriale $\bar{R}\ (u, v, w)$ și $\bar{M}_A\ (l', m', n')$ reprezentate prin doi vectori coliniari situați pe axa centrală a sistemului de vectori considerat. Mai departe, de la noțiunea de torsor minimal se trece la noțiunea de *șurub* al aceluiași sistem de vectori.

Șurubul este de asemenea un element caracteristic al unui sistem de vectori alunecători ; el este alcătuit din rezultanta $\bar{R}$ situată pe axa centrală a sistemului de vectori considerat și mărimea s denumită *pasul șurubului ;* aceasta este noțiunea de șurub în sensul clasic (vezi și lucrarea [3]). De la noțiunea de șurub a unui sistem de vectori, prin renunțarea la unul din elementele șurubului care, după cum s-a arătat [1], nu

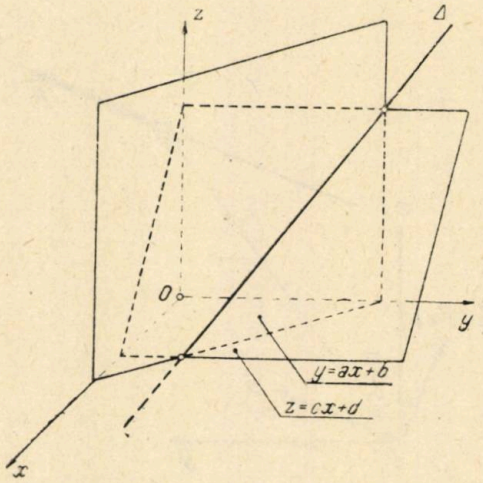


Fig. 2

este esențial în caracterizarea stării cinetostatice relative a două corpuri îmbinate printr-o legătură, și anume rezultanta sistemului de vectori, se ajunge la noțiunea de *șurub geometric,* care formează noțiunea teoretică fundamentală pe care se bazează cercetarea de față. Șurubul geometric este deci o mărime caracteristică pentru un sistem de vectori alunecători, compus dintr-un element geometric, o dreaptă (axa centrală), căruia i se atașează un parametru scalar s, denumit *pasul șurubului geometric.* De remarcat faptul că prin renunțarea la modulul rezultantei situată pe axa centrală a șurubului, șurubul geometric a încetat să fie un element caracteristic unui anumit sistem de vectori alunecători ; cu ajutorul șurubului geometric pot fi caracterizate toate sistemele de vectori alunecători care au aceeași axă centrală și același parametru scalar s. Acest fapt care, din punctul de vedere a teoriei vectorilor alunecători, constituie o oarecare nedeterminare, din punctul de vedere al obiectului acestei lucrări aduce o simplificare remarcabilă.

Să examinăm mărimile scalare cu ajutorul cărora poate fi caracterizat șurubul geometric. Lăsînd la o parte parametrul s, care poate lua valori reale, pozitive, negative sau nule, rezultă că trebuie să punem în evidență mărimile scalare care caracterizează axa centrală a șurubului, care este o dreaptă. După cît este cunoscut din geometrie, o dreaptă Δ

poate fi caracterizată în raport cu un sistem de referință *Oxyz* (fig. 2) cu ajutorul a două ecuații de forma :

$$y = ax + b\,, \qquad z = cx + d \tag{1}$$

care reprezintă ecuațiile a două plane, primul paralel cu axa Oz iar celălalt pararel cu axa Oy, prin intersecția cărora este definită în mod univoc

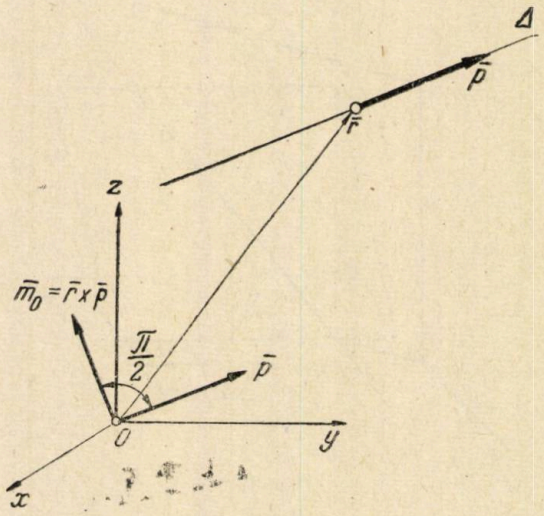


Fig. 3

poziția dreptei Δ în raport cu sistemul de referință considerat. Rezultă de aici că poziția unei drepte oarecare în spațiu depinde de patru parametri scalari (a, b, c, d) sau altfel spus, în spațiul tridimensional există ∞^4 drepte. Dar caracterizarea unei drepte Δ în spațiu mai poate fi făcută și cu ajutorul altor parametri scalari și anume a așa ziselor *coordonate plückeriene*. Pentru aceasta vom considera aceeași dreaptă Δ în raport cu sistemul de referință Oxyz ; să alegem un vector oarecare $\bar{p}$ situat pe dreapta Δ ale cărui elemente de reducere în originea O a sistemului de coordonate ales, sînt $\bar{p}$ și $\bar{m}_0 = \bar{r} \times \bar{p}$. Componentele scalare ale celor două elemente de reducere în O ale vectorului $\bar{p}$, notate prin u, v, w și l, m, n, respectiv pentru vectorii $\bar{p}$ și $\bar{m}_0$ sînt denumite în geometrie *coordonatele plückeriene* ale dreptei Δ (fig. 3). Aceste coordonate, în număr de șase, nu sînt independente între ele, deoarece, după cum am văzut mai sus, în spațiu există ∞^4 drepte, adică poziția unei drepte poate fi caracterizată prin patru parametri independenți. O relație evidentă între cele șase coordonate plückeriene este :

$$ul + vm + wn = 0 \tag{2}$$

care exprimă faptul evident că cele două elemente de reducere ale vectorului $\bar{p}$ în O sînt perpendiculare unul pe celălalt. Cu aceasta numărul coordonatelor plückeriene independente s-a micșorat la 5. O caracteristică importantă a acestor coordonate care micșorează numărul valorilor lor independente la patru, este aceea că ele sînt mărimi *omogene*. Aceasta exprimă faptul că oricum ar fi ales vectorul $\bar{p}$ pe dreapta Δ, el trebuie

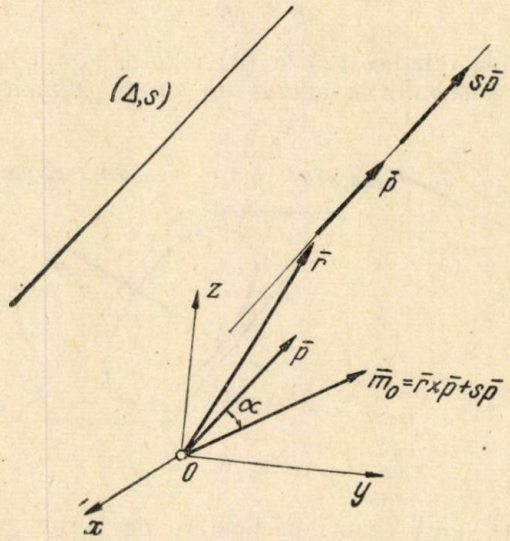


Fig. 4

să reprezinte o aceeași dreaptă ; rezultă deci că mărimile λu, λv, λw, λl, λm, λn pentru λ arbitrar reprezintă aceeași dreaptă Δ. Folosirea coordonatelor plükeriene pentru caarcterizarea unei drepte în spațiu, prezintă o serie de avantaje, tocmai datorită acestui caracter de omogeneitate al lor. În geometria proiectivă acest fapt a permis ca dreptele din spațiul euclidian să poată fi puse în corespondență biunivocă cu punctele spațiului pentadimensional al lui Felix Klein, corespondență în urma căreia s-au obținut o serie de rezultate interesante. Revenind acum la cazul șurubului, rezultă că el poate fi caracterizat cu ajutorul a cinci parametri scalari : parametrii, *a, b, c, d* care serveau la caracterizarea unei drepte, la care se adaugă parametrul *s*. Folosirea coordonatelor plückeriene pentru caracterizarea unui șurub revine la a considera pe axa centrală a șurubului în locul unui singur vector $\bar{p}$, doi vectori coliniari p și sp (fig. 4). Elementele de reducere ale acestor doi vectori în raport cu originea O a unui sistem de axe sînt $\bar{p}$ și $\bar{m}_0 = s\bar{p} + \bar{r} \times \bar{p}$. Proiecțiile vectoriilor $\bar{p}$ și $\bar{m}_0$ pe axele Ox, Oy și Oz formează *coordonatele plückeriene ale șurubului* considerat. De observat faptul că unghiul dintre acești doi vectori nu mai este egal cu $\frac{\pi}{2}$ ca în cazul dreptei ; rezultă deci că cele

șase coordonate plückeriene nu mai satisfac în mod identic relația (2). În baza aceluiași raționament ca în cazul dreptei, rezultă că cele șase coordonate plückeriene ale șurubului își păstrează caracterul de omogeneitate. Pentru un șurub geometric al cărui pas este dat, între coordonatele sale plückeriene există relația :

$$s = \frac{ul + vm + wn}{u^2 + v^2 + w^2} \tag{3}$$

Comparînd între ele relațiile (2) și (3) rezultă faptul că dreapta este un caz particular al șurubului și anume un șurub geometric de pas nul. În

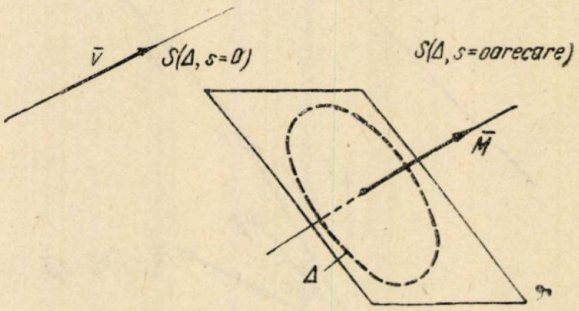


Fig. 5

fig. 5 sînt arătate două cazuri particulare de șurub geometric ; șurubul geometric al unui singur vector este compus din dreapta Δ, care este chiar suportul vectorului considerat avînd pasul $s = 0$, iar șurubul geometric al unui moment al unui cuplu are drept axă centrală dreapta de la infinit a planului normal pe suportul vectorului și un pas s oarecare. Considerarea în continuare a corespondenței biunvoce dintre numărul șuruburilor din spațiul tridimensional și numărul punctelor spațiului pentadimensional al lui Felix Klein a permis de asemenea generalizarea concluziilor din cazul dreptei. Pentru scopul propus în această lucrare sînt importante de examinat nu numai proprietățile unui singur șurub, ci mai ales, proprietățile mulțimilor de șuruburi. Pentru început trebuie observat faptul că mulțimea tuturor șuruburilor din spațiul tridimensional este formată din submulțimi de șuruburi avînd pas constant ; o asemenea submulțime este și submulțimea dreptelor care, după cum am văzut, reprezintă mulțimea tuturor șuruburilor geometrice de pas nul. Mulțimile cele mai importante pentru a fi luate în considerare sînt mulțimi de șuruburi geometrice care se bucură de proprietatea că între coordonatele plückeriene ale fiecărui șurub geometric al mulțimii există una sau mai multe relații de forma :

$$f_i(u, v, w, l, m, n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6) \tag{4}$$

Deosebit de important este cazul în care aceste relații sînt liniare, mulțimile de șuruburi geometrice numindu-se atunci *mulțimi liniare*. În acest

caz relațiile liniare din coordonatele șuruburilor geometrice ale mulțimii respective pot fi scrise sub forma :

$$L_i u + M_i v + N_i w + U_i l + V_i m + W_i n = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6) \qquad (5)$$

Să considerăm matricea formată cu ajutorul coeficienților formelor liniare și omogene (5). O caracteristică importantă a mulțimilor liniare pentru care au loc relațiile (5) este *rangul* r al acestei matrici.

În calcule vom considera și submulțimile finite ale mulțimilor liniare de șuruburi ; rangul acestor submulțimi se calculează tot cu ajutorul unei matrici de aceeași formă.

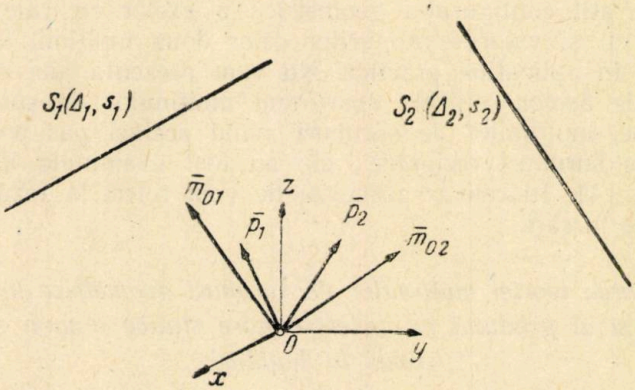


Fig. 6

Studiind mulțiimile liniare de șuruburi se poate ajunge la concluzia importantă că axele centrale ale tuturor șuruburilor geometrice care alcătuiesc o anumită mulțime de un rang r sînt dispuse în spațiu într-o anumită configurație geometrică ; această corespondență între rangul sistemului de forme liniare (5) și configurația geometrică a axelor centrale ale șuruburilor geometrice între ale căror coordonate plückeriene există relațiile (5) prezintă un interes deosebit pentru teoria generală a legăturilor solidului.

O altă noțiune importantă din teoria mulțimilor de șuruburi geometrice o formează așa numitele *șuruburi geometrice reciproce*. Pentru a defini această noțiune, să considerăm (fig. 6) două șuruburi S_1 (Δ_1, s_1) și S_2 (Δ_2, s_2) ale căror coordonate plückeriene vectoriale sînt $\bar{p}_1$, $\bar{m}_{0_1}$ și $\bar{p}_2$, $\bar{m}_{0_2}$. Vom spune că aceste două șuruburi sînt reciproce dacă între coordonatele lor plückeriene vectoriale există relația :

$$\bar{p}_1 \cdot \bar{m}_{0_2} + \bar{p}_2 \cdot \bar{m}_{0_1} = 0 \qquad (6)$$

sau sub formă scalară :

$$u_1 l_2 + v_1 m_2 + w_1 n_2 + l_1 u_2 + m_1 v_2 + n_1 w_2 = 0$$

Este interesant de observat faptul că șuruburile între ale căror coordonate plückeriene există relațiile (7) formează de fapt două mulțimi, denumite *mulțimi reciproce*. Se poate arăta că înfre rangurile r și r^* ale acestor două mulțimi de șuruburi geometrice reciproce există relația:

$$r + r^* = 6 \tag{8}$$

Examinînd din punctul de vedere al configurației geometrice a axelor centrale mulțimile de șuruburi reciproce se constată faptul că axele centrale ale șuruburilor care alcătuiesc cele două mulțimi reciproce sînt dispuse în spațiu în anumite configurații geometrice. Din examinarea configurației geometrice a axelor centrale ale uneia dintre mulțimi se poate deduce atît configurația geometrică a axelor centrale a mulțimii reciproce ei, cît și valorile rangurilor celor două mulțimi, fapt deosebit de important în aplicațiile practice. Nu vom prezenta aici configurațiile geometrice ale axelor centrale aparținînd mulțimilor de șuruburi avînd pasuri diferite, mulțimilor de șuruburi avînd același pas precum și ale mulțimilor de șuruburi reciproce; ele au fost examinate în detaliu în lucrările [3], [4]. În cele ce urmează ne vom referi la rezultatele obținute în aceste lucrări.

II. *Aplicarea teoriei mulțimilor de șuruburi geometrice la studiul mobilității și al gradului de nedeterminare statică a unui solid rigid supus la legături*

După cum am arătat în lucrarea [1], studiul cinetostatic al unei legături comportă examinarea simultană a două aspecte: un aspect cinematic, care se referă la studiul mișcărilor relative momentane ale celor două corpuri care se îmbină prin legătura respectivă și un aspect static, care se referă la studiul interacțiunilor care iau naștere între cele două corpuri, dacă legătura considerată este lucie. În teoria generală a legăturilor solidului, aceste două aspecte sînt caracterizate respectiv printr-un torsor de reducere într-un punct O al vitezelor relative ale celor două corpuri îmbinate prin legătura respectivă și prin torsorul de reducere al interacțiunilor. Aceasta corespunde din punct de vedere teoretic aplicării rezultatelor cunoscute din algebra vectorilor alunecători la studiul acestor două aspecte. În cele ce urmează vom aplica la studiul cinetostatic al legăturilor solidului rezultatele obținute în teoria mulțimilor de șuruburi geometrice. Pentru aceasta să considerăm două corpuri E_i și E_j supuse unei legături C_{ij} reprezentată schematic în figura 7. Să considerăm mișcările relative posibile și interacțiunile posibile care iau naștere între cele două corpuri supuse legăturii C_{ij}. Reprezentînd fiecare mișcare relativă posibilă prin cîte un șurub geometric și de asemenea fiecare interacțiune prin cîte un șurub geometric, vom obține două mulțimi de șuruburi geometrice cu ajutorul cărora vom caracteriza la un moment dat starea cinetostatică realtivă a celor două corpuri. Aceste

două mulțimi de șuruburi geometrice sînt, în general, infinite și, după cum se va arăta în continuare, ele formează două mulțimi de șuruburi geometrice reciproce. Configurația axelor lor centrale va fi examinată în continuare pentru diferite cazuri particulare, concrete de legături.

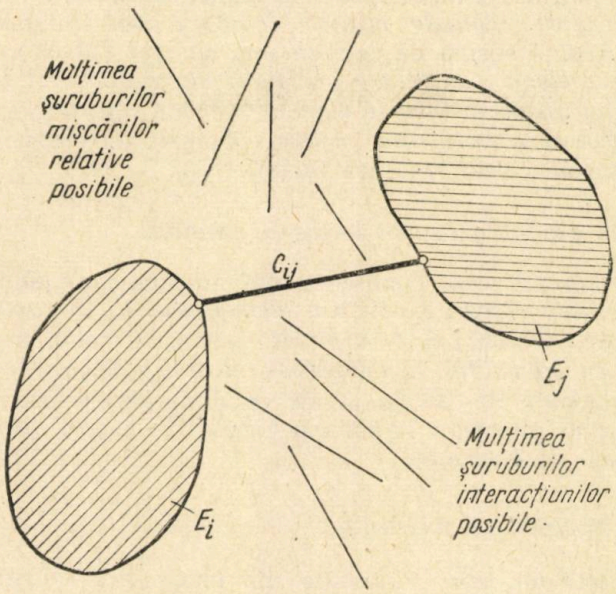


Fig. 7

Vom examina teoremele generale ale cinetostaticii legăturilor solidului, precum și principalele definiții ale mărimilor care intervin în caracterizarea legăturilor solidului.

a) *Teoremele generale ale cinetostaticii legăturilor solidului.*

1. *Teorema de existență pentru forțele de legătură* (interacțiunii corpurilor care se îmbină în legătură).

Această teoremă care postulează existența interacțiunilor transmise prin contactul a două corpuri care se îmbină într-o legătură, este cunoscută din mecanica clasică sub forma *axiomei legăturilor*; ea se enunță astfel: *orice legătură a unui corp poate fi înlocuită cu o forță denumită forță de legătură sau reacțiunea legăturii respective.* În cazul legăturilor întîlnite în practică, la care contactul dintre cele două corpuri se efectuiază într-o infinitate de puncte dispuse într-o varietate unidimensională (curbă) sau bidimensională (suprafață) în fiecare punct al acestei varietăți ia naștere o forță de legătură transmisă de către corpul E_i, corpului E_j și de asemenea o forță de legătură transmisă de corpul E_j corpului E_i. Ele pot fi reprezentate prin două mulțimi infinite de forțe.

2. *Teorema reciprocității interacțiunilor*

Această teoremă este cunoscută din mecanica teoretică sub denumirea de *principiul egalității acțiunii și reacțiunii* : ea afirmă că *cei doi vectori forță, care reprezintă interacțiunea în punctele varietății de contact a celor două corpuri îmbinate printr-o legătură sînt doi vectori egali și direct opuși.* Ținînd seama de cele de mai sus rezultă că cele *două interacțiuni între aceleași puncte ale varietății de contact pot fi reprezentate printr-un singur șurub geometric avînd drept axă centrală direcția comună a celor doi vectori și pasul nul* (aceste concluzii se referă numai la interacțiunile transmise prin legătura lucie).

3. *Teorema de existență pentru mișcarea relativă.*

Această teoremă este cunoscută din cinematica solidului rigid ; ea afirmă că *oricărei mișcări posibile a elementului E_i în raport cu elementul E_j (mișcarea directă) îi corespunde o mișcare relativă a elementului E_j în raport cu elementul E_i (mișcarea inversă).* Elementele cu ajutorul cărora se reprezintă în calcule aceste două mișcări relative sînt vectorii viteză relativă ai punctelor unuia din corpuri în raport cu celălalt considerat ca sistem de referință.

4. *Teorema reciprocității mișcărilor.*

Această teoremă este cunoscută din cinematica solidului rigid ; ea afirmă faptul că *vectorii viteză relativă care reprezintă mișcarea elementului E_i față de elementul E_j sînt egali și direct opuși vectorilor viteză relativă care reprezintă mișcarea elementului E_j față de elementul E_i.* Ținînd seama de cele de mai sus rezultă că *vectorii viteză relativă considerați pot fi reprezentați prin același șurub geometric.*

5. *Teorema reciprocității mișcărilor relative și interacțiunilor.*

Ținînd seama de postulatele și de teoremele mecanicii clasice am înlocuit fiecare interacțiune care ia naștere într-o legătură și fiecare viteză relativă, respectiv prin cîte un șurub ; am obținut astfel două mulțimi de șuruburi : mulțimea șuruburilor vitezelor relative posibile și mulțimea șuruburilor interacțiunilor posibile care iau naștere între două corpuri îmbiante printr-o legătură. Vom arăta acum că aceste două mulțimi alcătuiesc două mulțimi de șuruburi geometrice reciproce, în sensul în care a fost definită mai sus noțiunea de reciprocitate a două mulțimi de șuruburi geometrice. Formularea acestei teoreme este cunoscută tot din mecanica teoretică, sub forma *principiului vitezelor virtuale.* Pentru aceasta să considerăm cele două corpuri E_i și E_j avînd un contact într-o legătură C_{ij} (fig. 8). Să notăm prin S_i respectiv S_j suprafețele exterioare ale celor două corpuri care se află în contact în legătura C_{ij} ; fie A_k un punct comun acestor două suprafețe și P planul tangent comun

în punctul A_k. În punctul A_k se exercită din partea corpului E_j către corpul E_i o reacțiune normală N_k al cărui suport este dreapta Δ_k, normala comună celor două suprafețe S_i și S_j. În punctul A_k. Fie O un punct oarecare din spațiu, în care s-a calculat torsorul de reducere al vectorilor viteză relativă ai corpului E_i în raport cu corpul E_j și torsorul

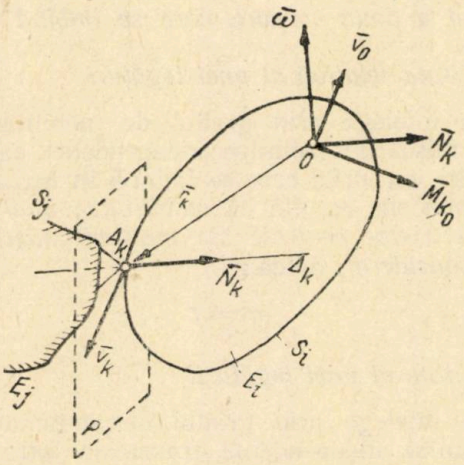


Fig. 8

de reducere al vectoriilor interacțiune exercitat de corpul E_j asupra corpului E_i. Elementele de reducere au fost notate respectiv prin $\bar{N}_k$, $\bar{M}_{k0}$) și $(\bar{\omega}, \bar{v}_0)$. Principiul vitezelor virtuale afirmă că pentru orice deplasare relativă a celor două corpuri E_i și E_j, deplasare compatibilă cu legătura C_{ij}, suma puterilor virtuale ale forțelor de legătură este nulă. Aceasta se exprimă prin relația:

$$\Sigma \bar{N}_k \cdot \bar{v}_k = 0 \tag{9}$$

Exprimînd viteza punctului A_k cu ajutorul elementelor de reducere ale vitezelor relative din O se obține:

$$\bar{v}_k = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_k \tag{10}$$

relație care înlocuită în (9) conduce la:

$$\bar{N}_k \cdot \bar{v}_0 + \bar{N}_k \cdot (\bar{\omega} \times r_k) = 0 \tag{11}$$

După transformări simple relația (11) poate fi scrisă sub forma:

$$\bar{N}_k \cdot \bar{v}_0 + (\bar{r}_k \times \bar{N}_k) \cdot \bar{\omega} = 0 \tag{12}$$

Sub această formă recunoaștem relația (6) care exprimă reciprocitatea celor două șuruburi geometrice reprezentînd interacțiunile și vitezele relative ale celor două corpuri care se îmbină prin legătura C_{ij}. De aici

rezultă că *cele două mulțimi de șuruburi geometrice care reprezintă, respectiv interacțiunile celor două corpuri și mișcările lor relative, formează două mulțimi de șuruburi reciproce.* Această consecință prezintă o deosebită importanță în analiza cinetostatică a legăturilor solidului.

b) *Definițiile mărimilor care caracterizează starea cinetostatică momentană relativă a două corpuri, care se îmbină într-o legătură.*

1. *Gradul de mobilitate relativă al unei legături.*

În general se înțelege prin gradul de mobilitate relativă al unei legături, numărul mișcărilor relative independente care pot avea loc la un moment dat între corpurile care se îmbină în legătura (cupla) respectivă. Din cele de mai sus rezultă că *mobilitatea unei legături este egală cu rangul mulțimii axelor centrale ale mulțimii mișcărilor relative posibile la momentul considerat,* adică :

$$m = r \tag{13}$$

2. *Gradul de staticitate al unei legături.*

În general se înțelege prin gradul de staticitate al unei legături numărul interacțiunilor independente transmise între cele două corpuri care se îmbină în legătura respectivă. Ținînd seama de cele de mai sus rezultă că *gradul de staticitate al unei legături este egal cu rangul mulțimii șuruburilor interacțiunilor transmise între cele două corpuri la momentul considerat,* adică :

$$s = r^* \tag{14}$$

3. *Legătura critică.*

În general se înțelege printr-o legătură critică acea leagătură la care gradul de mobilitate și deci și gradul de staticitate sînt variabile o dată cu poziția relativă a celor două corpuri care se îmbină în legătura respectivă. Folosind rezultatele obținute în teoria mulțimilor de șuruburi geometrice, *vom denumi legătură critică acea legătură pentru care configurația geometrică a mulțimii șuruburilor geometrice, ale mișcărilor relative sau ale interacțiunilor posibile își schimbă rangul o dată cu poziția relativă a celor două corpuri care se îmbină în legătura respectivă.*

4. *Legătura dintre mișcare și reacțiuni.*

Pentru orice legătură critică sau necritică suma dintre gradul de mobilitate relativă și gradul de staticitate, este constantă și egală cu șase. Aceasta rezultă imediat din teorema reciprocității celor două mulțimi de șuruburi care reprezintă interacțiunile și vitezele relative ale celor două corpuri care se îmbină în legătura respectivă. Avem deci

$$m + s = 6 \tag{15}$$

5. *Gradul de nedeterminare statică al unei legături (numărul legăturilor pasive).*

Pentru orice legătură diferența dintre numărul interacțiunilor fără frecare transmise între cele două corpuri care se îmbină în legătura respectivă și gradul său de staticitate (rangul mulțimii de șuruburi geometrice care reprezintă interacțiunile) se numește grad de nedeterminare statică al legăturii respective; el reprezintă totodată și numărul interacțiunilor pasive transmise prin legătura respectivă. Avem deci:

$$N = n^* - r^* \tag{16}$$

6. *Gradul de mobilitate supraabundentă al unei legături.*

Pentru orice legătură diferența dintre numărul axelor centrale ale șuruburilor mișcărilor relative posibile și gradul său de mobilitate, reprezintă numărul de mobilități supraabundente ale lgăturii respective. Avem deci:

$$M = n - r \tag{17}$$

În cele de pînă aici am examinat o serie de teoreme generale, precum și definiția mărimilor fundamentale care caracterizează starea cinetostatică relativă momentană a unei legături. În cele ce urmează ele vor fi aplicate la analiza sistematică a legăturilor solidului, luînd ca element de bază forma geometrică a zonei de contact dintre cele două corpuri care se îmbină într-o legătură.

III. *Analiza cinetostatică și clasificarea sistematică a legăturilor solidului după forma geometrică a zonei de contact*

Un solid este alcătuit dintr-un continuum material mărginit la exterior de o varietate bidimensională (suprafață închisă) care include în interiorul său toate punctele aparținînd solidului considerat. Mulțimea M a punctelor aparținînd corpului considerat, situate pe această suprafață, este o mulțime infinită; în cele ce urmează nu vom impune nici o restricție suprafeței exterioare a corpului, în afară de aceea că în toate punctele sale normala la suprafața exterioară să existe, fără a fi însă în mod necesar unică și, evident, ca această suprafață să aibe toate punctele sale situate la distanța finită. Legăturile se obțin în mod practic prin obligarea celor două suprafețe exterioare ale corpurilor care se îmbină în legătura respectivă, să aibe în comun o anumită varietate geometrică (suprafață, curbă, punct). Această varietate geometrică comună obținută prin contactul direct al celor două corpuri, poartă denumirea de *zonă de contact*. Să considerăm două corpuri aflate în contact direct; aceasta revine la a spune că cele două suprafețe exterioare S_1 și S_2 care limitează corpurile considerate se află în contact geometric. Din punct de vedere analitic aceasta înseamnă că o parte din punctele suprafeței S_1 și o parte din punctele suprafeței S_2 au coordonate identice în raport cu un sistem de referință; să notăm prin M

mulțimea acestor puncte. Ea este reprezentată ca intersecția mulțimilor de puncte M_{S_1} și M_{S_2} care reprezintă totalitatea punctelor de pe suprafețe S_1 și S_2:

$$M = M_{S_1} \cap M_{S_2} \tag{18}$$

Intersecția este determinată de geometria părții de contact comune celor două suprafețe. Vom presupune că mulțimea M nu este vidă, ceea ce revine din punct de vedere geometric la a spune că contactul celor două corpuri se realizează efectiv. Vom examina în special cazul cînd suprafețele S_1 și S_2 sînt regulate, adică admit în fiecare punct un singur plan tangent ; aceasta înseamnă că ele nu au muchii de întoarcere și nici puncte singulare. Mulțimea M poate fi o mulțime finită conținînd cel puțin un element atunci cînd contactul dintre cele două corpuri se efectuiază într-un singur punct sau poate conține un număr finit de elemente egal cu numărul punctelor de contact în cazul cînd zona de contact este alcătuită din mai multe puncte (contact discret). Mulțimea M este o mulțime infinită, punctele sale alcătuind o varietate bidimensională sau unidimensională, atunci cînd contactul celor două corpuri se efectuiază în mod continuu de-a lungul uneia sau mai multor porțiuni de

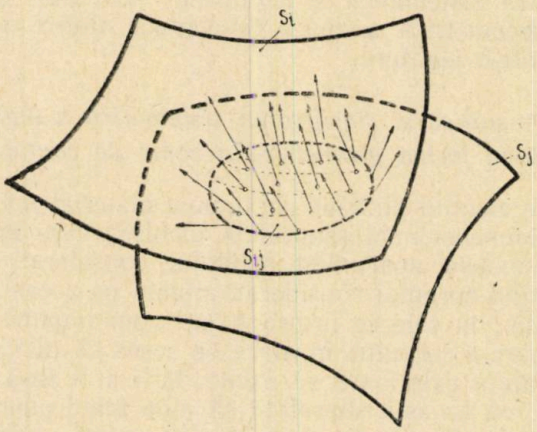


Fig. 9

suprafață, a uneia sau mai multor porțiuni de curbe sau a unei reuniuni de porțiuni de suprafețe și curbe. În toate aceste cazuri vom înțelege prin zona de contact reuniunea tuturor acestor elemente geometrice.

a) *Cazul contactului suprafață-suprafață.* Cele mai simple forme geometrice ale zonei de contact, care pot lua naștere în acest caz sînt porțiunea de suprafață, porțiunea de curbă și punctul. Cazul general al zonei de

contact avînd forma unei porțiuni de suprafață este reprezentat în fig. 9. Un exemplu privind acest caz este arătat în fig. 10.

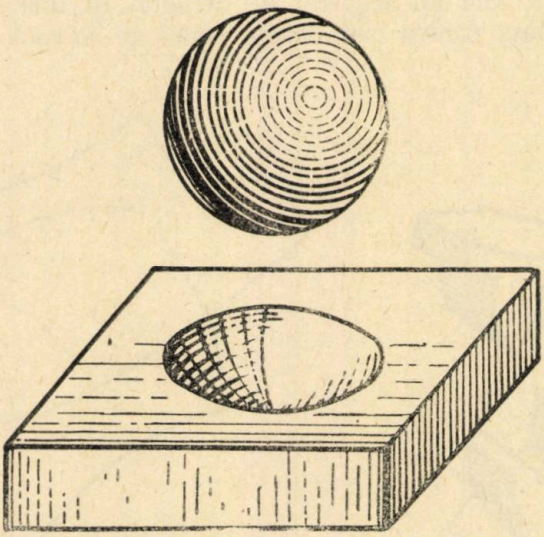


Fig. 10

În acest caz cele două suprafețe aflate în contact sînt două suprafețe sferice, forma zonei de contact fiind de asemenea o porțiune de suprafață

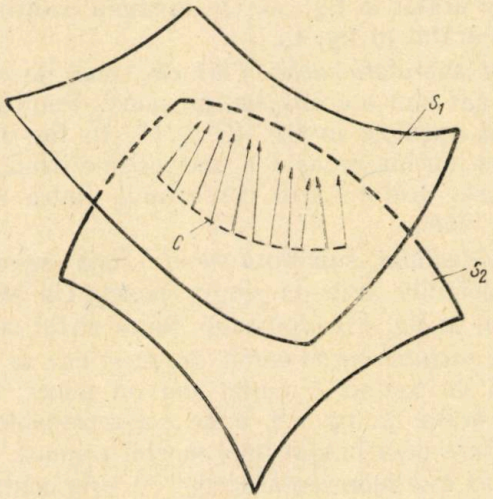


Fig. 11

sferică. Cazul general al contactului suprafață-suprafață pentru care forma zonei de contact este o porțiune de curbă, este arătată în fig. 11.

Un exemplu pentru acest caz este arătat în fig. 12. În această figură este arătat cazul contactului a două roți cilindrice dințate la care forma zonei de contact este un segment de dreaptă. În fine cazul contactului suprafață-suprafață pentru care forma zonei de contact se reduce la un

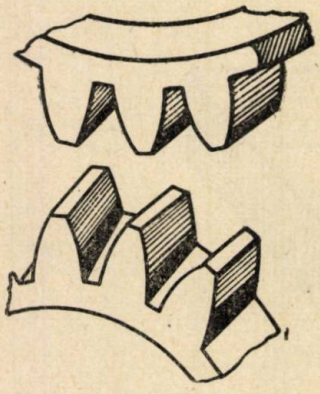


Fig. 12

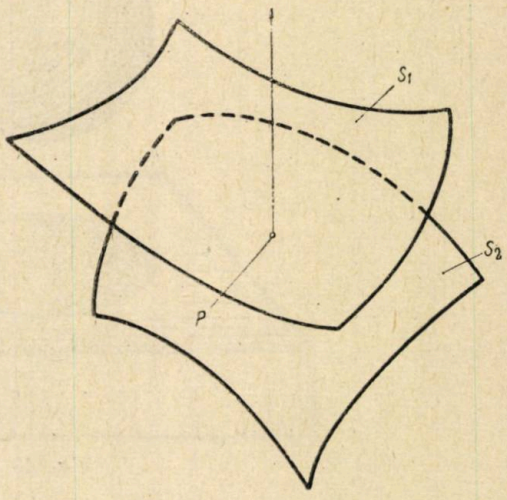


Fig. 13

singur punct este arătat în fig. 13. Un exemplu pentru acest caz este contactul sferă-plan arătat în fig. 14.

b) *Contactul suprafață-curbă.* Formele zonei de contact care pot lua naștere în acest caz sînt o curbă sau un punct. Pentru aceste două cazuri sînt arătate două exemple în fig. 15 și 16. În fig. 15 este arătat cazul contactului dintre muchia dreaptă a unei prisme triunghiulare cu un plan, iar în fig. 16 este arătat cazul contactului dintre muchia racordată a unui corp cu un plan.

c) *Cazul contactului suprafață-punct.* Zona de contact rezultată în acest caz este alcătuită dintr-un singur punct. Un exemplu pentru acest caz este prezentat în fig. 17. (contactul dintre vîrful unui con și un plan).

d) *Cazul contactului curbă-curbă.* În acest caz se pot obține ca forme simple ale zonei de contact o curbă sau un punct. Un exemplu pentru primul caz este arătat în fig. 18, unde s-a reprezentat contactul a două prisme triunghiulare de-a lungul unei muchii comune. Un exemplu pentru cel de al doilea caz este reprezentat în fig. 19, prin contactul a două prisme, dintre care una are o muchie dreaptă, iar cealaltă o muchie racordată, după o curbă oarecare.

e) *Cazul contactului curbă-punct.* În acest caz forma care poate rezulta pentru zona de contact este un punct. Un exemplu pentru acest

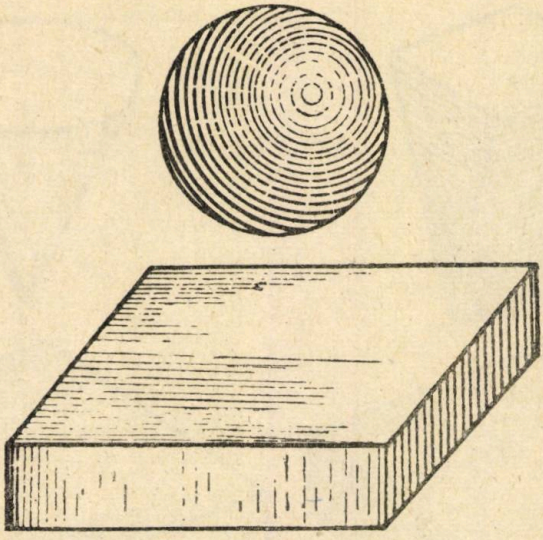


Fig. 14

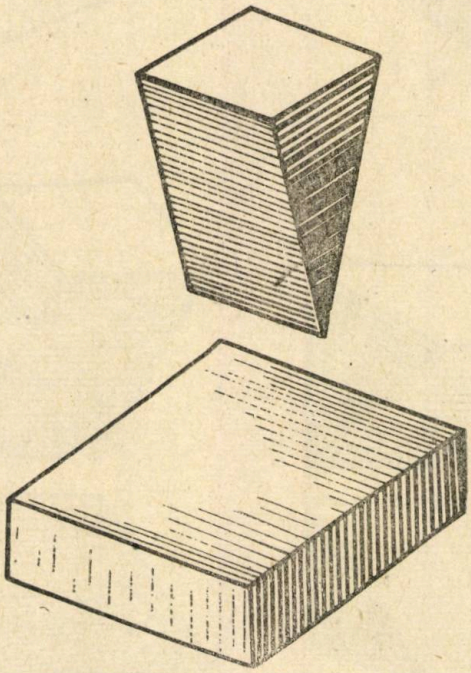


Fig. 15

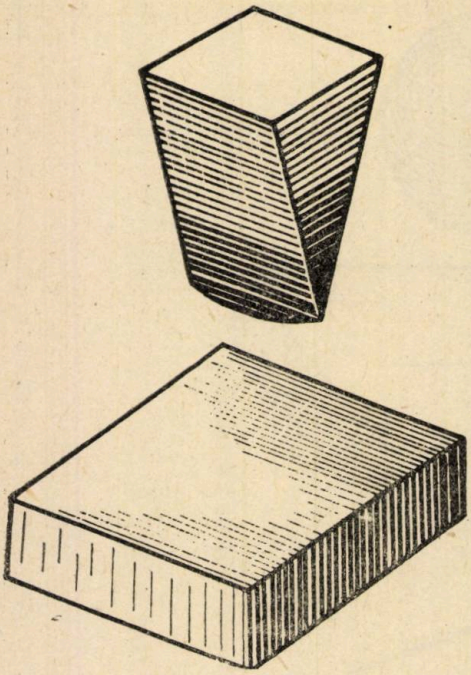


Fig. 16

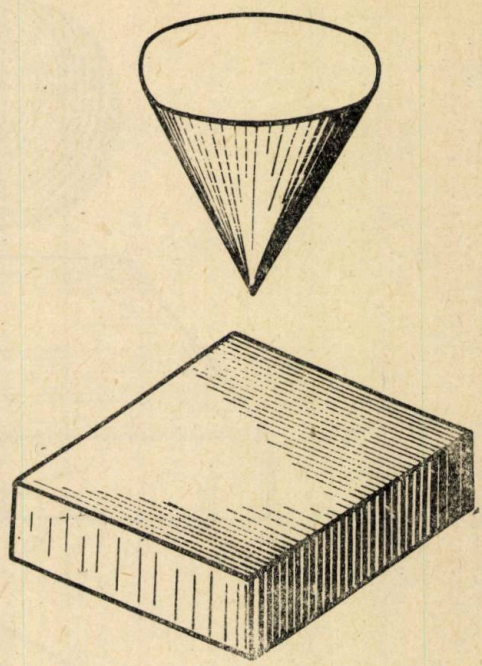


Fig. 17

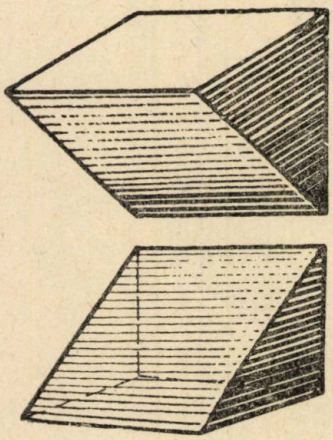


Fig. 18

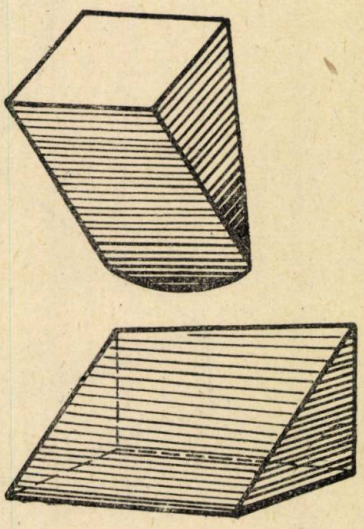


Fig. 19

caz este reprezentat în fig. 20 prin contactul dintre vîrful unui con și muchia unei prizme triunghiulare.

f) *Cazul contactului punct-punct.* În acest caz forma zonei de contact nu poate fi decît un punct. Un exemplu este arătat în fig. 21 prin contactul realizat între vîrfurile a două conuri.

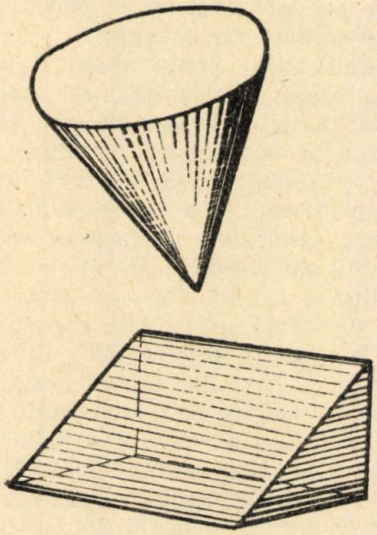


Fig. 20

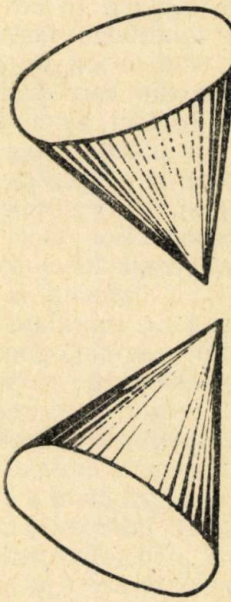


Fig. 21

Este de la sine înțeles faptul că o bună parte din cazurile prezentate mai sus sînt cazuri teoretice, care nu se întîlnesc în practică, dar cu ajutorul cărora se poate aproxima comod oricare din legăturile întîlnite în practică. Singura formă a zonei de contact care se întîlnește în mod real, este aceea prezentată la cazul a) (cazul suprafață-suprafață pentru care forma zonei de contact este porțiunea de suprafață). Examinarea contactului geometric între două corpuri care se îmbină într-o legătură, a fost efectuată în scopul clasificării și sistematizării diferitelor forme ale zonelor de contact care se întîlnesc la îmbinarea a două corpuri printr-o legătură. Din examinarea formei geometrice a zonei de contact se poate deduce configurația mulțimii normalelor în punctele acestei zone, normale ale căror direcții sînt axele centrale ale șuruburilor geometrice care reprezintă interacțiunile transmise între cele două corpuri care se îmbină în legătura respectivă. În cazul în care forma zonei de contact este o suprafață, configurația normalelor în punctele acestei zone este în general bine determinată; ea este formată din totalitatea normalelor comune celor două suprafețe ale corpurilor care se îmbină prin legătura respectivă în punctele comune acestor două suprafețe.

In cazul în care forma zonei de contact este o curbă, configurația normalelor în punctele aparținînd acestei zone este în general de asemenea bine determinată. După cum am văzut, zona de contact avînd forma unei curbe, rezultă fie din contactul a două suprafețe, fie din contactul unei curbe cu o suprafață. În primul caz mulțimea normalelor este formată din totalitatea normalelor comune celor două suprafețe în punctele zonei de contact. În cel de al doilea caz, mulțimea normalelor este formată din totalitatea normalelor comune la suprafața corpului care participă la contact cu o suprafață și care trec prin punctele curbei aparținînd corpului care participă la contact cu o curbă.

Zona de contact avînd forma unui punct poate apare în următoarele cazuri: contactul suprafață-suprafață, suprafață-curbă, suprafață-punct, curbă-curbă, curbă-punct punct-punct. În primul caz (contactul suprafață-suprafață) mulțimea normalelor se reduce la una singură: normala comună celor două suprafețe în punctul de contact; în cel de al doilea caz (contactul suprafață-punct) mulțimea normalelor se reduce la una singură: normala la suprafața exterioară a corpului care participă la contact cu suprafața în punctul de contact; în cel de al treilea caz (contactul suprafață-punct) mulțimea normalelor se reduce de asemenea la una singură: normala la suprafața exterioară a corpului care participă la contact cu o suprafață în punctul de contact; în cel de al patrulea caz (contactul curbă-curbă) se pot ivi în general două situații: dacă planele normale celor două curbe în punctul de contact sînt distincte, deci se intersectează după o dreaptă, mulțimea normalelor se reduce la una singură și anume intersecția celor două plane normale la cele două curbe în contact; dacă planele normale celor două curbe coincid, normala comună celor două curbe în acest punct este în general nedeterminată; în acest caz vom considera mulțimea tuturor normalelor posibile la cele două curbe aflate în contact, mulțime care este alcătuită din totalitatea dreptelor situate în cele două planuri normale care coincid și care trec prin punctul de contact. În cel de al cincilea caz (contactul curbă-punct) normala comună este de asemenea nedeterminată; în acest caz vom considera ca mulțime a normalelor totalitatea dreptelor situate în planul normal la curba exterioară corpului care participă la contact cu curba, în punctul de contact. În fine, în cel de al șaselea caz (contactul punct-punct) normala este de asemenea nedeterminată; și în acest caz vom considera ca mulțime a normalelor totalitatea normalelor posibile, care trec prin punctul ce reprezintă zona de contact; aceste normale formează un fascicol de drepte concurente în spațiu.

Rezultatele obținute în cele de mai sus prezintă o deosebită importanță atît pentru analiza cinetostatică a legăturilor solidului, cît și pentru sinteza acestor legături, datorită pe de o parte generalității lor, iar pe de altă parte simplității în ce privește aplicarea lor la cazurile practice. Metodica analizei cinetostatice a legăturilor solidului prin aplicarea teoriei mulțimilor de șuruburi geometrice este, în esență, următoarea:

— se determină forma geometrică a zonei de contact a celor două corpuri care se îmbină în legătura respectivă;

— se determină configurația geometrică a normalelor în punctele zonei de contact;

— se determină rangul mulțimii normalelor, care reprezintă totodată și clasa legăturii respective sau gradul său de staticitate;

— se determină numărul legăturilor pasive ale legăturii respective ca diferența dintre numărul normalelor care alcătuește mulțimea și rangul acestei mulțimi;

— se determină mulțimea mișcărilor relative posibile a celor două corpuri, ca fiind mulțimea reciprocă mulțimii normalelor în punctele zonei de contact;

— se determină rangul mulțimii mișcărilor posibile relative a celor două corpuri; ele reprezintă gradul de mobilitate al legăturii respective. Dacă se caută numai gradul de mobilitate al legăturii respective, fără a se cerceta și care este configurația mulțimii de șuruburi geometrice care reprezintă mișcările relative a celor două corpuri, el se poate obține cu formula simplă:

$$m = 6 - r^* \qquad (19)$$

— Se determină numărul de mobilități supraabundente al legăturii respective, ca diferența dintre numărul axelor centrale ale șuruburilor care reprezintă mișcările relative ale celor două corpuri și rangul mulțimii mișcărilor relative;

— se determină legătura static echivalentă și cinematic echivalentă, legăturii date, alegînd dintre fiecare din cele două mulțimi de șuruburi geometrice care reprezintă respectiv interacțiunile și mișcările relative, cîte un număr de șuruburi egal cu rangul mulțimii respective și a căror configurație este aceeași ca a mulțimii inițiale.

Din cele de mai sus se observă că, cu ajutorul teoriei mulțimilor de șuruburi geometrice se poate efectua un studiu cinetostatic al legăturilor solidului, care este în același timp foarte general și ușor de aplicat la cazurile întîlnite în practică. În cele ce urmează vom prezenta cîteva exemple simple privind analiza cinetostatică a legăturilor unui solid.

Exemple. Să considerăm legătura reprezentată în fig. 22; zona de contact a acestei legături este formată din două porțiuni de plan; reacțiunile formează o mulțime infinită al căror rang este $r^* = 5$. Rezultă deci că gradul de staticitate (clasa) acestei cuple, este cinci. Ea are un număr infinit de mare de legături pasive. Mulțimea mișcărilor relative posibile ale acestei legături este formată de mulțimea șuruburilor geometrice reciproce șuruburilor geometrice ale reacțiunilor; ea este formată din dreapta de la infinit a planului normal pe muchia de intersecție a celor două plane, care formează zona de contact. Rezultă deci că corpurile care se îmbină în această cuplă au posibiiltatea de a executa o singură mișcare relativă, care este o translație avînd direcția paralelă cu muchia de intersecție a planelor, care formează zona de contact. Rangul mulțimii mișcărilor relative (gradul de mobilitate al legăturii) este 1. Această legătură nu are mobilități supraabundente

întrucît există o singură mișcare posibilă și diferența dintre rangul mulțimii mișcărilor relative și numărul mișcărilor relative este nulă.

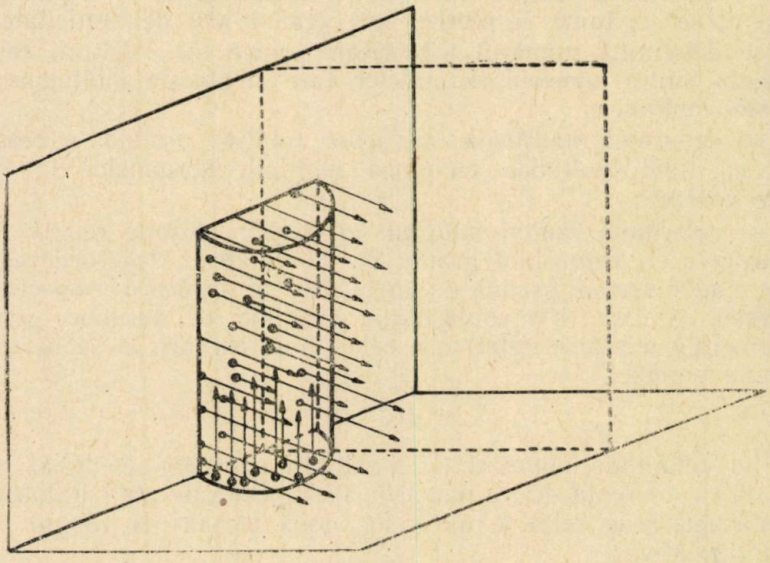


Fig. 22

În fig. 23 este arătat exemplul unei legături folosite foarte adesea în teoria mecanismelor, așa numita legătură prin sfera cu deget. Zona

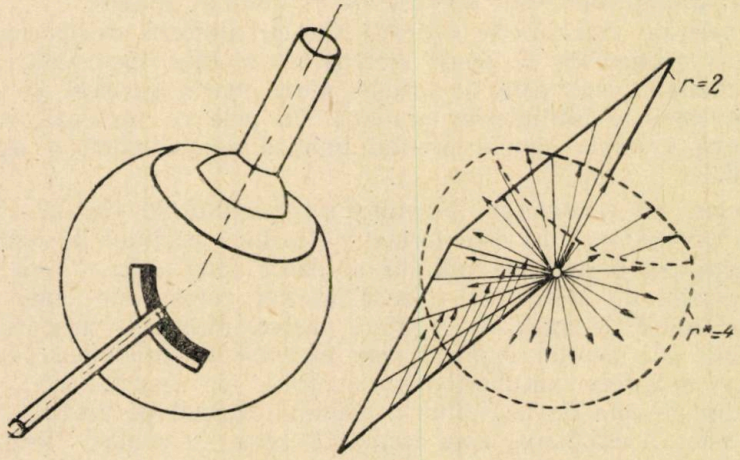


Fig. 23

de contact a acestei legături este formată dintr-o porțiune de sferă la care se adaugă un segment de dreaptă ; mulțimea reacțiunilor formează configurația arătată în fig. 47, configurația avînd rangul $r^* = 4$. Rezultă

deci că această legătură este de clasa a patra. Ea are o infinitate de legături pasive. Mulțimea mișcărilor relative posibile a celor două corpuri care se îmbină în această legătură, este mulțimea reciprocă mulțimii șuruburilor geometrice care reprezintă interacțiunile; ea este formată dintr-un fascicol, de drepte concurente situate în planul ce conține porțiunea rectilinie a zonei de contact și centrul sferei. Rangul acestei

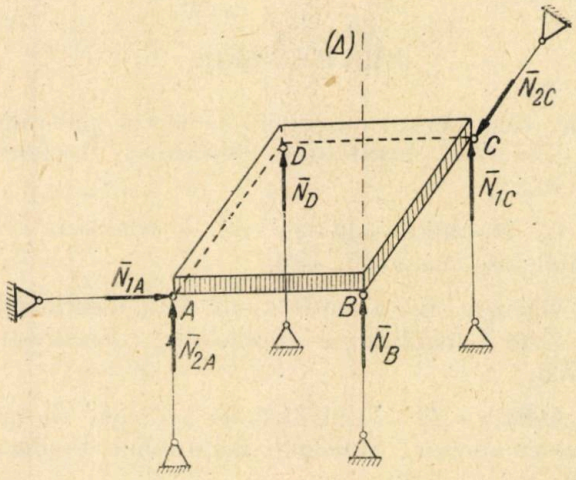


Fig. 24

mulțimi, care reprezintă gradul de mobilitate al legăturii este doi. Legătura are un număr infinit de mișcări suprabundente.

În fig. 24 este reprezentat exemplul din fig. 8, lucrarea [1]. Corpul este supus unei legături prin șase reazeme punctuale; numărul reacțiunilor este în acest caz $r^* = 6$. Configurația lor geometrică are rangul $r^* = 5$. Diferența dintre numărul reacțiunilor și rangul configurației lor este $N = 1$; rezultă deci că corpul are o legătură pasivă. Mulțimea reciprocă (mulțimea șuruburilor geometrice care reprezintă mișcările relative) are rangul $r = 1$; rezultă că această legătură are un grad de mobilitate. Corpul considerat poate executa o mișcare de rotație în poziția din figură, în jurul axei Δ. Deoarece într-o poziție infinit vecină, configurația mulțimii reacțiunilor se schimbă, rezultă că legătura din fig. 24 este o legătură critică pentru corpul considerat. Analiza acestui caz prezintă interes pentru statica construcțiilor. Din analiza acestor exemple se remarcă simplitatea aplicării metodei teoriei mulțimilor de șuruburi geometrice la analiza cinetostatică a legăturilor unui corp, cît și generalitatea ei evidentă, cerințe importante pe care nu le satisface nici una din metodele de analiză cinetostatică a legăturilor solidului, cunoscute pînă în prezent.

Aplicarea ei în continuare la studiul sintezei legăturilor solidului, cît și analiza și sinteza structurală a sistemelor de corpuri constituie de asemenea probleme importante aupra cărora vom reveni într-o lucrare viitoare.

Catedra de Mecanică Teoretică
Institutul Politehnic din București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Atanasiu M.*: Considerații cu privire la teoria generală a legăturilor solidului, Buletinul Institutului Politehnic, București, Tom XIV fasc. 2, 1962.

[2] *Suslov G. K.*: Mecanica rațională vol. I, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, București, 1960.

[3] *Voinea R., Atanasiu M.*: Contributions à la théorie géométrique des vis, Buletinul Institutului Politehnic, București, Tom XXI, No. 3, 1959.

[4] *Voinea R., Atanasiu M.*: Contributions à l'étude de la structure des chaînes cinématiques, Buletinul Institutului Politehnic București, Tom XXII, No. 1, 1960.

ИЗУЧЕНИЕ ПОДВИЖНОСТИ И СТЕПЕНИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕРГАЕМОГО СВЯЗЯМ ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВИНТОВ

(Краткое изложение)

В работе излагается применение теории множеств геометрических винтов (которую разработал Тов. доц. Р. Войня в сотрудничестве с автором и которая была опубликована в Н°. 3/1959 г. Вюлетена Бухарестского Политехнического Института) к изучению подвижности и степени статической неопределенности твердого тела, подвергаемого связям без трения.

Это изучение представляет собой новую точку зрения, которая позволяет общую классификацию связей твердого тела по геометрической форме области соприкосновения двух тел, соединяющихся между собой соответствующей связью.

Результаты работы находят себе применения в теоретической механике, в сопротивлении материалов, в статике конструкции и в теории механизмов.

A STUDY OF THE MOBILITY AND DEGREE OF STATICAL INDETERMINATION OF A RIGID SOLID BODY SUBJECTED TO CONSTRAINTS BY MEANS OF THE THEORY GEOMETRICAL SCREWS

(Summary)

In this paper are given the applications of the theory of geometrical screws to the study of the mobility and of the degree of statical indetermination of a rigid solid body subjected to constraints without friction. This theory is the result of the work of collaboration between R. Voinea Professor at the Polytechnic Institute of Bucharest and the author of this paper, and has been published in No 3/1959 of the Bulletin of the I.P.B.

Thes study gives a new point of view, which allows a general classification of the constraints of the solid body according to the geometric form of the zone of contact between the two bodies related by the respective constraint. The results of this work can be applied in theoretical Mechanics, Strength of Materials, in the Statics of Constructions and the theory of Mechanisms.

ETUDE DE LA MOBILITÉ ET DU DEGRÉ D'INDÉTERMINATION STATIQUE D'UN CORP SOLIDE, RIGIDE SOUMIS A DES LIAISONS, A L'AIDE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE VIS GÉOMETRIQUES

(Résumé)

Dans cette étude, sont montrées les applications de la théorie des vis géométriques à l'étude de la mobilité et du degré d'indétermination statique d'un corps solide, rigide soumis à des liaisons sans frottment. Cette théorie a été ellaborée par R. Voinea maître de conférences à l'Institut Polytechnique de Bucarest en collaboration avec l'auteur de cet article et a été publiée dans le No. 3/1959 du Bulletin de l'Institut Polytechnique de Bucarest.

Cette étude constitue un point de vue nouveau, qui permet une clasification générale des liaisons du corp solide, selon la forme géométrique de la zone de contact des deux corps soumi à la liaison respective. Les résultats de la théorie ont des applications en mécanique théoretique, dans la Résistance des matériaux, la Statique des constructions et la Théorie des mécanismes.

STUDIUM DER BEWEGLICHKEIT UND DES STATISCHEN UNBESTIMMTHEITSGRADES EINES FESTEN UND STARREN KORPERS MIT HILFE DER THEORIE DER GEOMETRISCHEN SCHRAUBENMENGEN

(Zusammenfassung)

In der Arbeit wird die Anwendung der Theorie der geometrischen Schraubenmengen, nach der von genossen Conf. R. Voinea in Insammenarbeit mit dem Autor ansgeorbeiteten und im Buletin I.P.B. Nr. 3/1959 veröffentlichten Theorie zum Studium der Beweglichkeit und des statischen Unbestimmtheistgrades eines festen und starren Körpers, der einer reibungslosen Verbindung ausgesetzt ist.

Dieses Studium ist eine neue Ansicht, welche eine allgemeine Klassifizierung der Verbindungen der festen Körper nach der geometrischen Form der Berührungzone der zwei Körper gestattet, welche durch die betreffende Verbindungzusammengehalten werden.

Die Ergebnisse der Arbetit werden in der theoretischen Mechanik, in der Festigkeitslehre, in der Statik der Baukonstruktionen und in der Theorie der Mechanismen angewendete.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tom XXIV — 1962, Fascicola 3

CIRCULAR SYMMETRICALLY LOADED PLATES OF CONSTANT AND VARIABLE THICKNESS, CALCULATED BY THE THREE UNKNOWNS METHOD *

M. BLUMENFELD

The solving of many a problem of the strength of materials such as: the deflection of beams, stresses in rotating discs and circular symmetrically loaded plates, is based upon the integration of an ordinary differential equation. The integration of this differential equation is an easy matter, while the load and the cross section of the specimen (beam, plate, disc) are constant or vary continuously. When these conditions are not fullfilled (the charge or the cross section vary discontinuously), the entire problem can be solved only by integrating many times the differential equation taking into account the variations of both the cross section and the charge. The difficulty in solving such a problem is to find the arbitrary constants which appear form n differential equations already integrated.

In order to eliminate this difficulty many special methodes have been established, each of them appropriate for one of the problems previously mentioned.

The method of the three unknowns dealt with in some previous papers [1], [2], solves all these various problems in the same way: the element to be calculated is divided into groups of two intervals; on each of them the cross section and the charge are — or may be considered to be — constant. At the end sections of these two intervals three unknowns (deflections, bending moments, stresses) are chosen; these unknowns are introduced in a relation which may be applied to each group of two intervals, into which the element has been divided. In this way an equation system is obtained, the roots of which are the unknowns previously chosen.

There is an analogy between this method and „the equation of the three moments", which is only a particular case used for continuous beams.

* Manuscript received on October 25, 1962.

1. *Bending moments in the circular symmetrically loaded plates*

From a symmetrically loaded plate (fig. 1 *a*), an element is cut out which is plotted in fig. 1 *b*; the following bending moments act on it (the shearing forces are not represented).

M_t — the bending moment per unit length acting along cylindrical sections;

M_r — the bending moment acting along diametral sections.

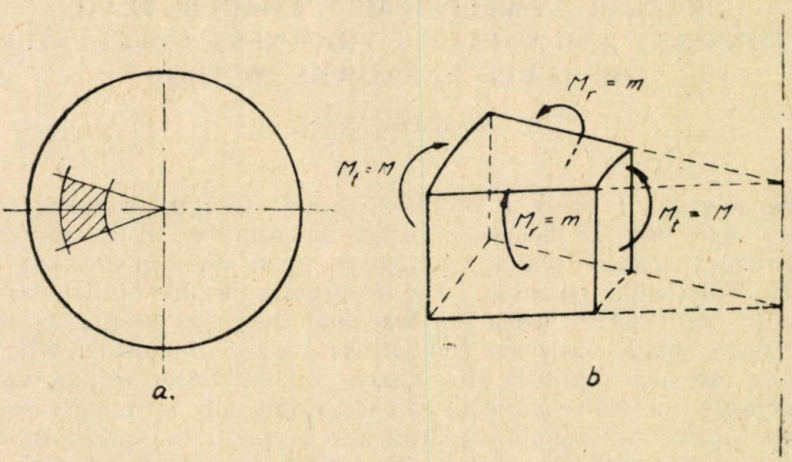


Fig. 1

In order to simplify the equations to be obtained, the following notations are made:

$$\begin{cases} M_t = M \\ M_r = m \end{cases} \tag{1}$$

These notations were used in fig. 1 *b*.

Fig. 2 represents half of a circular symmetrically loaded plate. The plate comprises two differently charged rings i and i+1. The following notations were used:

— the external radius has the same index as the ring (R_i the external radius of the ring i;

— the uniformly distributed load has two indices ($p_{i-1,\,i}$ represents the load which acts betwwen the i—1 and i radii).

— P_i represents the load applied along the ricle of radius R_i;

— the bending moment has the same index as the radius on which it acts (M_i and m_i at the radius R_i);

— the thickness of the plate has the same index as the ring (h_i for the ring i);

— φ represents the slope of the deflection surface at any radius r.

The equations for the bending moments of a circular plate are the following [4]

$$\begin{cases} M = M_t = D\left(\dfrac{d\varphi}{dr} + \mu\dfrac{\varphi}{r}\right) \\ m = M_r = D\left(\dfrac{\varphi}{r} + \mu\dfrac{d\varphi}{dr}\right) \end{cases} \tag{2}$$

where

$$D = \frac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)} \tag{3}$$

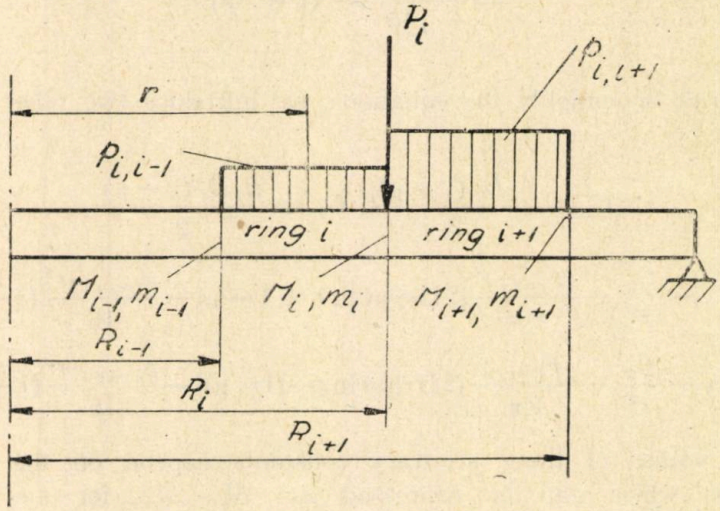


Fig. 2

The slope φ obtained by the integration of the differential equation of the circular symmetrically loaded plates is (the notation is for the i ring)

$$\varphi = \frac{A_i\, r}{2} + \frac{B_i}{r} - \frac{F_{i-1,i}\cdot r}{8\pi D_i}(2\ln r - 1) - \frac{p_{i-1,i}\cdot r^3}{16\, D_i} \tag{4}$$

where A_i and B_i are two arbitrary constants, and the value of $F_{i-1,i}$ will be given later.

From relation (4) we obtain

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dr} = \dfrac{A_i}{2} - \dfrac{B_i}{r^2} - \dfrac{F_{i-1,i}}{8\pi D_i}(2\ln r + 1) - \dfrac{3\,pr^2}{16\, D_i} \\ \dfrac{\varphi}{r} = \dfrac{A_i}{2} + \dfrac{B_i}{r^2} - \dfrac{F_{i-1,i}}{8\pi D_i}(2\ln r - 1) - \dfrac{pr^2}{16\, D_i} \end{cases}$$

Substituting these values in equation (2) we obtain

$$\begin{cases} M = M_t = \dfrac{A_i D_i (1+\mu)}{2} - \dfrac{B_i D_i (1-\mu)}{r^2} - \dfrac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln r + 1 - \mu] - \\ \qquad - \dfrac{p_{i-1,i} \cdot r^2}{16}(3+\mu) \\ m = M_r = \dfrac{A_i D_i (1+\mu)}{2} + \dfrac{B_i D_i (1-\mu)}{r^2} - \dfrac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln r - (1-\mu)] - \\ \qquad - \dfrac{p_{i-1,i} \cdot r^2}{16}(1+3\mu) \end{cases} \tag{5}$$

In order to simplify the equations, we introduce two other arbitrary constants

$$C_1 = \frac{A_i D_i (1+\mu)}{2}; \quad C_2 = \frac{B_i D_i (1-\mu)}{2}$$

$$\begin{cases} M = C_1 - \dfrac{C_2}{r^2} - \dfrac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln r + 1 - \mu] - \dfrac{p_{i-1,i} \cdot r^2}{16}(3+\mu) & (6) \\ m = C_1 + \dfrac{C_2}{r^2} - \dfrac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln r - (1-\mu)] - \dfrac{p_{i-1,i} \cdot r^2}{16}(1+3\mu) & (7) \end{cases}$$

The values of these arbitrary constants depend on the boundary conditions which can be expressed as: $M = M_{i-1}$ for $r = R_{i-1}$ and $M = M_i$ for $r = R_i$ Sustitution of these values in equation (6) will give a system of two equations, the roots of which are the two arbitrary constants

$$C_1 = \frac{M_i R_i^2 - M_{i-1} R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + \frac{F_{i-1,i}(1+\mu)}{4\pi}(R_i^2 \ln R_i - R_{i-1}^2 \ln R_{i-1}) +$$

$$+ \frac{F_{i-1,i}(1-\mu)}{8\pi} + \frac{p_{i-1,i}}{16}(3+\mu)(R_i^2 + R_{i-1}^2)$$

$$C_2 = \frac{F_{i-1,i}(1+\mu) \cdot R_i^2 \cdot R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}} + \frac{p_{i-1,i}}{16}(3+\mu) R_i^2 \cdot R_{i-1}^2 +$$

$$+ \frac{(M_i - M_{i-1}) R_i^2 R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2}$$

Then the bending moment $M_r = m$ is obtained, by the substitution of these two constants in the equation (7). From this new equation we obtain the bending moments m_{i-1} and m_i':

— the bending moment at the inner part of the ring i $(r = R_{i-1})$

$$m_{i-1} = \frac{2M_i R_i^2 - M_{i-1}(R_i^2 + R_{i-1}^2)}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + \frac{F_{i-1,i}}{4\pi}\left[\frac{2(1+\mu)R_i^2 \ln\frac{R_i}{R_{i-1}}}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + 1 - \mu\right] + \frac{p_{i-1,i}}{8}\left[R_i^2(3+\mu) + R_{i-1}^2(1-\mu)\right] \quad (8)$$

— the bending moment at the outer part of the ring i $(r = R_i)$

$$m_i' = \frac{M_i(R_i^2 + R_{i-1}^2) - 2M_{i-1}R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + \frac{F_{i-1,i}}{4\pi}\left[\frac{2R_{i-1}^2(1+\mu)\ln\frac{R_i}{R_{i-1}}}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + 1 - \mu\right] + \frac{p_{i-1,i}}{8}\left[R_i^2(1-\mu) + R_{i-1}^2(3+\mu)\right] \quad (9)$$

We can also obtain at the radius R_i, but at the inner part of the ring $i+1$, the bending moment m_i'', increasing by 1 all the indices of the equation (8)

$$m_i'' = \frac{2M_{i+1}R_{i+1}^2 - M_i(R_{i+1}^2 + R_i^2)}{R_{i+1}^2 - R_i^2} + \frac{F_{i,i+1}}{4\pi}\left[\frac{2R_{i+1}^2(1+\mu)\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}}{R_{i+1}^2 - R_i^2} + 1 - \mu\right] + \frac{p_{i,i+1}}{8}\left[R_{i+1}^2(3+\mu) + R_i^2(1-\mu)\right] \quad (10)$$

2. *The relation between the bending moments at the radius* R_i.

A portion of a circular plate comprising the rings i and $i+1$ is plotted in figure 3. The section $r = R_i$ is a discontinuity point for the load and the thickness of the plate: the thickness of the two rings is different (h_i and h_{i+1}) and a couple ω_i uniformly distributed is applied along the whole circle of radius R_i. A relation will be established at this point between the bending moment calculated for the ring i (noted with the index′) and that calculated for the ring $i+1$ (noted with the index″). The following conditions will be used for this purpose

a. The condition of slope continuity

$$\varphi_i' = \varphi_i'' \quad (11)$$

b. The sum of the bending moment M_i'' at the inner part of the ring $i+1$ and the couple ω_i is equal with the bending moment M_i' at the outer part of the ring i

$$M_i' = M_i'' + \omega_i . \tag{12}$$

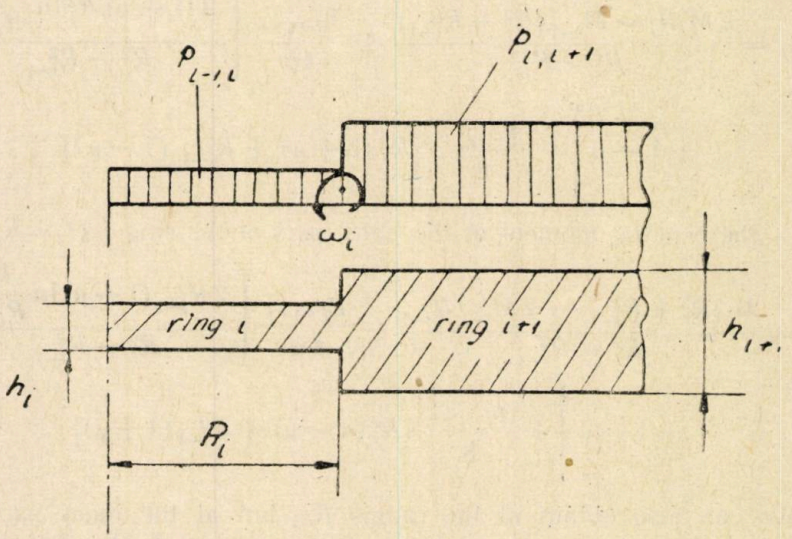


Fig. 3

When $\omega_i = 0$ the condition is

$$M_i' = M_i'' \tag{13}$$

Using the equation (2) we multiply M by μ and then substract m; we obtain

$$m - \mu M = D\left[\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr} - \mu\frac{d\varphi}{dr} - \mu^2\frac{\varphi}{r}\right] = D(1-\mu^2)\frac{\varphi}{r} \tag{14}$$

This equation may be utilized to join together the conditions (11) and (12), in a single relation comprising only the bending moments. This relation will be applied to the radius R_i, where

— for the ring i

$$m_i' - \mu M_i' = D_i(1-\mu^2)\frac{\varphi_i'}{R_i} = E h_i^3\frac{\varphi_i'}{R_i} \tag{15}$$

— for the ring $i+1$

$$m_i'' - \mu M_i'' = D_{i+1}(1-\mu^2)\frac{\varphi_i''}{R_i} = E h_{i+1}^3\frac{\varphi_i''}{R_i} \tag{16}$$

We obtain, by using the equations (11), (12), (15), (16)

$$m_i' - \lambda_i m_i'' = M_i'' \mu (1 - \lambda_i) \tag{17}$$

where [1])

$$\lambda_i = \left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)^3 \tag{18}$$

3. *The equation based on the three unkwons method for the circular symmetrically loaded plates*

By substituting in the equation (17) the bending moments m_i' (at the outer part of the ring i) from the equation (9) [2] and m_i'' (at the inner part of the ring $i+1$) from the equation (10), we obtain

$$-M_{i-1}\frac{2R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + M_i''\left[\frac{R_i^2 + R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} - \mu + \lambda_i\left(\frac{R_{i+1}^2 + R_i^2}{R_{i+1}^2 - R_i^2} + \mu\right)\right] -$$

$$- M_{i+1}\lambda_i \frac{2R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2 - R_i^2} =$$

$$= -\frac{F_{i-1,i}}{4\pi}\left[\frac{2R_{i-1}^2(1+\mu)\ln\frac{R_i}{R_{i-1}}}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + 1 - \mu\right] -$$

$$- \frac{p_{i-1,i}}{8}\left[R_i^2(1-\mu) + R_{i-1}^2(3+\mu)\right] +$$

$$+ \lambda_i \frac{F_{i,i+1}}{4\pi}\left[\frac{2R_{i+1}^2(1+\mu)\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}}{R_{i+1}^2 - R_i^2} + 1 - \mu\right] +$$

$$+ \lambda_i \frac{p_{i,i+1}}{8}\left[R_{i+1}^2(3+\mu) + R_i^2(1-\mu)\right] - \omega_i\left(\frac{R_i^2 + R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} - \mu\right) \tag{19}$$

Supposing that there are not couples applied on the plate ($\omega_i = 0$) and if

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{R_i}{R_{i-1}} \\ \alpha_{i+1} = \dfrac{R_{i+1}}{R_i} \end{cases} \tag{20}$$

1. At the external radius of the whole plate

$$\lambda_{ext} = 1$$

2. According to equation (12), we substitute $M_i = M_i' = M_i'' + \omega_i$ in the equation (9).

we obtain

$$-M_{i-1}\frac{2}{\alpha_i^2-1}+M_i\left[\frac{\alpha_i^2+1}{\alpha_i^2-1}-\mu+\lambda_i\left(\frac{\alpha_{i+1}^2+1}{\alpha_{i+1}^2-1}-\mu\right)\right]-$$

$$-M_{i+1}\cdot\mu\frac{2\alpha_{i+1}^2}{\alpha_{i+1}^2-1}=$$

$$=-\frac{F_{i-1,i}}{4\pi}\left[\frac{2}{\alpha_i^2-1}(1+\mu)\ln\frac{R_i}{R_{i-1}}+1-\mu\right]+$$

$$+\lambda_i\frac{F_{i,i+1}}{4\pi}\left[\frac{2\alpha_{i+1}^2}{\alpha_{i+1}^2-1}(1+\mu)\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}+1-\mu\right]-$$

$$-\frac{p_{i-1,i}}{8}[R_i^2(1-\mu)+R_{i-1}^2(3+\mu)]+\lambda_i\frac{p_{i,i+1}}{8}[R_{i+1}^2(3+\mu)+R_i^2(1-\mu)] \tag{21}$$

Using the notation[1]

$$\begin{cases}\psi_i=\dfrac{\alpha_i^2+1}{\alpha_i^2-1}\\ \psi_{i+1}=\dfrac{\alpha_{i+1}^2+1}{\alpha_{i+1}^2-1}\end{cases} \tag{22}$$

the equation (21) becomes

$$-(\psi_i-1)M_{i-1}+[\psi_i-\mu+\lambda_i(\psi_{i+1}+\mu)]M_i-(\psi_{i+1}+1)\lambda_i M_{i+1}=$$

$$=-\frac{F_{i-1,i}}{4\pi}[(\psi_i-1)(1+\mu)\ln\alpha_i+1-\mu]+$$

$$+\lambda_i\frac{F_{i,i+1}}{4\pi}[(\psi_{i+1}+1)(1+\mu)\ln\alpha_{i+1}+1-\mu]-$$

$$-\frac{p_{i-1,i}}{8}[R_i^2(1-\mu)+R_{i-1}^2(3+\mu)]+$$

$$+\lambda_i\frac{p_{i,i+1}}{8}[R_{i+1}^2(3+\mu)+R_i^2(1-\mu)] \tag{23}$$

1. The same function (22) has been calculated for different values of ψ_i in the author's paper [2], where it has been applied for the calculation of the rotating discs.

For a steel plate the Poisson's ratio $\mu=0,3$ and the relation (23) becomes

$$\begin{aligned}-(\psi_i-1)M_{i-1}+[\psi_i-0,3+\lambda_i(\psi_{i+1}+0,3)]M_i-(\psi_{i+1}+1)\lambda_i M_{i+1}=\\ =-0,0796\,F_{i-1,i}[1,3(\psi_i-1)\ln\alpha_i+0,7]+\\ +0.0796\,\lambda_i F_{i,i+1}[1,3(\psi_{i+1}+1)\ln\alpha_{i+1}+0,7]-\\ -0,125\,p_{i-1,i}(0,7R_i^2+3,3R_{i-1}^2)+\\ +0,125\,\lambda_i p_{i,i+1}(3,3R_{i+1}^2+0,7R_i^2)\end{aligned}\tag{24}$$

If the plate has a constant thickness $\lambda_i=1$, the relation (23) will become

$$\begin{aligned}-(\psi_i-1)M_{i-1}+(\psi_i+\psi_{i+1})M_i-(\psi_{i+1}+1)M_{i+1}=\\ =-\frac{F_{i-1,i}}{4\pi}[(\psi_i-1)(1+\mu)\ln\alpha_i+1-\mu]+\\ +\frac{F_{i,i+1}}{4\pi}[(\psi_{i+1}+1)(1+\mu)\ln\alpha_{i+1}+1-\mu]-\\ -\frac{p_{i-1,i}}{8}[R_i^2(1-\mu)+R_{i-1}^2(3+\mu)]+\\ +\frac{p_{i,i+1}}{8}[R_{i+1}^2(3+\mu)+R_i^2(1-\mu)]\end{aligned}\tag{25}$$

The previous relations must be applied at every change of the thickness and at every change of load; adding the two equations given by the boundary conditions, an equation system is obtained, the roots of which represent the bending moments M at every point where the relations have been applied. A simple way to solve this equation system (with Iakobi matrix) is given in a previous paper [1]. The bending moments m' at the outside part of every ring, may be now calculated using[1] the relation (9), and the bending moments m'' at the inside part of every ring with the relation (8). The latter may be also calculated from equation (17), which can be written in the convenient form

$$m_i''=\frac{m_i'-M_i\mu(1-\lambda_i)}{\lambda_i}\tag{26}$$

4. *The calculation of the force F*

In order to find the force $F_{i-1,i}$, which appears in the previous equations, we utilize the defintion of the shearing force for a circular plate [4]: the shearing force on a circle of radius r — the value of which is $2\pi rT$— is the sum of the loads found inside the circle; then

$$T=\frac{F_{i-1,i}}{2\pi r}+\frac{p_{i-1,i}\cdot r}{2}\tag{27}$$

1. The equations (8) and (9) can be simplified, by using the notations (20) and (22).

If F_{i-1} means the sum of the forces which are *inside the circle of radius* R_{i-1} and

F_i the sum of the forces *inside the circle of radius* R_i, we find at any section of the plate (fig. 4) the following relation

$$2\pi r\, T = F_{i-1} + \pi (r^2 - R_{i-1}^2)\, p_{i-1,\,i} = F_{i-1} - \pi R_{i-1}^2\, p_{i-1,\,i} + \pi r^2\, p_{i-1,\,i}$$

or

$$T = \frac{F_{i-1} - \pi R_{i-1}^2\, p_{i-1,\,i}}{2\pi r} + \frac{p_{i-1,\,i} \cdot r}{2} \tag{28}$$

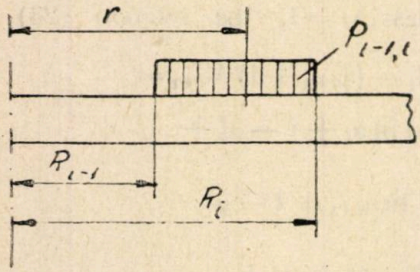


Fig. 4

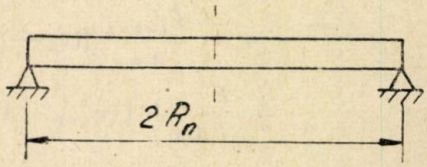


Fig. 5

By identifying the relations (27) and (28) we find that:

$$F_{i-1,\,i} = F_{i-1} - \pi R_{i-1}^2\, p_{i-1,\,i} \tag{29}$$

Because

$$F_i = F_{i-1} + \pi (R_i^2 - R_{i-1}^2)\, p_{i-1,\,i}$$

$F_{i-1,\,i}$ can be also expresed in the form

$$F_{i-1,\,i} = F_i - \pi R_i^2\, p_{i-1,\,i} \tag{30}$$

5. *Boundary conditions*

We give below the relations corresponding to different boundary conditions. By using the relations (8) and (9) these boundary conditions will be transformed into relations between the unkown bending moments which act on the plate. These two relations must be added to the equation system previously found.

a. *Plate simply supported at the edge* (Fig. 5)

1. At the outside radius of the plate the bending moment $M = M_t$ is zero

2. At the centre of the plate there is equality between the two bending moments M and m

$$M_0 = m_0$$

The bending moment m_0 at the centre of the plate is given by the relations (8), substituting $i = 1$

$$m_0 = \frac{2 M_1 R_1 - M_0 (R_1^2 + R_0^2)}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{F_{0,1}}{4\pi} \left[\frac{2 (1 + \mu) R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_0}}{R_1^2 - R_0^2} + 1 - \mu \right] +$$

$$+ \frac{p_{0,1}}{8} [R_1^2 (3 + \mu) + R_0^2 (1 - \mu)]$$

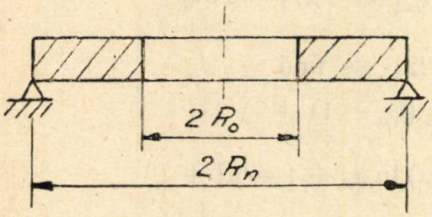


Fig. 6

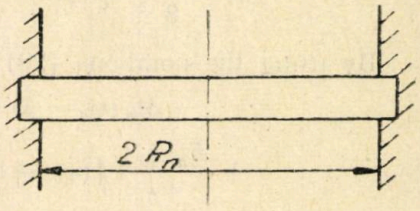


Fig. 7

Because $R_0 = 0$ and $F_{01} = 0$ (see equation 30 where[1] $F_0 = 0$), we obtain the relation

$$M_0 = M_1 + \frac{p_{0,1} R_1^2 (3 + \mu)}{16} \tag{32}$$

b. *Plate simply supported at the edge, with a circular hole at the centre* (Fig. 6)

In that case, both bending moments M — at the inside and and outside radius of the plate — are zero.

$$M_0 = 0 \tag{33}$$

$$M_n = 0 \tag{34}$$

c. *Plate clamped at the edge* (fig. 7)

1. We can apply at the centre of the plate the relation (32).

2. The slope φ_n at the clamped edge of the plate is equal to zero. We find from the equation (12) the condition

$$m_n = \mu M_n$$

[1] We consider that there is no concentrated load on the centre of the plate.

The substitution of this into the equation (9) gives the bending moment at the edge of the plate (index $i = n$)

$$m_n = \frac{M_n (R_n^2 + R_{n-1}^2) - 2 M_{n-1}^2 R_{n-1}^2}{R_n^2 - R_{n-1}^2} +$$

$$+ \frac{F_{n-1,\,n}}{4\pi} \left[\frac{2 R_{n-1}^2 (1+\mu) \ln \frac{R_n}{R_{n-1}}}{R_n^2 - R_{n-1}^2} + 1 - \mu \right] +$$

$$+ \frac{p_{n-1,\,n}}{8} [R_n^2 (1-\mu) + R_{n-1}^2 (3+\mu)] = \mu M_n$$

By using the notations (20) and (22) we find

$$M_n (\psi_n - \mu) - M_{n-1} (\psi_n - 1) +$$

$$+ \frac{F_{n-1,\,n}}{4\pi} [(\psi_n - 1)(1+\mu) \ln \alpha_n + 1 - \mu] +$$

$$+ \frac{p_{n-1,\,n}}{8} [R_n^2 (1-\mu) + R_{n-1}^2 (3+\mu)] = 0 \qquad (35)$$

d. *Plate clamped at the edge, with a circular hole at the centre* (fig. 8)

We can apply at the inside radius of the plate the equation (33) and at the edge the edge the equation (35).

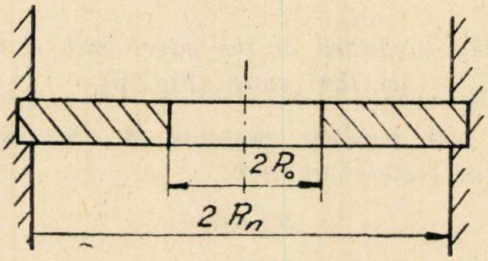


Fig. 8

e. *Plate with inner edge built in* (fig. 9)

1. At the external radius of the plate the bending moment $M_t = M = 0$ (eq. 31).

2. At the inner edge ($r = R_0$) the slope is zero ($\varphi_0 = 0$). We obtain from the equation (14) the condition

$$m_0 = \mu M_0$$

Substituting this value into the equation (8) (index $i = 1$), we find the bending moment at the inner edge

$$m_0 = \frac{2 M_1 R_1^2 - M_0 (R_1^2 + R_0^2)}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{F_{0,1}}{4\pi} \left[\frac{2 (1 + \mu) R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_0}}{R_1^2 - R_0^2} + 1 - \mu \right] +$$

$$+ \frac{p_{0,1}}{8} [R_1^2 (1 - \mu) + R_0^2 (3 + \mu)] = \mu M_0$$

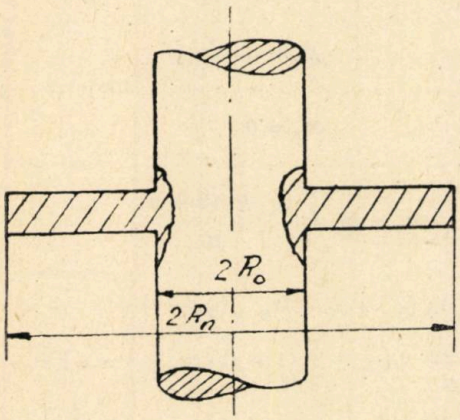


Fig. 9

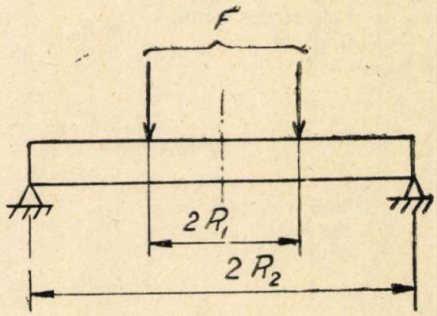


Fig. 10

Using the notations (22) and (24) we find

$$M_1 (\psi_1 + 1) - M_0 (\psi_1 + \mu) + \frac{F_{0,1}}{4\pi} [(\psi_1 + 1)(1 + \mu) \ln \alpha_1 + 1 - \mu] +$$

$$+ \frac{p_{0,1}}{8} [R_1^2 (1 - \mu) + R_0^2 (3 + \mu)] = 0 \qquad (36)$$

All these conditions are shown in table 1.

6. *Bending of the circular plates of constant thickness*

We shall apply the equations previously established, to some circular plates of constant thickness. The three unknowns equation to be applied is (25).

a. *Plate simply supported at the edge, the load uniformly distributed along a circle of radius* R_1 (fig. 10). The equation (25) with the index $i = 1$ becomes

$$- (\psi_1 - 1) M_0 + M_1 (\psi_1 + \psi_2) - (\psi_2 + 1) M_2 =$$

$$= \frac{F}{4\psi} \left[(\psi_2 + 1) (1 + \mu) \ln \frac{R_2}{R_1} + 1 - \mu \right]$$

Table 1

Nr.	The plate	Radius	The boundary conditions
1	Plate simply supported at the edge (Fig. 5)	$r = R_n$	$M_n = 0$
		$r = 0$	$M_0 = M_1 + \frac{p_{0,1} R_1^2 (3+\mu)}{16}$
2	Plate simply supported at the edge, with a circular hole at the centre (Fig. 6)	$r = R_0$	$M_0 = 0$
		$r = R_n$	$M_n = 0$
3	Plate clamped at the edge (Fig. 7)	$r = 0$	$M_0 = M_1 + \frac{p_{0,1} R_1^2 (3+\mu)}{16}$
		$r = R_n$	$M_n(\psi_n - \mu) - M_{n-1}(\psi_n - 1) + \frac{F_{n-1,n}}{4\pi}[(\psi_n - 1)(1+\mu) l_n \alpha_n + 1 - \mu] + \frac{p_{n-1,n}}{8}\left[R_n^2(1-\mu) + R_{n-1}^2(3+\mu)\right] = 0$
4	Plate clamped at the edge, with a circular hole at the centre (Fig. 8)	$r = R_0$	$M_0 = 0$
		$r = R_n$	$M_n(\psi_n - \mu) - M_{n-1}(\psi_n - 1) + \frac{F_{n-1,n}}{4\pi}[(\psi_n - 1)(1+\mu) l_n \alpha_n + 1 - \mu] + \frac{p_{n-1,n}}{8}\left[R_n^2(1-\mu) + R_{n-1}^2(3+\mu)\right] = 0$
5	Plate with inner edge built in (Fig. 9)	$r = R_0$	$M_1(\psi_1 + 1) - M_0(\psi_1 + \mu) + \frac{F_{0,1}}{4\pi}[(\psi_1 + 1)(1+\mu) l_n \alpha_1 + 1 - \mu] + \frac{p_{0,1}}{8}\left[R_1^2(1-\mu) + R_0^2(3+\mu)\right] = 0$
		$r = R_n$	$M_n = 0$

because (see eq. 29)

$$p_{0,1} = p_{1,2} = 0$$

$$F_{0,1} = F_0 - \pi R_0^2 p_{0,1} = 0$$

$$F_{1,2} = F_1 - \pi R_1^2 p_{1,2} = F$$

We have also $\psi_1 = \frac{R_1^2 + R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} = 1$ because $R_0 = 0$. The condition (31) becomes ($n = 2$)

$$M_2 = 0$$

We obtain the bending moment M_1 substituting also $\psi_2 = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$

$$M_1 = \frac{F}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{R_2}{R_1} + (1-\mu)\frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2^2}\right]$$

The bending moment at the centre of the plate is obtained from the condition (32), where $p_{0,1} = 0$

$$M_0 = M_1$$

b. *Plate simply supported at the edge, with a uniformly distribuited charge inside a circle of radius* R_1 (fig. 11). Here the charges are

$$p_{0,1} = p$$

$$p_{1,2} = 0$$

$$F_{0,1} = F_0 - \pi R_1^2 p_{0,1} = 0$$

$$F_{1,2} = F_1 - \pi R_1^2 p_{1,2} = \pi R_1^2 p - 0 = \pi R_1^2 p$$

because $F_0 = 0$, $R_0 = 0$ and $F_1 = \pi R_1^2 p$ (the sum of the forces inside the circle of radius R_1)

The relation (25) becomes

$$-(\psi_1 - 1)M_0 + M_1(\psi_1 + \psi_2) - (\psi_2 + 1)M_2 =$$

$$= \frac{F_{1,2}}{4\pi}[(\psi_2 + 1)(1+\mu)\ln\alpha_2 + 1 - \mu] - \frac{p_{0,1}}{8}[R_1^2(1-\mu) + R_0^2(3+\mu)]$$

Introducing $\psi_1 = 1$ and the boundary condition $M_2 = 0$ we obtain

$$M_1 = \frac{pR_1^2}{4}\left[(1+\mu)\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{(1-\mu)(R_2^2 - R_1^2)}{4R_2^2}\right]$$

The bending moment at the centre of the plate is obtained from the boundary condition (32)

$$M_0 = M_1 + \frac{p_{0,1} R_1^2 (3+\mu)}{16} = \frac{pR_1^2}{4}\left[(1+\mu)\ln\frac{R_2}{R_1} + 1 - \frac{R_1^2(1-\mu)}{4R_2^2}\right]$$

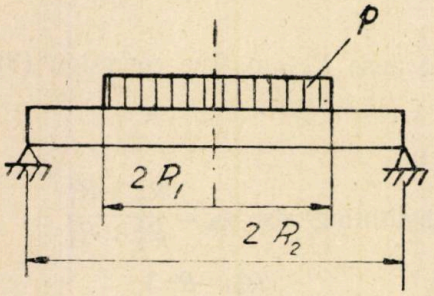


Fig. 11

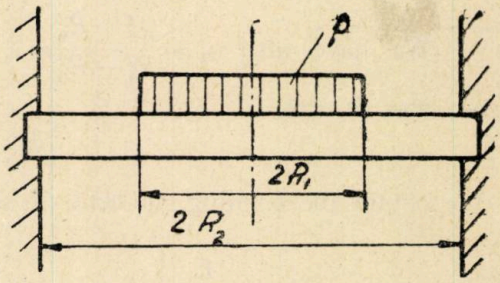


Fig. 12

c. *Plate clamped at the edge, with uniformly distributed load inside a circle of radius* R_1 (fig. 12). By applying the relation (25) we obtain, as in the previous case,

$$-(\psi_1 - 1) M_0 - M_1(\psi_1 + \psi_2) - (\psi_2 + 1) M_2 =$$

$$= \frac{F_{1,2}}{4\pi}[(\psi_2+1)(1+\mu)\ln\alpha_2 + 1 - \mu] - \frac{p_{0,1}}{8}[R_1^2(1-\mu) + R_0^2(3+\mu)]$$

Here we have also $\psi_1 = 1$; $F_{1,2} = \pi R_1^2 p$; $p_{0,1} = p$; $R_0 = 0$, but $M_2 \neq 0$. Substituting these values we obtain

$$M_1 - M_2 = \frac{pR_1^2(1+\mu)}{4}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{pR_1^2(R_2^2 - R_1^2)(1-\mu)}{16R_2^2}$$

The boundary condition (35) (with the index $n=2$) is

$$M_2(\psi_2 - \mu) - M_1(\psi_2 - 1) + \frac{F_{1,2}}{4\pi}[(\psi_2 - 1)(1+\mu)\ln\alpha_2 + 1 - \mu] +$$

$$+ \frac{p_{1,2}}{4\pi}[R_2^2(1-\mu) + R_1^2(3+\mu)] = 0$$

Substituting $F_{1,2} = \pi R_1^2 p$; $p_{1,2} = 0$; $\psi_2 = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ and solving the equation system we obtain the bending moments

$$M_2 = \frac{pR_1^2}{4}\left[\frac{R_1^2}{2R_2^2} - 1\right]$$

$$M_1 = \frac{pR_1^2}{16R_2^2}[R_1^2(1+\mu) - R_2^2(3+\mu)] + \frac{pR_1^2}{4}(1+\mu)\ln\frac{R_2}{R_1}$$

From the second boundary condition we obtain the bending moment at the centre of the plate

$$M_0 = M_1 + \frac{p_{0,1} R_1^2 (3+\mu)}{16} = M_1 + \frac{pR_1^2 (3+\mu)}{16} =$$

$$= \frac{pR_1^4 (1+\mu)}{16 R_2^2} + \frac{pR_1^2}{4} (1+\mu) \ln \frac{R_2}{R_1}$$

7. Bending of circular plates of variable thickness

The bending moments in a circular symmetrically loaded plate of variable thicknees can be calculated by dividing the plate into many rings of constant thickness [6]. The result thus obtained is more accurate, when the number of the rings into which the plate is divided increases. The equation of the three unknowns (23) must be applied in every point of the plate where the thicknees is discontinuous.

An example comprising a plate of variable thickness is given below.

Example. The steel plate ploted in fig. 13 is simply supported at the edge and charged by a uniformly distributed load $p=300$ kg/cm^2 inside a circle of radius $R''=10$ cm. The external radius is $R'=25$ cm. We divide the plate into 10 rings of constant thickness ; the thickness measured at the medium radius of every ring is given in table 2. The equation of the three unknowns must be applied 9 times, at the 9 points where the thickness of the plate varies discontinuously. Table 2 comprises all the coefficients which are necessary to complete the lefthand side of the equation (23) ; for the righthand side the coefficients have been calculated in table 3. The forces F have been calculated with the relation (29) taking into account that inside the circle of radius $R_4=R''=10$ cm, $p=300$ kg/cm^2 and outside $p=0$. For the steel the Poisson's ratio is $\mu=0{,}3$.

Using these coefficients we obtain the following 9 equations :

$$\begin{cases} +2{,}768\,M_1 - 2{,}805\,M_2 = 3260 \\ -0{,}666\,M_1 + 4{,}420\,M_2 - 3{,}791\,M_3 = 6550 \\ -1{,}600\,M_2 + 6{,}605\,M_3 - 5{,}079\,M_4 = 10820 \\ -2{,}572\,M_3 + 9{,}001\,M_4 - 6{,}555\,M_5 = 10860 \\ -3{,}555\,M_4 + 11{,}216\,M_5 - 7{,}795\,M_6 = 7120 \\ -4{,}545\,M_5 + 14{,}025\,M_6 - 9{,}679\,M_7 = 7990 \\ -5{,}538\,M_6 + 16{,}530\,M_7 - 11{,}212\,M_8 = 7910 \\ -6{,}533\,M_7 + 20{,}150\,M_8 - 13{,}941\,M_9 = 9940 \\ -7{,}529\,M_8 + 23.420\,M_9 - 16{,}273\,M_{10} = 10940 \end{cases}$$

A complete system is obtained by adding the boundary conditions (31) and (32), for a plate simply supported at the edge

$$\begin{cases} M_n = M_{10} = 0 \\ M_0 = M_1 + \frac{pR_1^2}{16} (3+\mu) = M_1 + 385 \end{cases}$$

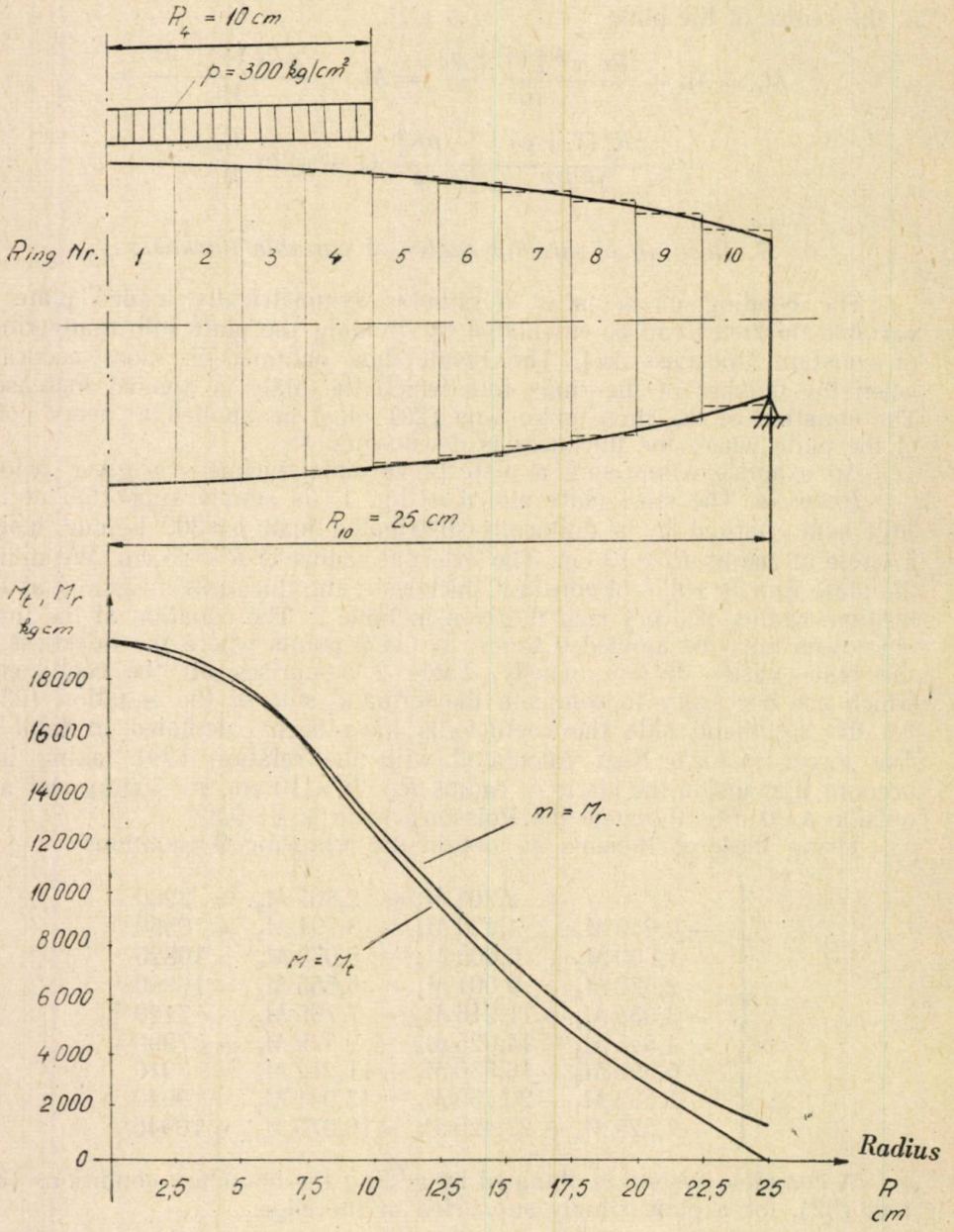

R_4 = 10 cm
p = 300 kg/cm²
Ring Nr.
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
R_{10} = 25 cm
M_t, M_r
kg cm
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
m = M_r
M = M_t
2,5
5
7,5
10
12,5
15
17,5
20
22,5
25
Radius
R
cm

Fig. 13

Table 2

Groups of rings			1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Index $i =$			1	2	3	4	5	6	7	8	9
Thickness		h_i cm	6	5,9	5,8	5,6	5,3	5	4,6	4,2	3,7
		h_{i+1} cm	5,9	5,8	5,6	5,3	5	4,6	4,2	3,7	3,2
		$\lambda_i = \left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)^3$	1,052	1,053	1,111	1,180	1,191	1,284	1,314	1,463	1,546
Ring i	Radiuses	R_{i-1} cm	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20
		R_i cm	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	2	22,5
		$\alpha_i = \frac{R_i}{R_{i-1}}$	—	2	1,5	1,333	1,25	1,20	1,166	1,143	1,125
	Coefficient	ψ_i	1	1,666	2,60	3,572	4,555	5,545	6,538	7,533	8,529
		$\psi_i - 1$	0	0,666	1,60	2,572	3,555	4,545	5,538	6,533	7,529
		$\psi_i - \mu$	0,700	1,366	2,30	3,272	4,255	5,245	6,238	7,233	8,229
Ring $i+1$	Radiuses	R_i cm	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22 5
		R_{i+1} cm	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25
		$\alpha_{i+1} = \frac{R_{i+1}}{R_i}$	2	1,5	1,33	1,25	1,20	1,166	1,143	1,125	1,111
	Coefficients	ψ_{i+1}	1,666	2,60	3,572	4,555	5,545	6,538	7,533	8,529	9,526
		$\psi_{i+1} + \mu$	1,966	2,90	3,875	4,855	5,845	6,838	7,833	8,829	9,826
		$\lambda_i (\psi_{i+1} + \mu)$	2,068	3,054	4,305	5,729	6,961	8,780	10,292	12,917	15,191
		$\psi_{i+1} + 1$	2,666	3,60	4,572	5,555	6,545	7,538	8,533	9,529	10,526
		$\lambda_i (\psi_{i+1} + 1)$	2,805	3,791	5,079	6,555	7,795	9,679	11,212	13,941	16,273
$\psi_i - \mu + \lambda_i (\psi_{i+1} + \mu)$			2,768	4,420	6,605	9,001	11,216	14,025	16,530	20,150	23.420

Table 3

Groups of rings	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Index i =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F_{i-1,i}$ kg	0	0	0	0	94 2 0	94 200	94 200	94 200	94 200
$\ln \alpha_i$	—	—	—	—	0,2231	0,1823	0,1541	0,1335	0,1178
$\psi_i - 1$	—	—	—	—	3,555	4,545	5,538	6,533	7,529
$1{,}3\,(\psi_i - 1)\ln \alpha_i$	—	—	—	—	1,031	1,077	1,109	1,134	1,153
$A = 1{,}3\,(\psi_i - 1)\ln \alpha_i + 0{,}7$	—	—	—	—	1,731	1,772	1,809	1,834	1,853
$B = 0{,}0796\,F_{i-1,i} \cdot A$	—	—	—	—	12 980	13 290	13 570	13 750	13 900
$F_{i,i+1}$ kg	0	0	0	94 200	94 200	94 200	94 200	94 200	94 200
$\ln \alpha_{i+1}$	—	—	—	0,2231	0,1823	0,1541	0,1335	0,1178	0,1054
$\psi_{i+1} + 1$	—	—	—	5,555	6,545	7,538	8,533	9,529	10,526
$1{,}3\,(\ln \alpha_{i+1})\ (\psi_{i+1} + 1)$	—	—	—	1,611	1,551	1,510	1,480	1,459	1,442
$C = 1{,}3\ (\psi_{i+1} + 1) \times \times \ln \alpha_{i+1} + 0{,}7$	—	—	—	2,311	2,251	2,210	2,180	2,159	2,142
λ_i	1,052	1,053	1,111	1,180	1,191	1,284	1,314	1,463	1,546
$D = 0{,}0796\,\lambda_i\, F_{i,i+1} \cdot C$	—	—	—	20 450	20 100	21 280	21 480	23 690	24 840
$p_{i-1,i}$ kg/cm²	300	300	300	300	0	0	0	0	0
R_i^2	6,25	25	56,25	100	—	—	—	—	—
$0{,}7\,R_i^2$	4,375	17,5	39,37	70	—	—	—	—	—
R_{i-1}^2	0	6,25	25	56,25	—	—	—	—	—
$3{,}3\,R_{i-1}^2$	0	21,62	82,5	185,6	—	—	—	—	—
$G = 0{,}7R_i^2 + 3{,}3\,R_{i-1}^2$	4,375	39,12	121,8	255,6	—	—	—	—	—
$H = 0{,}125\,p_{i-1,i} \cdot G$	164	1 470	4 570	9 590	—	—	—	—	—
$p_{i,i+1}$ kg/cm₂	300	300	300	0	0	0	0	0	0
R_{i+1}^2	25	56,25	100	—	—	—	—	—	—
$3{,}3\,R_{i+1}^2$	82,5	185,62	330	—	—	—	—	—	—
$J = 3{,}3\,R_{i+1}^2 + 0{,}7\,R_i^2$	86,875	203,12	369,37	—	—	—	—	—	—
$L = 0{,}125\,p_{i,i+1}\,\lambda_i\,J$	3 424	8 020	15 390	—	—	—	—	—	—
$S = -B + D - H + L$	3 260	6 550	10 820	10 860	7 120	7 990	7 910	9 940	10 940

Table 4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_i	19 300	17 900	15 740	12 700	9 600	7 100	4 970	3 120	1 470	0
ψ_i	1	1,666	2,60	3,572	4,555	5,545	6,538	7,533	8,529	9,526
$A = M_i \psi_i$	19 300	29 714	40 924	45 364	43 728	39 369	32 494	23 503	12 538	0
M_{i-1}	19 700	19 300	17 900	15 740	12 700	9 600	7 100	4 970	3 120	1 470
ψ_{i-1}	0	0,666	1,60	2,572	3,555	4,545	5,538	6,533	7,529	8,526
$B = M_{i-1}(\psi_i + 1)$	0	12 854	28 640	40 483	45 148	43 632	39,320	32,469	23 490	12 533
$C = \frac{F_{i-1,\,i}}{4\pi}\left[(\psi_{i-1})(1 + \mu)\ln\alpha_i + 1 - \mu\right]$	0	0	0	0	12 980	13 290	13 570	13 750	13 900	14 010
$D = \frac{p_{i-1,\,i}}{8}\left[R_i^2(1-\mu) + R_{i-1}^2(3+\mu)\right]$	164	1 470	4 570	9 590	0	0	0	0	0	0
$m_i' = A - B + C + D$	19 464	18 330	16 854	14 471	11 560	9 027	6 744	4 784	2 948	1 480
λ_i	1,052	1,053	1,111	1,180	1,191	1,284	1,314	1,463	1,546	1
$1 - \lambda_i$	0,052	0,053	0,111	0,180	0,191	0,284	0,314	0,463	0,546	0
$G = M_i \mu (1 - \lambda_i)$	301	285	524	686	550	605	468	433	240	0
$m_i' - G$	19 163	18 045	16 330	13 785	11 010	8 422	6 276	4 347	2 708	1 477
$m_i'' = \frac{m_i' - G}{\lambda_i}$	18 880	17 137	14 698	11 682	9 244	6 559	4 776	2 971	1 751	1 480
$m_i = \frac{m_i' + m_i''}{2}$	19 170	17 730	15 780	13 080	10 400	7 790	5 760	3 880	2 350	1 480

The roots of this equation system are the bending moments $M=M_t$ in all the points where the thickness varies discontinuously; the values of these bending moments are: $M_0 = 19693$ kgcm; $M_1 = 19308$ kgcm; $M_2=17895$ kgcm; $M_3=15741$ kgcm; $M_4=12696$ kgcm; $M_5=9599$ kgcm; $M_6=7107$ kgcm; $M_7=4972$ kgcm; $M_8=3124$ kgcm; $M_9=1472$ kgcm and $M_{10}=0$.

Using the relations (8) and (9) with the notations (20) and (22) we obtain all the bending moments m' and m'' at the same points; the values are given in table 4. The last line of this table comprises the medium values of the bending moments

$$m = \frac{m' + m''}{2}$$

The variations of the bending moments $M=M_t$ and $m=M_r$ are plotted in fig. 13.

Strength of Materials Chair,
The Polytechnic Institute of Bucharest

BIBLIOGRAPHY

[1] *M. Blumenfeld:* Calculul deformației barelor drepte prin metoda celor trei necunoscute, Buletinul Institutului Politehnic București, tom XXIV, fasc. 1, 1962.

[2] *M. Blumenfeld:* Calculul discurilor de grosime variabilă în mișcare de rotație prin metoda celor trei necunoscute, Studii și cercetări de Mecanică aplicată, tom XIV nr. 1

[3] *A. A. Beleș, R. P. Voinea:* Rezistența materialelor, vol. II, București, Ed. Tehnică, 1958.

[4] *Gh. Buzdugan:* Rezistența materialelor, vol. II, Ed. Tehnică, București, 1960.

[5] *A. D. Kovalenko:* Kruglîie plastinî peremennoi tolșcinî, Moskva, 1959.

[6] *S. D. Ponomarev, V. L. Biderman, K. K. Liharev, V. M. Makușin, N. N. Malinin, V. I. Feodosiev:* Rasciotî na procinosti v mașinostroenii, tom II, Moskva 1958.

[7] *S. Timoshenko:* Theory of plates and shells, McGraw Hill, New-York, 1940.

РАСЧЕТ БРАЩАЮЩИХСЯ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ДИСКОВ МЕТОДОМ ТРЕХ НЕИЗВЕСТНЫХ

(Краткое содержание)

В предыдущих статьях [1] [2], был изложен метод расчёта „трёх неизвестных" применительно к расчёту деформации прямых брусьев и вращающихся дисков. В настоящей статье предлагается новое применение данного метода относительно расчёта плоских круглых пластин, симметрично нагруженных и обладающих равномерной или переменной телщиной. Уравнение трёх неизвестных приводится в следующих видах:

а) для пластин переменной толщины соотношение (23)

б) для пластин постоянной толщины, соотношение (25)

В таблице 1 изложены предельные условия для пластин, изображенных в рис. 5, 6, 7, 8, 9.

Затем приводятся некоторые примеры практического их применения.

CIRCULAR SYMMETRICALLY LOADED PLATES, OF CONSTANT AND VARIABLE THICKNESS, CALCULATED BY THE THREE UNKNOWNS METHOD.

(Summary)

The author has presented in some previous papers [1], [2] „the three unknowns method" applied to the calculation of the right beam deflections and to rotating discs of variable thickness.

In the present paper the method is applied to the calculation of the circular symmetrically loaded plates, of constant and variable thickness.

LE CALCUL DES PLAQUES SYMETRIQUEMENT CHARGÉES, D'EPPAISSEUR CONSTANTE OU VARIABLE, PAR LA METHODE DES TROIS INCONNUES.

(Résumé)

L'auteur a présenté dans quelques articles précédemment parus [1], [2], la méthode „des trois inconnues" appliquée au calcul des déformations des poutres et des disques tournants d'épaisseur variable.

Une autre application de la méthode est présentée dans cet article: le calcul des plaques circulaires symétriquement chargées, d'épaisseur constante ou variable. On établit l'équation des trois inconnues pour les

plaques d'éppaisseur variable (23) et constante (25) et aussi les conditions aux extrémités pour les plaques représentées dans les fig. 5, 6, 7, 8, 9 (tab. 1). Parmi les applications présentées se trouve le calcul d'une plaque d'éppaisseur variable (fig. 13).

BERECHNUNG DER KREISFÖRMIGEN SYMMETRISCH BELASTETEN PLATTEN VON KONSTANTER UND VERÄNDERLICHER DICKE, MIT HILFE DER METHODE DER DREI UNBEKANNTEN.

(Zusammenfassung)

In den vorgehenden Aufsätzen [1], [2], hat der Verfasser seine Berechnungsmethode „der drei Unbekannten" erläutert, mit Anwendung für die Berechnung der Verformung der geraden Stäbe und rotierenden Scheiben. In dem jetzigen Aufsatz wird eine weitere Anwendung der Methode angegeben, und zwar zur Berechnung der kreisförmigen symmetrisch belasteten Platten mit gliecher oder verändlicher Dicke. Es wurde die Gleichung der drei Unbekannten in verschiedenen Formen aufgestellt:

a. für Pllatten mit verändlicher Dicke, Gleichung (23).

b. für Platen mit konstanter Dicke, Gleischung (25).

In der Tafel 1 werden die Grenzbedingungen für die in den Abbildungen 5, 6, 7, 8, 9 gezeichneten Platten angegeben. Es werden auch Anwedungsbeispiele für Platten mit konstanter (Abb. 10, 11, 12) und mit verändlicher (Abb. 13) Dicke erläutert.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 3

МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА СГОРАНИЯ В ДВИГАТЕЛЯХ С ИСКРОВЫМ ЗАЖИГАНИЕМ *)

Б. ГРЮНВАЛД, В. РАДЧЕНКО

Метод расчета индикаторной диаграммы, широко распространенный в литературе по специальности, был разработан более 50 лет тому назад профессором В. И. Гриневецким, в Москве, и усовершенствован позже его учениками.

Основным качеством этого метода нужно считать то, что он выявляет большое количество преобразований, которые имеют место в цилиндре двигателя, и это определяет удовлетворительное качество получаемых результатов.

Общее выражение явлений представляет собой основу метода. Все же общее описание эволюций, имея в виду только начальное и конечное состояния, становится оспариваемым например тогда, когда процесс сгорания, представляется в виде термодинамической эволюции при постоянном объеме.

Известно, что продолжительность процесса сгорания и установление его по циклу являются решающими для обеспечения большой мощности и высокой экономичности, а также спокойной работы двигателя.

За последнее десятилетие были высказаны и проверены новые мысли в связи с влиянием, оказываемым разными факторами на процесс сгорания.

Исследования, произведенные А. С. Соколиком и его сотрудниками выявили, что разделение процесса сгорания по индикаторной диаграмме на три фазы не носит формального характера, хотя в действительности нельзя установить точных границ между ними.

В первой стадии процесса сгорания имеет место создание ядра пламени и распространение его до размеров, при которых могут действовать макротурбионы (макровихри).

Вследствие этого, скорость сгорания устанавливается только скоростью распространения ламинарного пламени, которое зависит от физико-химических факторов (давление, температура, состав смеси, род горючего), а также и от интенсивности микротурбулентности. Последняя стадия процесса подчиняется тем же законам, имея в виду сокращенные размеры пламени.

---

*) Сообщение представленное на VII-ой научной сесии докладов П. И. Б. — 7—8 апреля 1962.

Во второй стадии сгорания, когда пламя достигает размеров равных или выше макротурбионов, скорость распространения пламени определяется, главным образом, интенсивностью турбулентности.

Новым и неожиданным элементом этой теории является то, что скорость распространения турбулентного пламени в двигателе с искровым зажиганием мало чувствительна при изменении коэффициента избытка воздуха в широких пределах.

Если главная фаза сгорания устанавливается в зоне максимальной турбулентности, тогда физико-химические качества смеси не влияют на среднюю скорость распространения пламени.

Таким образом, с термодинамической точки зрения, а также и с точки зрения распространения пламени возникает необходимость установления главной фазы сгорания, при любом режиме работы, симметрично по отношению к в. м. т., т. е. в зоне минимального объема и максимальной турбулентности.

Эта основная мысль процесса сгорания остается невыраженной в том случае, когда метод расчета считает сгорание эволюцией при постоянном объеме, что ведет к огромному несоответствию между реальными явлениями и их аналитическим выражением. Такой метод вносит одновременно в изложение процесса сгорания и некоторые произвольные элементы как округление диаграммы, установление максимального давления и температуры цикла. В действительности метод не учитывает того, что максимальное давление цикла является результатом расчета, ввиду того, что его величина на много превышает реальную величину; таким образом максимальное давление цикла устанавливается как часть максимального давления, полученного путем расчета, а именно, равное 85% и вне зависимости от типа двигателя. Здесь метод становится непоследовательным, потому что максимальная температура цикла остается без поправки.

В дальнейшем авторы поставили вопрос разработки метода расчета, который учитывал бы не только развертывание сгорания во времени, но и основной элемент процесса: установление главной фазы сгорания симметрично по отношению к в. м. т. Одновременно метод должен учитывать и тот факт, что оптимальный режим работы двигателя, в зависимости от симметричного установления по отношению к в. м. т. главной фазы сгорания, не может быть выполнен в некоторых условиях. Так например, новые типы автомобильных двигателей работают с большой степенью сжатия для повышения экономичности двигателя, в особенности, при средних нагрузках. При полной нагрузке двигатель детонирует, из-за того что октановое число бензина ниже того, которое соответствует степени сжатия. Для того чтобы избежать появление детонации, нужно отказаться от оптимальной регулировки опережения, при которой осуществляется максимальная экономичность и мощность; уменьшая опережение зажигания, отодвигается в сторону расширения главная фаза сгорания, что приводит к снижению давления и максимальной температуры. Такое решение рационально для автомобильного двигателя, который редко работает при полной нагрузке.

Предложенный авторами метод вводит следующую *основную гипотезу: скорость роста давления в главной фазе сгорания представляет собой постоянную величину*, т. е.

$$\frac{\Delta p}{\Delta \theta} = \text{constant}.$$

Введение средней скорости роста давления вместо внезапной представляет собой схематизирование реального процесса, но она имеет следующие преимущес ва:

а) исключает гипотезу сгорания при постоянном объеме, которая скрывает основные элементы процесса сгорания;

б) исключает необходимость произвольного округления индикаторной диаграммы и произвольного установления максимального давления цикла;

в) дает возможность выражать в простой форме основные элементы процесса сгорания: существование главной фазы процесса и подходящая установка ее (симметрично или несимметрично) по отношению к в. м. т.;

г) дает возможность ввести в расчет некоторые основные факторы, которые влияют на процесс сгорания: скорость фронта пламени, дозировка смеси и форма камеры сгорания.

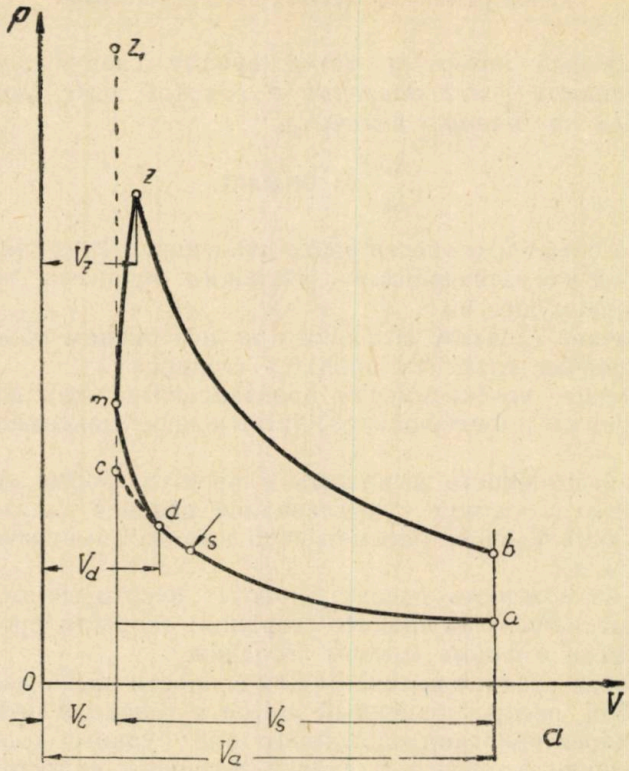
Применение средней величины для скорости роста давления представляет собой распространенный метод в теории и практике двигателей, для характеристики спокойного или бурного хода двигателя; поэтому введение в расчет подобной величины является обоснованным всем накопленным опытом в этой области.

Безусловно, предложенная схема, в известной степени окажет влияние на точность расчетов. Но испытапия, проведенные авторами, показывают, что полученные результаты более близки к действительности, чем результаты, установленные на основании гипотезы сгорания при постоянном объеме; в конечном счете этот факт является критерием для проверки метода.

Представим на диаграммах $p-v$ (рис. 1а) и $p-\Theta$ (рис. 1б) главные фазы процесса сгорания:

Пусть:

s — момент появления искры;
β_s — опережение зажигания (появления искры);
d — начало видимого сгорания или момент отрыва кривой давления от кривой, представляющей собой процесс сжатия без зажигания;
β_d — опережение при отрыве;
c — конец процесса сжатия смеси без его зажигания;
m — промежуточная точка процесса сгорания, когда процесс находится в в. м. т.;
z_1 — конец процесса изохорного сгорания;
z — конец главной фазы действительного видимого процесса сгорания;


p
Z₁
z
V_z
m
c
d
s
b
V_d
a
0
V
V_c
V_s
V_a
а

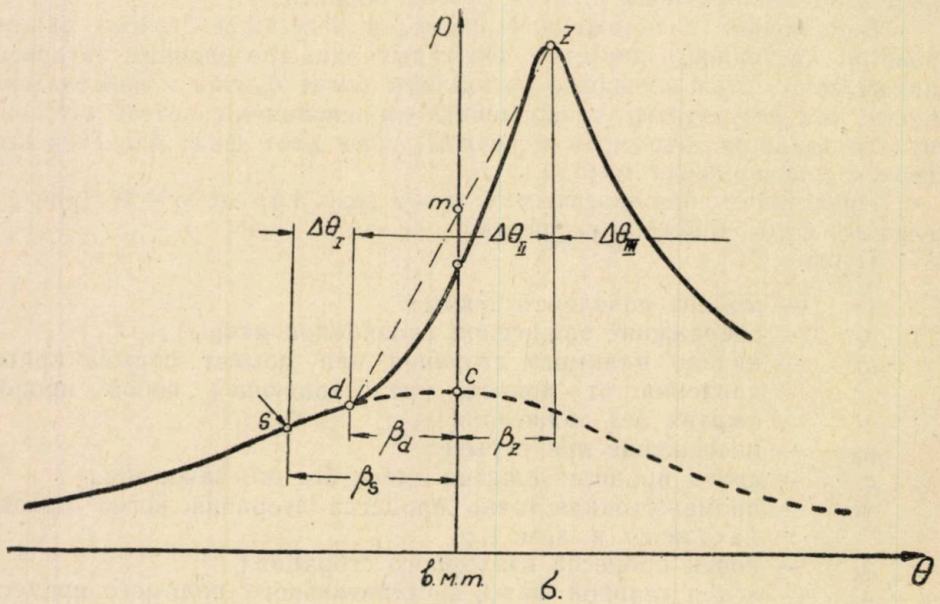

p
z
m
$\Delta\theta_I$
$\Delta\theta_{II}$
$\Delta\theta_{III}$
d
c
s
β_d
β_z
β_s
в.м.т.
б.
θ

Рис. 1

β_z — угол поворота коленчатого вала, соответствующий точке z;
$\Delta\theta_I$ — первая фаза процесса сгорания;
$\Delta\theta_{II}$ — вторая фаза процесса сгорания, или его главная фаза;
$\Delta\theta_{III}$ — третья фаза процесса сгорания;
V_d, V_c, V_m, V_z, V_a — объемы соответствующие точкам d, c, m, z, a диаграммы $p-V$;
V_s — объем хода поршня.

Экспериментальные данные показывают, что в период $\Delta\theta_I$ в цилиндре выделяется количество тепла, равное $\sim 10\%$ из общего количества; оно обусловливает настолько малый рост давления газов в цилиндре, что мембрана индикатора практически остается нечувствительной. На диаграмме $p-V$ химическая энергия, освобожденная в первой фазе процесса ($s-d$) не может быть выявлена, потому что давление не регистрирует видимого роста по сравнению с давлением, которое соответствует сжатию газа без сгорания. Ввиду этого применима следующая гипотеза: термический эффект реакции первой фазы процесса передвигается в главную фазу сгорания.

Анализ процесса сгорания на основании принятой гипотезы ведет к следующим уравнениям, которые будут установлены позже:

а) уравнение кинематического значения

$$\beta_d = 114{,}5 \sqrt{\frac{\delta_d - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}} \tag{1}$$

где:

$$\delta_d = \frac{V_d}{V_c}; \quad \varepsilon = \frac{V_a}{V_c}; \quad \lambda = \frac{r}{b}$$

(отношение между радиусом кривошипа r и длиной шатуна b).

б) Два уравнения, которые уточняют величины состояния точки d, считая эволюцию $a-d$ политропной:

$$p_d = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}} \tag{2}$$

$$T_d = T_a \frac{\varepsilon^{m_c-1}}{\delta_d^{m_c-1}} \tag{3}$$

где: p_a, T_a начальные величины состояния, установленные известным методом (например, по методу Гриневецкого), а m_c показатель политропы сжатия.

в) Два уравнения, исходящие из основной гипотезы: линейное изменение давления с углом вращения коленчатого вала в главной стадии (фазе) сгорания; следовательно:

$$\frac{p_m - p_d}{\beta_d} = \frac{\Delta p}{\Delta\theta} \tag{4}$$

$$\frac{p_z - p_m}{\beta_z} = \frac{\Delta p}{\Delta\theta} \tag{5}$$

г) Уравнение связи между углами β_d и β_z, которое дает возможность симметричного или несимметричного установления главной фазы сгорания по отношению к внутренней мертвой точке:

$$\beta_z = \varphi \beta_d \tag{6}$$

В оптимальном случае (симметричное установление) $\varphi = 1$; в остальных случаях $\varphi \neq 1$.

д) Уравнение энергетического баланса

$$\xi_z H_i + A|L_{dm}| = U_z - U_d + AL_{mz} \tag{7}$$

где:

$H_i \left[\frac{\text{ккал}}{\text{кг}}\right]$ — нижняя теплотворность топлива;

ξ_z — коэффициент выделения тепла, который учитывает потери через стенку, явление диссоциации, а также и выделение тепла в третьей стадии (фазе) сгорания;

$|L_{dm}|$ — полученная работа в политропной эволюции $d-m$;

L_{mz} — произведенная работа в политропной эволюции $m-z$;

U_d — внутренняя энергия в точке d;

U_z — внутренняя энергия в точке z;

Последнее уравнение не вводит новых неизвестных, считая известным коэффициент ξ_z, на основании экспериментальных данных, как и в методе Гриневецкого.

Система семи независимых уравнений содержит девять неизвестных: β_d, δ_d, p_d, T_d, p_m, p_z, β_z, $\Delta p/\Delta\theta$, φ; ясно, что решение этой системы вынуждает выбрать на основе статистических данных два неизвестных, Внимательный анализ показывает, что рационально прибегнуть к выбору последних двух неизвестных $\Delta p/\Delta\theta$ и φ, имеющих принципиальное значение для расчета. И действительно, средняя скорость роста давления $\Delta p/\Delta\theta$, представляет собой главный параметр, который характеризует главную фазу сгорания, а величина параметра φ характеризует установление главной фазы по циклу.

В продолжении развивается метод расчета.

I. *Параметры точки d.*

Пользуясь выражением хода в зависимости от угла вращения коленчатого вала, объем точки d выражается:

$$V_d = V_c + \frac{V_s}{2}\left(1 - \cos\beta_d + \frac{\lambda}{2}\sin^2\beta_d\right)$$

или:

$$V_d = V_c\left[1 + \frac{V_s}{V_c}\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \cos\beta_d + \frac{\lambda}{2}\sin^2\beta_d\right)\right]$$

Развивая последовательно тригонометрические функции и пренебрегая высшими степенями, угол β_d имея низкие значения, получается:

$$\frac{V_d}{V_c} = 1 + \frac{\varepsilon - 1}{2}\left(\frac{\beta_d^2}{2} + \frac{\lambda}{2}\beta_d^2\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)^2.$$

С обозначением:

$$V_d/V_c = \delta_d$$

получается выражение (1):

$$\beta_d = 114{,}5\sqrt{\frac{\delta_d - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}}.$$

Давление в точке d устанавливается учитывая эволюцию $a - d$ как политропный процесс:

$$p_d V_d^{m_c} = p_a V_a^{m_c}$$

или

$$p_d = p_a\left(\frac{V_a}{V_c}\right)^{m_c} \cdot \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{m_c}.$$

В итоге, получается отношение (2):

$$p_d = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}}.$$

Аналогично получается отношение (3):

$$T_d = T_a \frac{\varepsilon^{m_c - 1}}{\delta_d^{m_c - 1}}.$$

2. *Давление в точке m.*

Из отношения (4) получается:

$$p_m = p_d + \beta_d \frac{\Delta p}{\Delta \theta}$$

или:

$$p_m = p_d\left(1 + \frac{\beta_d}{p_d} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta}\right).$$

В последнем отношении заменяется β_d и p_d из отношений (1) и (2). Получается:

$$p_m = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}}\left(1 + \frac{114{,}5}{p_a \varepsilon^{m_c}} \cdot \delta_d^{m_c}\sqrt{\frac{\delta_d - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta}\right).$$

Отмечая через:

$$f(\delta_d) = \frac{114{,}5}{p_a \varepsilon^{m_c}} \cdot \delta_d^{m_c} \sqrt{\frac{\delta_d - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}} \tag{8}$$

конечное выражение давления в точке m становится:

$$p_m = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}} \left[1 + f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta\theta}\right] \tag{9}$$

3. *Параметры точки z.*

Давление в точке z устанавливается из отношения (5):

$$p_z = p_m + \beta_z \frac{\Delta p}{\Delta\theta}$$

или, имея в виду отношение (6),

$$p_z = p_m \left(1 + \frac{\varphi \cdot \beta_d}{p_m} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta\theta}\right).$$

И наконец, с отношениями (1), (8) и (9), после упрощения получается:

$$p_z = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}} \left[1 + (1 + \varphi) f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta\theta}\right] \tag{10}$$

Температура точки z выводится из уравнения состояния, пользуясь отношением:

$$T_z = \frac{p_z V_z}{M_z R_M}.$$

Пользуясь отношением

$$\delta_z = \frac{V_z}{V_c},$$

уравнением положения точки a,

$$M_a = \frac{p_a V_a}{R_M T_a},$$

и общим коэффициентом молярного изменения

$$\mu_z = \frac{M_z}{M_a}$$

получается

$$T_z = T_a \frac{p_z}{p_a} \cdot \frac{\delta_z}{\mu_z \varepsilon}.$$

Имея в виду выражение давления p_z, конечное выражение температузы T_z следующее:

$$T_z = T_a \frac{\varepsilon^{m_c-1}}{\mu_z} \cdot \frac{\delta_z}{\delta_d^{m_c}} \left[1 + (1+\varphi) f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right]. \tag{11}$$

В продолжении в подходящем виде выражаются величины, которые входят в уравнение энергетического баланса сгорания, для участка $d - z$.

а) Механическая работа, выраженная в тепловых единицах, полученная в эволюции $d - m$, определяется из:

$$AL_{dm} = A \int_d^m p \cdot dV$$

где:

$$dV = d\left(\frac{V}{V_c} \cdot V_c\right) = V_c \cdot d\left(\frac{V}{V_c}\right) = \frac{V_a}{\varepsilon} \cdot d\left(\frac{V}{V_c}\right)$$

и отмечая $\delta = \frac{V}{V_c}$ получается:

$$dV = \frac{1}{\varepsilon} V_a \cdot d\delta;$$

p есть давление в текущей точке эволюции $d - m$ и определяется учитывая, что:

$$\frac{p_m - p}{\beta} = \frac{\Delta p}{\Delta \theta}$$

или

$$p = p_m - \beta \frac{\Delta p}{\Delta \theta} = p_m - 114{,}5 \sqrt{\frac{\delta - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta}.$$

Пользуясь выражением давления p_m и отмечая через

$$f(\delta) = \frac{114{,}5}{p_a \varepsilon^{m_c}} \delta_d^{m_c} \sqrt{\frac{\delta - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}}$$

получается:

$$p = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}} \left\{ 1 + [f(\delta_d) - f(\delta)] \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right\}.$$

Значит:

$$AL_{dm} = A \int_{\delta_a}^{1} p_a V_a \frac{\varepsilon^{m_c-1}}{\delta_d^{m_c}} \left\{ 1 + [f(\delta_d) - f(\delta)] \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right\} d\delta$$

где единственная переменная это величина δ, а $\delta_m = \frac{V_m}{V_c} = 1$ что объясняет верхний предел интегрирования. Зная, что $p_a V_a = M_a R_M T_a$, после интегрирования получается:

$$A\,|L_{dm}| = 1{,}986\, M_a \cdot T_a \cdot \varepsilon^{m_c - 1} \frac{\delta_d - 1}{\delta_d^{m_c}} \left[1 + \frac{1}{3} f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta}\right] \tag{12}$$

то есть:

$$A\,|L_{dm}| = A\,|L_{dm}(\delta_d)|\,. \tag{12a}$$

б) Механическая работа, выраженная в тепловых единицах произведенная в эволюции $m - z$ определяется из:

$$AL_{mz} = A \int_m^z p \cdot dV$$

где:

$dV = \frac{V_a}{\varepsilon} \cdot d\delta$, а p есть давление текущей точки.

Аналогично:

$$\frac{p - p_m}{\beta} = \frac{\Delta p}{\Delta \theta}\,,$$

$$p = p_m + \beta \frac{\Delta p}{\Delta \theta} = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}} \left\{1 + [f(\delta_d) + f(\delta)] \frac{\Delta p}{\Delta \theta}\right\}.$$

После интегрирования получается:

$$AL_{mz} = 1{,}986\, M_a \cdot T_a \cdot \varepsilon^{m_c - 1} \cdot \frac{\delta_z - 1}{\delta_d^{m_c}} \left[1 + \left(1 + \frac{2}{3}\varphi\right) f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta}\right] \tag{13}$$

или учитывая отношение между δ_z и δ_d, получается:

$$AL_{mz} = AL_{mz}(\delta_d, \varphi). \tag{13a}$$

Значения внутренних энергий газов могут определяться, считая или линейное изменение теплоемкостей с температурой, или их реальное изменение. Задача решается в обоих случаях.

Первый случай: предположим линейное изменение теплоемкостей с температурой.

Внутренняя энергия U_d выражается отношением:

$$U_d = M_d \cdot C_v \Big|_{T_0}^{T_d} (T_d - T_0) = M_a\,(a_1 + b_1 T_d)\,(T_d - T_0)$$

где:

$$M_d = M_a.$$

Отмечается:

$$A_1 = b_1 M_a \; ; \quad B_1 = (a_1 - b_1 T_0) M_a \; ; \quad C_1 = - a_1 M_a T_0 ,$$

и получается:

$$U_d = A_1 T_d^2 + B_1 T_d + C_1$$

или на основании отношения (3) получается:

$$U_d = A_1 T_a^2 \frac{\varepsilon^{2(m_c-1)}}{\delta_d^{2(m_c-1)}} + B_1 T_a \frac{\varepsilon^{m_c-1}}{\delta_d^{m_c-1}} + C_1 \tag{14}$$

то есть

$$U_d = U_d(\delta_d). \tag{14 a}$$

Внутренняя энергия U_z выражается отношением:

$$U_z = M_z C_v \Big|_{T_0}^{T_z} (T_z - T_0) = \mu_z M_a (a_2 + b_2 T_z)(T_z - T_0)$$

или отмечая через

$$A_2 = \mu_z b_z M_a \; ; \quad B_2 = (a_2 - b_2 T_0) \mu_z M_a \; ; \quad C_2 = - \mu_z a_2 M_a T_0 ,$$

получается:

$$U_z = A_2 T_z^2 + B_2 T_z + C_2 .$$

На основании отношения (11) получается:

$$U_z = A_2 T_a^2 \left(\frac{\varepsilon^{m_c-1}}{\mu_z} \cdot \frac{\delta_z}{\delta_d^{m_c}} \right)^2 \left[1 + (1+\varphi) f(\delta_d) \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right]^2 + B_2 T_a \left(\frac{\varepsilon^{m_c-1}}{\mu_z} \cdot \frac{\delta_z}{\delta_d^{m_c}} \right) \times$$

$$\times \left[1 + (1+\varphi) f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right] + C_2 \tag{15}$$

то есть:

$$U_z = U_z(\delta_d, \varphi). \tag{15 a}$$

Если введем (12), (13), (14), (15) в отношение (7), получается в общей форме:

$$\xi_z H_i = U_z(\delta_d, \varphi) - U_d(\delta_d) + A L_{mz}(\delta_d, \varphi) - A \, | L_{dm}(\delta_d) | . \tag{16}$$

Когда двигатель работает с обильной дозировкой, α, коэффициент избытка воздуха меньше единицы и в этом случае вместо теплотворности H_i вводится неполная теплотворность H_{in}:

$$H_{in} = H_i - 28560 (1 - \alpha) L_{min} . \tag{17}$$

Уравнение (16) представляет собой уравнение с двумя неизвестными δ_d и φ; оно позволяет выразить математически основное условие оптимального сгорания, с точки зрения мощности и к. п. д., а именно симметричное установление по отношению к в. м. т. главной фазы сгорания.

Аналитически, это условие выражается так:

$$\beta_z = \beta_d$$

или

$$\varphi = 1. \tag{18}$$

С условием (18) уравнение (16) становится уравнением с одним неизвестным, которое решается графическим путем (рис. 2, стр. 133).

Если отказаться от основного условия, φ устанавливается предварительно так, чтобы все же получить уравнение с одним неизвестным.

Зная параметр δ_d, величины состояния в точках d, m, z, определяются уравнениями, установленными ранее: (2), (3), (9), (10), (11). Одновременно, уравнением (1), определяется продолжительность главной фазы сгорания:

$$\Delta\theta_{II} = 114{,}5\,(\varphi + 1) \cdot \sqrt{\frac{\delta_d - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}}. \tag{19}$$

Метод позволяет определить, на основании экспериментальных данных, опережение зажигания.

Ввиду того что первая фаза сгорания зависит только от физико-химических факторов, выбор продолжительности первой фазы сгорания не является трудным; получается опережение зажигания:

$$\beta_s = \Delta\theta_I + 114{,}5 \sqrt{\frac{\delta_d - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}}. \tag{20}$$

В конечном итоге, имея в виду форму индикаторной диаграммы, можно определить среднее индикаторное давление цикла. Не учитывая диаграмму накачивания, среднее индикаторное давление цикла,

$$p_i = \frac{L_i}{V_s} \tag{21}$$

в котором:

$$L_i = L_{mz} + L_{zb} - |L_{ad}| - |L_{dm}|. \tag{22}$$

Выражаются все члены выражения (22), в зависимости от объема хода поршня V_s, учитывая, что в выражениях (12), (13),

$$M_a R_M T_a = p_a V_a$$

где:

$$V_a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} V_s.$$

Получается:

$$|L_{dm}| = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{\delta_d - 1}{\delta_d^{m_c}} \left[1 + \frac{1}{3} f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta\theta}\right] V_s, \tag{23}$$

$$L_{mz} = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{\delta_z - 1}{\delta_d^{m_z}} \left[1 + \left(1 + \frac{2}{3} \varphi \right) f(\delta_d) \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right] V_s, \tag{24}$$

$$| L_{ad} | = \frac{p_d V_d - p_a V_a}{m_c - 1} = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{\delta_d}{\delta_d^{m_c}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\delta_d}{\varepsilon} \right)^{m_c - 1}}{m_c - 1} V_s, \tag{25}$$

$$L_{zb} = \frac{p_z V_z - p_b V_b}{m_d - 1} = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{\delta_z}{\delta_d^{m_c}} \left[1 + (1 + \varphi) f(\delta_d) \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right] \frac{1 - \left(\frac{\delta_z}{\varepsilon} \right)^{m_d - 1}}{m_d - 1} V_s. \tag{26}$$

Имея в виду (23), (24), (25), (26), индикаторное среднее давление цикла:

$$p_i = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\delta_d^{m_c}} \cdot \frac{1}{\varepsilon - 1} \left\{ \delta_z \left[1 + (1 + \varphi) f(\delta_d) \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right] \cdot \frac{1 - \left(\frac{\delta_z}{\varepsilon} \right)^{m_d - 1}}{m_d - 1} + (\delta_z - 1) \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + \left(1 + \frac{2}{3} \varphi \right) f(\delta_d) \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right] - \delta_d \frac{1 - \left(\frac{\delta_d}{\varepsilon} \right)^{m_c - 1}}{m_c - 1} - (\delta_d - 1) \left[1 + \frac{1}{3} f(\delta_d) \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \right] \right\}. \tag{27}$$

Если установление сгорания по отношению к в. м. т. симметрично, тогда среднее индикаторное давление получается, ставя в (27) условие $\varphi = 1$.

Зная среднее индикаторное давление цикла со сгоранием при постоянном объеме,

$$p_i' = p_a \frac{\varepsilon^{m_c}}{\varepsilon - 1} \left(\lambda \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon^{m_d - 1}}}{m_d - 1} - \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon^{m_c - 1}}}{m_c - 1} \right)$$

где $\lambda = \frac{p_{z_1}}{p_c}$ отношение роста давления в процессе сгорания при постоянном объеме, можно определить расчетную ошибку:

$$e = \frac{p_i' - p_i}{p_i} 100\%. \tag{28}$$

Эволюции $d-m$ и $m-z$ строятся через точки в диаграмме $p-V$ при помощи следующих отношений:

а) Эволюция $d-m$:

$$p = p_m - 114{,}5 \sqrt{\frac{\delta - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \theta} \tag{29}$$

где δ является текущим значением отношения $\frac{V}{V_c}$ на эволюции $d-m$:

$$\delta = \frac{V}{V_c}\Bigg|_d^m .$$

б) Эволюция $m-z$:

$$p = p_m + 114{,}5\sqrt{\frac{\delta - 1}{(\varepsilon - 1)(\lambda + 1)}} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta\theta} \qquad (30)$$

где, δ представляет собой текущее значение отношения $\frac{V}{V_c}$ на эволюции $m-z$:

$$\delta = \frac{V}{V_c}\Bigg|_m^z .$$

Второй случай. В первом случае уравнение энергетического баланса для эволюции $d-m-z$ выло выраженно, учитывая линейные изменения теплоемкостей с температурой. Это упрощение спорное, имея в виду вводимые ошибки; оно может быть исключено, если выгодно выразить уравнение (16) следующей регрупировкой членов:

$$\xi_z H_i - (U_z - U_d) = AL_{mz} - A\,|L_{dm}|. \qquad (31)$$

Пусть выражение внутренних энергий:

$$U_z = M_z \int_0^z C_v \cdot dT \ , \quad U_d = M_d \int_0^d C_v \cdot dT .$$

Потому что температуры T_z и T_d неизвестны, нельзя уточнить значение теплоемкостей или внутренних энергий данные в таблицах. Но это можно сделать косвенным путем посредством графического изображения внутренних энергий, в зависимости от параметра δ_d для которого определяются температуры T_d и T_z. Из отношений (3), (11), и при помощи таблиц извлекаются значения теплоемкостей или непосредственно внутренних энергий, соответствующие установленным температурам. Таким образом внутренние энергии зависят от δ_d и их графическое изображение, в зависимости от этого параметра, возможно. Решение уравнения (31) получается при помощи графического изображения членов уравнения (31) (рис. 2).

Пользование таблицами с термодинамическими свойствами газов исключает ошибки и упрощает решение основного уравнения (31).

Предложенный метод расчета параметров процесса сгорания в двигателях с искровым зажиганием показан на примере обработанной индикаторной диаграммы двигателя ГАЗ—21. Конструктивные данные двигателя, режим испытаний, данные тормозных испытаний, данные индикаторной диаграммы и результаты обработки индикаторной диа-

граммы (по другому методу) взяты из работы акад. Б. С. Стечкина, К. И. Генкина, В. С. Золотаревского и И. В. Скородинского: „Индикаторная диаграмма, динамика тепловыделения и рабочий цикл быстроходного поршневого двигателя", Издательство Академии Наук СССР, Москва 1960 (страницы 94 — 99).

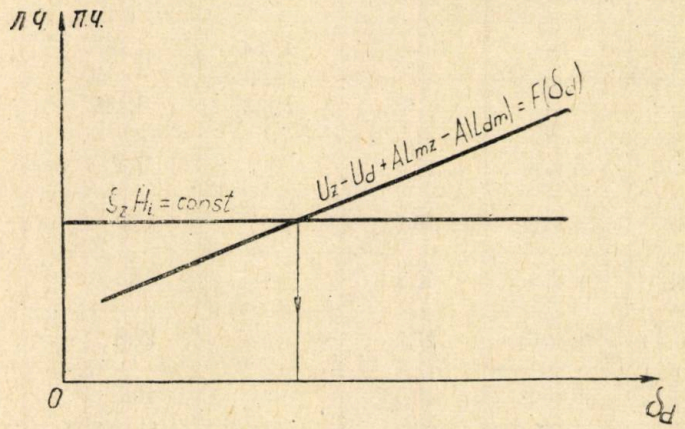


Рис. 2. — Решение уравнения (16) или (31) графическим путем.

Конструктивные данные двигателя:

$$\varepsilon = 6{,}75\ ,\quad V_s = 612{,}5\ \text{см}^3\ ,\quad \lambda = \frac{1}{3{,}63}\ .$$

Топливо — бензин A — 74:

$H_l = 10\,400$ ккал/кг, $m_T = 114$, состав по весу $C = 0{,}855$, $H = 0{,}145$.

Режим испытаний:

$n = 2\,000$ об/мин, дроссель полный, $p_0 = 1{,}023$ кГ/см^2,

$T_0 = 299{,}4°K$, $\alpha = 1{,}022$.

Данные тормозных испытаний:

$p_i = 9{,}84$ кГ/см^2, $G_T = 2{,}4$ кг/час, $\eta_i = 0{,}337$, $\eta_v = 0{,}86$, $T_r = 1\,023°\text{K}$,

$T_0 + \Delta T = 319°\,\text{K}$.

Данные и результаты обработки индикаторной диаграммы по сравнению с результатами расчета по предложенному методу показаны в таблице 1.

Вначале расчета были выбраны, по результатам обработки индикаторной диаграммы следующие величины:

$$\frac{\Delta p}{\Delta \vartheta} = 0{,}873\ \text{кГ/см}^2\ {}^{\circ}\text{п. к. в.}\ ,\quad \varphi = 0{,}936\ ,\quad \xi_z = 0{,}734.$$

Таблица 1

Номер	Величина		Индикаторная диаграмма		Результаты расчета по предложенному методу	Примечание
	Обозначения	Размерность	Данные испытаний	Результаты обработки		
1	$\Delta\theta_I$	°п. к. в.	10,5	—	10,5	выбран
2	δ_d	—	—	1,164	1,167	
3	δ_z	—	—	1,143	1,146	
4	β_d	°п к. в.	17,2	—	17,3	
5	β_z	°п. к. в.	16,1	—	16,2	
6	$\Delta\theta_{II}$	°п к. в.	33,3	—	33,5	
7	β_s	°п. к. в.	27,7	—	27,8	
8	p_d	кГ/см²	10,06	—	10,1	
9	p_m	кГ/см²	18,08	—	25,2	
10	p_z	кГ/см²	39,16	—	39,3	
11	T_z	°К	—	2409	2380	
12	U_d	ккал/кг	—	—	1218	
		ккал/ккал	—	0,123	0,117	
13	U_z	ккал/кг	—	—	8727	
		ккал/ккал	—	0,839	0,839	
14	L_{dm}	ккал/кг	—	—	— 158	
		кГм/цикл	—	— 2,11	— 2,7	
15	L_{mz}	ккал/кг	—	—	316	
		кГм/цикл	—	5,27	5,4	
16	L_{dz}	кГм/цикл	—	3,16	2,7	
17	p_i	кГ/см²	—	10,16	10,17	
18	η_i	%	33,7	35,1	34,6	

ВЫВОДЫ

1. Метод, предложенный авторами для расчета сгорания, учитывает в общей форме основные явления, которые появляются в развертывании процесса сгорания. Он выражает аналитически оптимальные условия развертывания процесса, а именно симметричное положение по отношению к в. м. т. главной фазы сгорания. Он может выражать аналитически и условия несимметричного установления главной фазы сгорания.

2. Метод вынуждает произвести выбор одного параметра для расчета: средней скорости роста давления. Все трудности сосредоточенны в выборе этого параметра.

Все же, введение его в расчет оправдывается, имея в виду явления, которые он выражает.

3. Метод исключает произвольные элементы, к которым прибегает расчет сгорания при постоянном объеме. Он позволяет одновременно уточнить продолжительность главной фазы сгорания, выбрать с большой легкостью опережение зажигания, определить потерянную механическую работу при реальном сгорании, развернутом во времени.

4. Метод устраняет крупный дидактический недостаток, являющийся следствием расчета при постоянном объеме сгорания: большое несовпадение между теоретическим и экспериментальным изучением процесса сгорания и полное пренебрежение его выводами в расчетном методе.

5. Полученные посредством этого метода результаты, очень близки к реальным.

Политехнический Институт Бухарест
Кафедра котлов и тепловых машин

ЛИТЕРАТУРА

Карпов В. П.: Горение газообразных смесей в двигателях, Машгиз, 1951.

Иноземцев Н. В., Кошкин В. К.: Процессы сгорания в двигателях, Машгиз, 1949.

Вибе И. Д.: Новые проблемы в процессе сгорания в двигателях, Машгиз, 1961.

МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА СГОРАНИЯ В ДВИГАТЕЛЯХ С ИСКРОВЫМ ЗАЖИГАНИЕМ

(Краткое содержание)

Метод предложенный авторами для расчета сгорания в двигателях с искровым зажиганием учитывает в общей форме основные явления которые появляются в развёртывании процесса сгорания. Он

выражает аналитически оптимальные условия в развёртывании процесса, а именно симметричное положение по отношению к в. м. т. главной разы сгорания. Он может выражать аналитически и условия несимметричного установления главной фазы сгорания по отношению к в. м. т.

METHOD OF CALCULATING COMBUSTION'S PARAMETERS OF THE SPARK-IGNITION ENGINE

(Summary)

The authors' method for the computation of the combustion in the spark-ignition engines accounts, in a general manner, of the main phenomena occuring in the combustion processus.

This method develops analitically the best conditions required for the combustion, i. e. the simmetrical position of the main combustion phase in regard to the top dead-centre. The method also applies to the assimetrical positions of this phase.

MÉTHODE DE CALCUL DES PARAMETRES DU PROCÈS DE LA COMBUSTION DANS LES MOTEURS À ALLUMAGE COMANDÉE

(Résumé)

La méthode proposée par les auteurs pour le calcul de la combustion dans les moteurs à allumage comandée, tient compte en forme globale des principaux phénomènes qui apparaissent pendant le déroulement du procés de la combustion. Elle exprime d'une manière analitique les meilleurs conditions de déroulement de procès et même la position simetrique nevers du p.m.i. de la phase principale de la combustion la méthode peut exprimer analitiquement aussi les conditions du placement asimetrique de la phase principale de la combustion envers p.m.i.

EINE BERECHNUNGSMETHODE DER VERBRENNUNGS-PARAMETERN BEIDEN MOTOREN MIT FUNKENZÜNDUNG

(Zusammenfassung)

Die, von den Verfassern angebotene Methode für die Verbrennungsberechnung im Gang, es wird in einem totalen Gestalt der vorahmen

Phänomenen beachtet, die beider Entfaltung des Verbrennungs-Prozeses erscheinen.

Sie drückt, analytischer Weise, aus, die bessten Bedingungen der Prozesentfaltung und Zwar sistematische Ansetzung, gegenseitig dem inwendigen Verlüst der vornehmen Vergrennungsphase; die Methode kam analytischer Weise auch die Bedingungen asimetrischer Ansetzung der vornehmen Verbrennungsphase, gegenseitig den inwendigen Verlust erlautest werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 3

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЦВЕТНОГО ТЕЛЕВИДЕНИЯ С ЗАПОМИНАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

АЛ. СПЭТАРУ

Основная идея последовательной системы цветного телевидения с запоминающим устройством состоит в применении одного канала для передачи цветовой информации вместо двух каналов, как это производится в одновременной системе с квадратурной модуляцией.

В этом случае обе цветовые информации передаются путем разделения во времени, передавая последовательно для каждой строки одну из двух цветовых информаций. На приемном пункте при помощи цепи задержки получаем одновременно две цветовые информации, из которых одна соответствует одной ранее переданной строки. Благодаря этому — получим искажение цвета по сравнению с одновременной системой. Ниже попытаемся произвести статистическую оценку этого искажения. Будем считать последовательность полукадров, в которой каждая строка имеет порядковый номер (рис. 1), а x, y — пространственные координаты.

Для каждой строки передается по одной цветовой информации.

$$E_R - E_y \quad \text{или} \quad E_A - E_y$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} E_R - E_y &= R(x, y) \\ E_A - E_y &= A(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

где R и A зависят от переданного изображения, соответственно от координат x, y.

Обозначим через $R^{(n)} = R(x, y_n)$, соответственно $A^{(n)} = A(x, y_n)$ изменение цвета R и A вдоль строки (n).

Передача осуществляется по указанному на рис. 2 способу.

Цветовые информации R и A определяют точку в треугольнике цветов (рис. 3), которая соответствует переданному цвету (C).

Величины R и A при приеме определят воспроизводимый цвет (C^1).

Воспроизведение будет при условии: чем ближе будет (C) к (C^1), тем точнее будет воспроизведение.

При одновременной передаче, не учитывая искажений каналов, воспроизводимый цвет будет одинаковым с переданным цветом

$$C(x, y) = A(x, y) + j R(x, y) \tag{2}$$

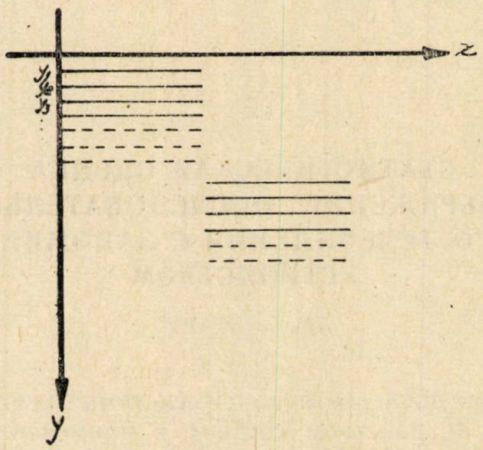


Рис. 1.

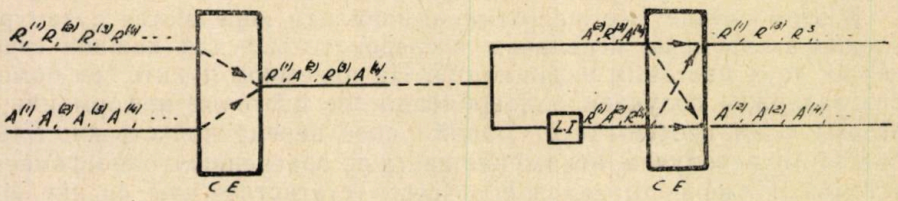


Рис. 2. С. Е. — электронный коммутатор
I. — цепь задержки 64 мксек

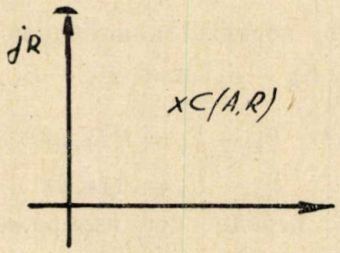


Рис. 3.

соответственно, в случае двух последовательных строк:

$$C(x, y_{2n}) = A(x, y_{2n}) + j R(x, y_{2n}) \tag{3}$$

(для четных строк)

$$C(x, y_{2n+1}) = A(x, y_{2n+1}) + j R(x, y_{2n+1}) \tag{4}$$

(для нечетных строк)

В случае последовательной передачи с запоминанием для тех же строк — воспроизводимый цвет будет:

$$C^1(x, y_{2n}) = A(x, y_{2n}) + jR(x, {}_{2n-1}) \tag{5}$$

$$C^1(x, y_{2n+1}) = A(x, y_{2n}) + jR(x, y_{2n+1})$$

Благодаря тому же принципу последовательной системы с запоминанием, воспроизводимый цвет будет отличаться от переданного цвета.

Неправильное воспроизведение цвета для четных строк выражается:

$$e(x, y_{2n}) = C(x, y_{2n}) - C^1(x, y_{2n}) \tag{6}$$

соответственно:

$$e(x, y_{2n}) = j[R(x, y_{2n}) - R(x, y_{2n-1})] \tag{7}$$

а:

$$e^2(x, y_{2n}) = R^2(x, y_{2n}) + R^2(x, y_{2n-1}) - 2R(x, y_{2n})R(x, y_{2n-1}) \tag{8}$$

Для нечетных строк имеем:

$$e(x, y_{2n+1}) = C(x, y_{2n+1}) - C^1(x, y_{2n+1}) \tag{9}$$

$$e(x, y_{2n+1}) = A(x, y_{2n+1}) - A(x, y_{2n}) \tag{10}$$

а:

$$e^2(x, y_{2n+1}) = A^2(x, y_{2n+1}) + A^2(x, y_{2n}) - 2A(x, y_{2n+1})A(x, y_{2n}) \tag{11}$$

Среднеквадратичное значение вдоль оси Y составляет:

$$e^2_{yp}(x) = e^2(x, y_{2n}) = \frac{1}{y}\int_0^y [R^2(x, y_{2n}) + R^2(x, y_{2n-1}) - 2R(x, y_{2n})R(x, y_{2n-1})]\,dy \tag{12}$$

соответственно:

$$e^2_{yi}(x) = e^2(x, y_{2n+1}) = \frac{1}{y}\int_0^y [A^2(x, y_{2n+1}) + A^2(x, y_{2n}) - 2A(x, y_{2n+1})A(x, y_{2n})]\,dy \tag{13}$$

или с вышеуказанными обозначениями:

$$e^2_{yp}(x) = R^2_y(x) + R^2_y(x) - 2\frac{1}{y}\int_0^y R(x, y_{2n})R(x, y_{2n-1})\,dy$$

$$K_R(x, \delta) = \frac{1}{y}\int_0^y R(x, y)R(x, y-\delta)\,dy = \frac{1}{y}\int_0^y R(x, y_{2n})R(x, y_{2n-1})\,dy$$

$$e^2_{yp}(x) = 2R^2_y(x) - 2K_R(x, \delta) \tag{14}$$

и

$$e_{yi}^2(x) = A_y^2(x) + A_y^2(x) - 2\frac{1}{y}\int_0^y A(x, y_{2n+1})\, A(x, y_{2n})\, dy$$

$$K_1(x, -\delta) = \frac{1}{y}\int_0^y A(x, y+\delta)\, A(x, y)\, dy = K_A(x, \delta)$$

$$e_{yi}^2 = 2A_y^2(x) - 2K_A(x, \delta) \tag{15}$$

где δ — расстояние между двумя строками и отметим:

$$y_{2n} = y, \quad a \quad y_{2n+1} = y + \delta, \quad y_{2n-1} = y - \delta$$

Среднеквадратичное значение по оси x представляет:
для четных строк:

$$e_{yxp}^2 = 2R_{yx}^2 - 2K_R(\delta) \tag{16}$$

первый член R_{yx}^2 является средним эффективным значением, а второй член является функцией корреляции по вертикали для цвета R, который обозначаем через $K_R(\delta)$

$$e_{yxp}^2 = 2R_{yx}^2\left(1 - \frac{K_R(\delta)}{R_{yx}^2}\right) \tag{17}$$

$K(0) = R_{yx}^2$, а коэффициент корреляции через $\varrho_R(\delta) = \dfrac{K_R(\delta)}{K_R(0)}$ с этими обозначениями имеем:

$$e_{yxp}^2 = 2K_R(0)\,[1 - \varrho_R(\delta)] \tag{18}$$

для нечетных линий:

$$e_{yxi}^2 = 2A_{yx}^2 - 2K_A(\delta) \tag{19}$$

$$e_{yxi}^2 = 2A_{yx}^2\left(1 - \frac{K_A(\delta)}{A_{yx}^2}\right) \tag{20}$$

$$e_{yxi}^2 = 2K_A(0)\,[1 - \varrho_A(\delta)] \tag{21}$$

где ϱ_A — коэффициент корреляции по вертикали для цвета A.

Предполагаем, что функции корреляции по вертикали равны для обоих цветов, т. е. $K(\delta) = K_A(\delta) = K_R(\delta)$ и в этом случае неправильность, произведенная последовательной передачей цветовой информации будет:

$$e_{yx}^2 = 2K(0)\,[1 - \varrho(\delta)] \tag{22}$$

где $K(0)$ — средняя мощность полезного сигнала.

Качество переданного изображения может быть принята отношением между среднеквадратичным значением неправильности и средней мощности или логарифмом этого отношения.

$$q = 10\log\frac{e_{yx}^2}{K(0)} = 10\log 2\,[1 - \varrho(\delta)] \tag{23}$$

Величина коэффициента корреляции для вертикального и горизонтального направлений в случае черно-белого изображения была определена экспериментально для различных изображений, Е. Р. Крецмером [2].

Из проведенного опытного исследования следует, что для изображения средней массовости, коэффициент корреляции по вертикали и по горизонтали тот же и имеет значение $K_0(\delta) = 0{,}98$ в случае промежутка равного δ (соответственно удвоенному значению промежутка между строками одного кадра).

Коэффициент корреляции для цветовых сигналов не был определен экспериментально, но его можно определить приблизительно путем вычисления, исходя от экспериментально определенного значения для черно-белого изображения. Функция корреляции для черно-белого изображения определенная экспериментально, может быть выражсна нормализированной формой:

$$K_0(y) = e^{-\alpha|y|} \tag{24}$$

для вертикального направления и можем принять ту же функцию для горизонтального направления:

$$K_0(x) = e^{-\alpha|x|}$$

x будучи величиной пропорциональной, времени, $x = vt$, где (v) — скорость передвижения пятна, имеем:

$$K_0(t) = e^{-\omega_0|t|} \tag{25}$$

Зная эту функцию (из экспериментальных данных) поставим перед собой задачу определения функции автокорреляции $K(t) = K\left(\frac{\delta}{v}\right)$ сигнала из треугольника цветов.

С этой целью будем считать упрощенную статистическую модель телевизионного сигнала, а именно: статистические свойства телевизионного сигнала подобны свойствам сигнала получающегося из прохождения белого шума через фильтр $R.C.$

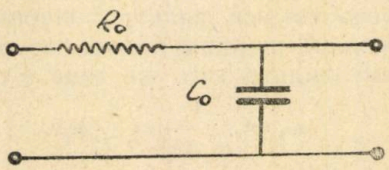


Рис. 4.

Величины, характеризующие филятр RC (рис. 4), следующие: функция передачи:

$$Y(p) = \frac{1}{1 + R_0 C_0 p} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + p} \tag{26}$$

где

$$\omega_0 = (R_0 C_0)^{-1}$$

функция веса

$$h(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\omega_0 e^{pt}}{\omega_0 + p} dp = \begin{cases} \omega_0 e^{-\omega_0 t} & t > 0 - \\ 0 & t < 0 - \end{cases} \quad (27)$$

функция автокорреляции фильтра:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t+z) h(z)\, dz = \frac{1}{2} \omega_0 e^{-\omega_0 |t|} \quad (28)$$

Если функция автокорреляции при входе в фильтр — $B(z)$, то функция автокорреляции при выходе будет:

$$B_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(t - v + u) h(u) h(v)\, du\, dv \quad (29)$$

Предположим, что при входе в фильтр имеем белый шум. В этом случае $B(t) = \frac{W_0}{2} \delta(t)$, где $\delta(t)$ — функция дельта, а W_0 — спектральная плотность мощности белого шума. Заменяя в [29] получим

$$B_0(t) = \frac{W_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) h(u + t)\, du = \frac{W_0}{4} \omega_0 e^{-\omega_0 |t|} \quad (30)$$

Функция автокорреляции, полученная таким образом, имеет форму, подобную функции автокорреляции, экспериментально определенную [25].

Для нормализирования берем: $W_0 = \frac{4}{\omega_0}$, то есть

$$B_0(t) = e^{-\omega_0 |t|} \quad (31)$$

Сигнал, носящий цветовую информацию, до его передачи, проходит через низкочастотный фильтр с шириной полосы приблизительно в три раза меньше ширины полосы всего канала.

Считаем, что этот фильтр того же типа RC. с:

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{3} \omega_0$$

В этом случая функция автокорреляции при выходе из фильтра $R_1 C_1$ будет:

$$B_1(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 |t - v + u|} \omega_1 e^{-\omega_1 u} \omega_1 e^{-\omega_1 v}\, du\, dv \quad (32)$$

$$B_1(t) = \iint_{\varphi > 0} e^{-\omega_0 (t - v + u) - \omega_1 u - \omega_1 v}\, du\, dv + \omega_1^2 \iint_{\varphi < 0} e^{\omega_0 (t - v + u) - \omega_1 u - \omega_1 v}\, du\, dv$$

где

$$\varphi = t - v + u$$

$$B_1(t) = \omega_1^2 \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 t} e^{-(\omega_0+\omega_1)u}\, du \int_0^{u+z} e^{(\omega_0-\omega_1)v}\, dv +$$

$$+ \omega_1^2 \int_0^{\infty} e^{\omega_0 t} e^{(\omega_0-\omega_1)u}\, du \int_{u+z}^{\infty} e^{-(\omega_0+\omega_1)v}\, dv \qquad (33)$$

$$B_1(t) = \frac{\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} [\omega_0 e^{-\omega_1 |t|} - \omega_1 e^{-\omega_0 |t|}] \qquad (34)$$

учитывая, что $\omega_1 = \frac{1}{3}\omega_0$, имеем :

$$B_1(t) = \frac{3}{8}\left(e^{-\frac{1}{3}\omega_0 |t|} - \frac{1}{3} e^{-\omega_0 |t|}\right)$$

соответственно — $K(y) = \frac{3}{8}\left(e^{-\frac{1}{3}\alpha |y|} - \frac{1}{3} e^{-\alpha |y|}\right)$

или $\varrho(\delta) = \frac{3}{2}\left[K_0^{\frac{1}{3}}(\delta) - \frac{1}{3} K_0(\delta)\right]$

если $K_0(\delta) = 0{,}98$

$\varrho(\delta) = 0{,}99993$

Включая это значение в [23], получим $q = -40$.

Отсюда следует, что искажение цвета в случае последовательной передачи с запоминанием не представляет важности и это положение вместе с другими отмеченными качествами последовательной системы представляет в будущем лучшие перспективы.

BIBLIOGRAFIE

[1] *P. Cassagne, M. Sauvanet :* Le système de télévision en couleurs SECAM, comparaison avec le système N.T.S.C. L'Onde Électrique Septembre 1961

[2] *E. R. Kretzmer :* Statistics of Television Signals. The Bell System Technical Journal. July 1952

[3] *Н. Г. Дерюгин :* Спектр мощности и функция корреляции телевизионого сигнала. Электросвязь № 7 1957.

[4] * * * Elements de comparaison des système de television en couleurs NTSC et SECAM. Bulletin de la Compagnie Francaise de Télévision Décembrie 1961

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЦВЕТНОГО ТЕЛЕВИДЕНИЯ С ЗАПОМИНАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

(Краткое содержание)

В системе SECAM, благодаря последовательной передаче цветной информации, появляется искажение, величина которого определяется корреляционной функцией по вертикали. Рассчеты показывают, что эта ошибка незначительна.

STATISTIC EVALUATION OF THE IMAGE QUALITY BY THE SEQUENTIAL COLOUR TELEVISION SYSTEM, WITH STORRAGE

(Summary)

The error by the representation of the colour in the sequential system, with storrage, will be determinated. The reference systeme is the same as for the simultaneusly television system, with quadratur modulation. The mean value of this error result to be proportional with the correlation coefficient on the verticale. This fact permit to calculate his value.

EVALUATION STATISTIQUE DE LA QUALITÉ D'IMAGE DU SYSTÈME SEQUENTIEL DE TÉLÉVISION EN COULEUR, À MÉMOIRE

(Résumé)

On determine l'erreur de reproduction de la couleur, dans le système séquentiel à mémoire, en utilisant comme système de réference celui du système simultané, à modulation en quadrature. Il y result que la valeur moyenne de cette erreur est proportionelle au coefficient de corrélation sur la verticale, fait qui permit de calculer sa valeur.

STATISTISCHE QUALITÄTSABSCHÄTZUNG DES BILDES BEIM SEQUENTIALEN FARBFERNSEHVERFAHREN, MIT AUFSPEICHERUNG

(Zusammenfassung)

Man bestimmt den Fehler der Farbenwiedergabe beim Sequentialverfahren, mit Aufspeicherung. Als Bezugssystem wird das simuttanverfahren system mit Quadraturmodulation verwendet. Der Mittelwert dieses Fehlers ergibt sich alls verhältnismässig dem Korrelationskoeffizienten auf der Vertikalen. Diese Tatsache gestattet seinen Wert zu berechnen.

MŰSZAKI KÖNYVTÁRÉS 1883 DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT ORSZÁGOS

INTREPRINDEREA
POLIGRAFICĂ Nr. 6
Str. Alex. Odobescu, 12
B U C U R E Ş T I
c. 5769

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F1130

BIBLIOTECA CENTRALĂ

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 4

OCTOMBRIE — DECEMBRIE

1962

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul Politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu Redacția și Administrația Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Pelitehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. Б пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIV — FASCICOLA 4

OCTOMBRIE — DECEMBRIE

1962

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Prof. *M. Bercovici*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Prof. Dr. *D. Dumitrescu*, membru corespondent al Acad. R.P.R.; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Conf. *Gh. Hagymaș*, cand. St. Th; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Conf. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

FIZICĂ

I. AGÎRBICEANU, A. ICHIMESCU, I. VIEROȘANU — Spectrul de reflecție și transmisie al straturilor subțiri de argint supuse la încălzire 13

G. MOISIL — La répartition du potentiel le long des structures souterraines pourvues d'intstallations de protection cathodique 23

C. GHEORGHIȚĂ, P. CRISTEA — Observații asupra influenței aerului și vaporilor de apă la diferite presiuni asupra conductibilității electrice a monocristalului de clorură de sodiu 43

MATEMATICĂ

A. TĂNĂSESCU — About a transformation in axonometric plane 49

TERMOTEHNICĂ

L. STOICESCU, C. STAMATESCU, M. GRIGORIU — Calitatea procesului termodinamic și domeniul de folosire al compresorului volumetric rotativ 55

REZISTENȚA MATERIALELOR

A. PETRE — Cîteva cazuri de flambaj lateral prin șoc . . . 69

TEHNOLOGIE TEHNICĂ

V. PĂRĂUȘANU, O. LANDAUER, C. MATEESCU, F. DANEȘ — Adsorbția acidului acetic pe schimbători de ioni din soluții de acetonă-apă 73

ELECTROTEHNICĂ

A. TIMOTIN — Asupra deducerii expresiei forței lui Laplace . 95

C. MIHĂILEANU — Une méthode unitaire de présenter les relais de distance et directionels 103

ELECTRONICĂ

I. TEODORESCU — Linia de întîrziere și formare cu parametri variabili 129

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

И. АГЫРБИЧАНУ, А. ИКИМЕСКУ, И. ВИГРОЩАНУ — Спектр в отраженном и проходящем свете нагретых тонких плёнок 13

Г. МОИСИЛ — Распределение электрического потенциала вдоль металического подзёмного сооружения . . . 23

К. ГЕОРГИЦЭ, П. КРИСТЯ — Некоторые замечания относительно влияния воздуха и водяных паров под различными давлениями на электропроводность монокристалла хлористого натрия 43

МАТЕМАТИКА

А. ТЭНЭСЕСКУ — К вопросу изменении в аксонометрическом плане 49

ТЕРМОТЕХНИКА

Л. СТОИЧЕСКУ, К. СТАМАТЕСКУ, М. ГРИГОРИУ — Качество термодинамического процесса и область применения обьёмного ротационного компрессора . . . 55

СОПРОТИВЛЕИИЕ МАТЕРИАЛОВ

А. ПЕТРЕ — Некоторые случаи побочного продольного изгиба ударом 69

ТЕХНОЛОХИЯ КИМИКИ

В. ПЭРЭУШАНУ, О. ЛАНДАУЭР, К. МАТЕЕСКУ, Ф ДАНЕШ — Адсорбция уксусной куслоты на ионообменниках в растворах ацетон-вода 73

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. ТИМОТИН — О выраженй слы Лапласа 95

К. МИХЭИЛЯНУ — Единый метод трактовки дистанционных и направленных реле 103

ЭЛЕКТРОНИКА

И. ТЕОДОРЕСКУ — Линия формирования и задержки с переменными параметрами 129

CONTENTS

PHYSICS

I. AGÎRBICEANU, A. ICHIMESCU, I. VIEROȘANU — The reflection and transmission spectra of thin films of silver submitted to heating 13

G. MOISIL — The distribution of the potential along the buried structures provided with installations of cathodic protection 23

C. GHEORGHIȚĂ, P. CRISTEA — Observations on the influence of the air and water vapour at different pressures on the electrical conductivity of the single Na.Cl. crystal . . 43

MATHEMATICS

A. TĂNĂSESCU — About a transformation in axonometric plane 49

TERMODYNAMICS

L. STOICESCU, C. STAMATESCU, M. GRIGORIU — The applicability of the rotating volumetric compressor depending on the thermodynamical efficiency 55

STRENGTH OF MATERIALS

A. PETRE — Some cases of lateral buckling of beams by impact 69

TEHNOLOGICAL CHEMISTRY

V. PARAUȘANU, O. LANDAUER, C. MATEESCU, F. DANEȘ — The adsorbtion of acetic acid on exchangers from aceton-water solutions 73

ELECTRICITY

A. TIMOTIN — On the deduction of the Laplace force expression 95

C. MIHĂILEANU — A unitary method of presenting the directional and distance relays 103

ELECTRONICS

I. TEODORESCU — Pulse — forming and time delay line with variable parameters 129

SOMAIRE

PHYSIQUE

I. AGÎRBICEANU, A. ICHIMESCU, I. VIEROȘANU — Le spectre de réflection et de transmission des couches minces d'argent soumises a un traitement termqiue 13

G. MOISIL — La répartition du potentiel le long des structures souterraines pourvues d'installations de protection cathodique . . . . . , 23

C. GHEORGHIȚĂ, P. CRISTEA — Observations sur l'influence de l'air et des vapeurs de l'eau aux diverses pressions sur la conductibilité électrique du monocristal de clorure de sodium 43

MATHÉMATIQUE

A. TĂNĂSESCU — Sur une transformation dans le plan axonométrique 49

TERMOTECHNIQUE

L. STOICESCU, C. STAMATESCU, M. GRIGORIU — Le degré de qualité du procés thermodynamique et le domaine du functionnement économique du compresseur volumétrique rotatif 55

RÉSISTANCES DES MATERIAUX

A. PETRE — Quelques cas de flambage latéral par choc. 69

CHIMIE TECHNOLOGIQUES

V. PĂRĂUȘANU, O. LANDAUER, C. MATEESCU, F. DANEȘ — L'adsorbtion de l'acide acétique sur les échangeurs de ions dans les solutions acétone-eau 73

ELECTROTECHNIQUE

A. TIMOTIN — Sur la déduction de l'expression de la force de Laplace 95

C. MIHĂILEANU — Une méthode unitaire de présenter les relais de distance et directionnels 103

ELECTRONIQUE

I. TEODORESCU — Ligne à retard avec des paramètres variables 129

INHALT

PHYSIK

I. AGÎRBICEANU, A. ICHIMESCU, I. VIEROȘANU — Reflexions und Durchlässigkeitsspektrum dunner thermisch behandelter Silberschichten 13

G. MOISIL — Potentialverteilung längs einer unterirdischen kathodisch geschützten Rohr-oder Kabelleitung 23

C. GHEORGHIȚĂ, P. CRISTEA — Beobachtungen über den Einfluss von Luft und von Vasserdampf bei verschiedenen Drücken auf die eletrische Leitfähigkeit von Natriumchlorid Einkristallen 43

MATHEMATIK

A. TĂNĂSESCU — Über die Transformation in einer axonometrischen Ebene 49

TERMOTECHNIK

L. STOICESCU, C. STAMATESCU, M. GRIGORIU — Der Gütegrad des thermodynamischen Prozesses und das Anwendungsgebiet des nach dem Verdrängungsprinzip arbeitenden Drehkolbenverdichters 55

FESTIGKEITSLEHRE

A. PETRE — Einige Fälle von seitlicher Knickung durch Stoss 69

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

V. PARĂUȘANU, O. LANDAUER, C. MATEESCU, F. DANEȘ — Die Adsorbtion der Essigsäure auf Ionenaustauschern aus Azeton-Wasser-Lösungen 73

ELEKTROTECHNIK

A. TIMOTIN — Über die Ableitung des Laplace-sche Kraftsatzes 95

C. MIHĂILEANU — Ein einheitliches Darstellungsverfahren der Distanz-und Richtungsrelais 103

ELEKTRONIK

I. TEODORESCU — Pulsformende und Verzögerungsleitung mit regelbaren Konstanten 129

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

FIZICĂ

SPECTRUL DE REFLECȚIE ȘI TRANSMISIE AL STRATELOR SUBȚIRI DE ARGINT SUPUSE LA ÎNCĂLZIRE *

I. AGÎRBICEANU, A. ICHIMESCU, I. VIEROȘANU

Introducere.

Proprietățile optice ale păturilor subțiri de Argint au fost cercetate sub diferite aspecte, găsindu-se mereu domenii noi și interesante de cercetare care se încadrează în optica și spectroscopia corpului solid (1), (2). Aceasta din cauza ușurinței cu care acest metal poate fi depus sub formă de pături subțiri, care rămîn suficient de constante în timp, și pot fi destul de ușor studiate din punct de vedere optic. Cu toate acestea, regiunea spectrală 2200 Å—3600 Å, și în special regiunea benzii de transparență, sau de absorbție a Argintului, de la 3200 A, prezintă mereu interes pentru studiul proprietăților corpului solid. Cel care a studiat variația proprietăților optice, ale păturilor subțiri de Ag în funcție de lungimea de undă, în vecinătatea benzii de transparență este R. Philip (1). Dar nici în această lucrare nu apare un studiu sistematic asupra structurii acestei benzi, și a modificărilor care pot apare sub influența unor agenți fizici, cum ar fi de exemplu temperatura.

Un domeniu larg și nou de cercetare a proprietăților optice ale păturilor subțiri metalice sau sub formă de combinații metalice, îl constitue spectroscopia prin reflexie, după cum a arătat G. Perny (3) deoarece ea completează în mod util spectroscopia prin transmisie atunci cînd se cercetează structura benzilor de absorbție, în cazul păturilor groase absorbante sau a benzilor intense. Spectroscopia prin reflexie ne permite să punem în evidență linii sau benzi neobservabile prin transmisie, dacă păturile sînt prea groase. Aceasta din cauza faptului că, coeficientul de absorbție al unui solid poate lua valori considerabile în interiorul unei bande de absorbție și atunci numai limitele absorbției sînt observabile și este imposibil să obținem date asupra formei sau structurii bandelor de absorbție făcînd observații prin transmisie. Coeficientul de reflexie, însă, este în primă aproximație independent de grosimea păturii cristaline, pentru că lumina este reflectată numai de un strat superficial foarte

* Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

subțire al păturii și astfel putem obține date interesante în legătură cu structura unei bande de absorbție, sau ne poate pune în evidență apariția unor noi bande sau linii care se datoresc excitonilor.

În lucrarea de față, noi ne-am propus următoarele:

1. Să studiem spectrul de transmisie și de reflexie al unei pături subțiri de Ag de grosime dată, și să observăm modificările ce apar atunci cînd această pătură este încălzită în aer la temperaturi cuprinse între temperatura camerii și aprox. 350°C. Grosimea păturilor subțiri era cuprinsă între 200—1000 Å.

2. Să studiem pentru o temperatură dată, dacă apare vre-o modificare în spectrul de transmisie și de reflexie, atunci cînd grosimea variază de la 200 Å la 1000 Å.

3. Să studiem cu ajutorul difracției electronice și a microscopului electronic, structura păturilor subțiri de Ag, după încălzirea la 350°C.

Prepararea păturilor subțiri de Ag.

Păturile subțiri folosite, au fost depuse prin evaporare termică în vid într-o instalație de metalizare Tesla. Argintul folosit, era un argint spectroscopic pur, iar suportul era constituit din plăcuțe de cuarț. Fiecare depunere se făcea simultan pe un suport de cuarț și pe unul de sticlă, acesta din urmă necesar ca martor pentru măsurarea grosimii păturii. Ambele suporturi au fost curățite după tehnica obișnuită. După uscare erau introduse în instalația de depunere și așezate simetric față de coșulețul de Wolfram care conținea argint, astfel ca pe ambele suporturi să se depună aceiași grosime de argint. Vidul era de 1.10^{-5} mmHg, în timpul depunerii scădea pînă la 2.10^{-5} mmHg. Am căutat să depunem toate păturile în aceleași condiții, cu aceiași viteză de evaporare de aproximativ 7—10 Å/secundă, pentru ca rezultatele să fie cît se poate de reproductibile.

Grosimea păturilor subțiri a fost măsurată prin metoda interferențială, cu o precizie de ± 50 Å.

Oxidarea păturilor subțiri se realiza într-un cuptoraș. Un termometru ne indica temperatura din cuptoraș în punctul unde se afla plăcuța iar temperatura cuptorașului putea fi reglată cu ajutorul unui reostat.

Instalația experimentală și modul de lucru pentru obținerea spectrelor de transmisie și de reflexie

Spectrele de transmisie și de reflexie s-au obținut cu ajutorul unui spectograf ISP-22 cu optică de cuarț, și o parte din încercări, cu ajutorul unui spectrograf UV Hilger, model mic, tot cu optică de cuarț. Ca sursă spectrală am folosit diferite tipuri de lămpi de hidrogen. Prima lampă folosită, a fost o lampă tip Chalonge cunoscută.

Am folosit de asemeni o lampă cu hidrură de uraniu, asupra căreia insistăm, fiind prima lampă de acest tip construită la noi în țară (4). Lampa este de dimensiuni mici, din cuarț, fără electrozi interiori. În

interiorul tubului, într-un rezervor, lampa conține hidrură de uraniu care are proprietatea de a degaja hidrogen atunci cînd este încălzită, reabsorbindu-l prin răcire. Astfel această lampă constitue o sursă spectrală cu o viață suficient de lungă și spectrul continuu este foarte curat. Excitarea se face cu un generator de înaltă frecvență. Spectrul emis de această lampă este descris în lucrarea (5).

Ultimile măsurători pe care le-am făcut și pe care le prezentăm în această lucrare, au fost făcute folosind o lampă de hidrogen tip Zeiss. Această lampă este ușor de manevrat pentru reflexie și transmisie, are un sistem propriu de focalizare, este foarte constantă și dă un spectru continuu foarte pur de la aproximativ 3600 Å pînă în ultra-violetul îndepărtat. De asemeni fascicolul luminos este foarte intens, astfel că timpul de expunere varia între 30 s și 5 min. pentru transmisie sau reflexie și pentru diferite grosimi de pături folosite.

Reglajul optic pentru trecerea de la spectrele de transmisie în ultra violet la cele de reflecție în ultraviolet a fost relativ dificil. Acest lucru a îngreunat prelucrarea rezultatelor.

Modul de lucru a fost următorul: Plăcuțele proaspăt preparate, sau ținute 2—3 zile în exicator, au fost puse în fața fantei spectrografului, pentru observațiile în transmisie sau reflexie.

În cazul reflexiei unghiul de incidență era de aproximativ 45°. După aceasta, am introdus plăcuța în cuptoraș, încălzind-o timp de 1 h, succesiv la temperaturile de 120°C, 250°C și 350°C. După fiecare încălzire am făcut cîte o poză în reflexie și transmisie. La temperaturi mai ridicate nu s-a lucrat, pentru că am constatat că la aproximativ 350°C păturile de Ag, deveneau aproape tot atît de transparente ca și suportul de cuarț.

Rezultatele obținute

S-a constatat că plăcuțele de grosime 200—300 Å, încălzite chiar la 120°C încep să se schimbe la culoare devin albicioase mai transparente, și mai puțin reflectătoare, iar la 250°C, și mai mult, la aproximativ 350°C devin galben-arămii și încep din nou să reflecte mai puternic.

Plăcuțele mai groase, între 450 Å și 800 Å își schimbă culoarea abia la 250°C și chiar la 350°C rămîn albicioase și mai puțin reflectătoare.

În concluzie, s-a constatat că punctul de începere a transformării argintului în oxid (care coincide cu momentul cînd culoarea păturii devine gălbuie) scade cu grosimea păturii. Păturile subțiri de 200—300 Å se schimbă la culoare la o temperatură mai joasă decît cele mai groase, care rămîn albicioase chiar la 350°C. Acest lucru este confirmat și de figura de difracție electronică obținută cu microscopul electronic, după cum vom vedea mai jos.

Spectrele obținute au fost trecute la microfotometrul înregistrator și din spectrograme se pot trage următoarele concluzii :

La o serie de pături, oxidate la o temperatură de aproximativ 350°C după 6 luni de la oxidare se constată :

a) la păturile mai groase 600 Å, care păstrează încă aspectul metalic, apare clar maximul de transmisie, căruia îi corespunde în reflexie un minim, care pare puțin deplasat spre lungimi de undă mici. [Fig. 1] [Fig. 1′].

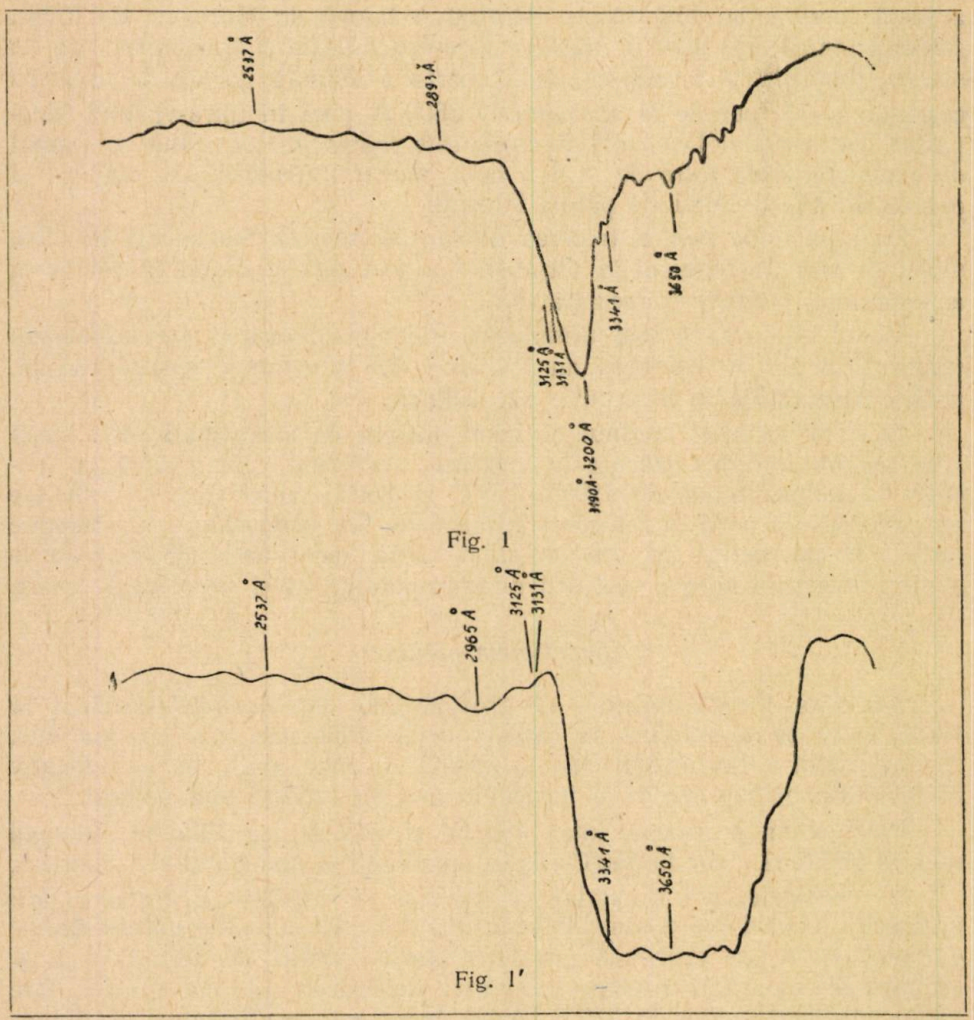


Fig. 1

Fig. 1′

b) La pături de Ag, de grosime mai mică, 200—400 Å, în spectrul de reflexie în locul minimului de reflexie semnalat mai sus, apare un maxim, identic cu cel de la transmisie dar mai puțin pronunțat. Presupunem că acest lucru s-ar explica printr-un proces de oxidare mai pronunțat,

datorat grosimii mai mici a păturii. Se constată de altfel că, cu cît stratul e mai subțire acest maxim e mai pronunțat. [Fig. 2].

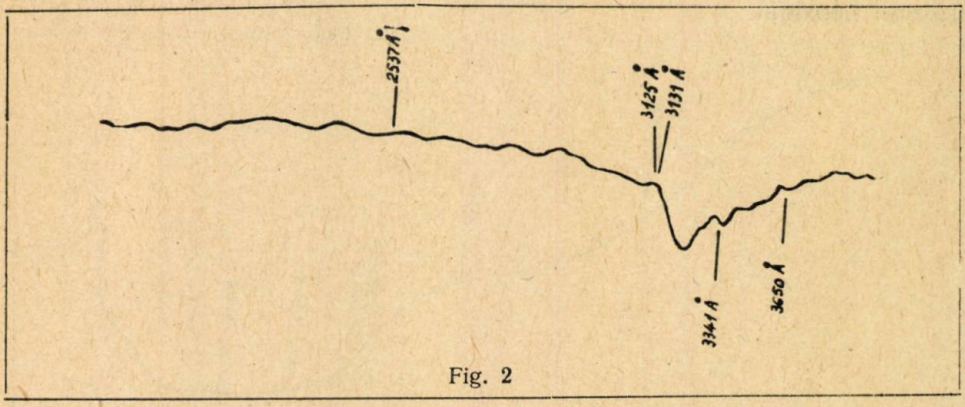


Fig. 2

c) Tot la grosimile mai mici 200—400 Å, maximul de transmisie caracteristic benzii de Ag, nu mai apare. [Fig. 3].

La altă serie de pături subțiri de Ag, proaspăt preparate, de grosime tot între 200—800 Å se constată :

d) În transmisie la grosime mică 200—400 Å imediat după depunere deci înainte de oxidare, nu se observă maximul de transmisie, caracteristic Ag metalic [Fig. 4] (confirmă punctul c).

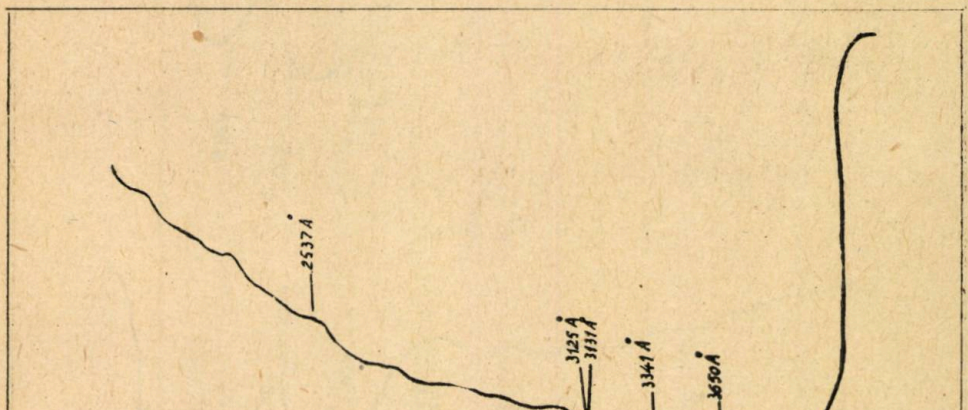


Fig. 3

e) După încălzire transmisia se structurează, apare maximul caracteristic argintului, dar lărgit și deplasat mai tare spre λ mari ; în plus mai apare un minim în transmisie, căruia pe spectrograma de reflexie a aceleiași pături, îi corespunde un maxim în reflexie la aproximativ 3500 Å. [Fig. 5] [Fig. 5′].

Această structurare presupunem că e legată de bandele de energie ale rețelei oxidului de Argint, care e pe cale de formare. Ele nu apar la argintul neoxidat.

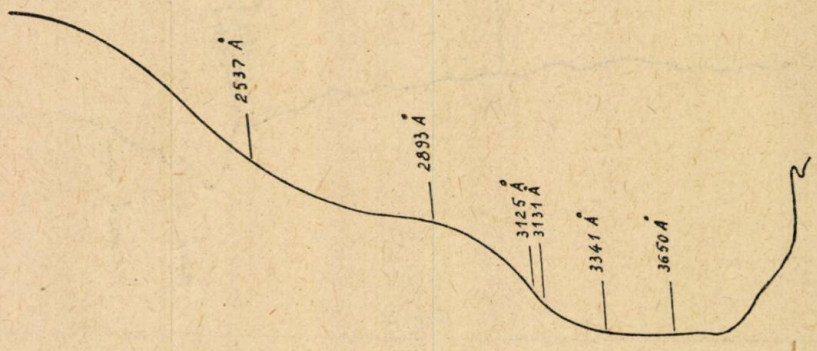


Fig. 4

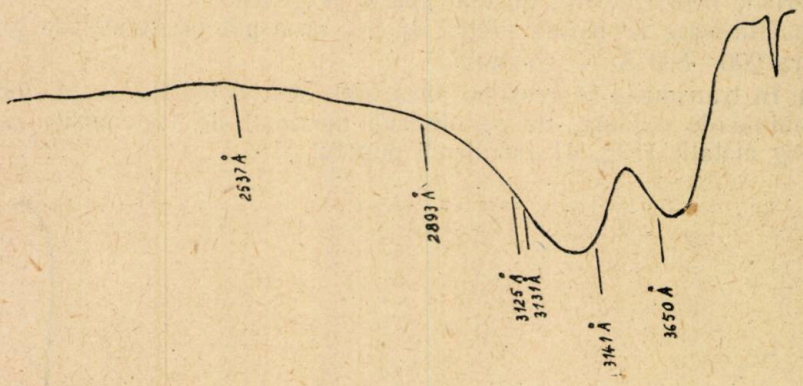


Fig. 5

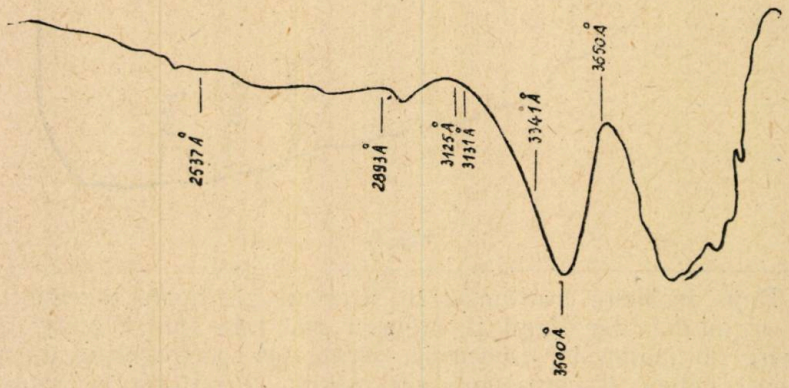


Fig. 5'

f) La pături mai groase, aproximativ 800 Å, în spectrul de transmisie la temperatura normală, apare transmisia caracteristică argintului metalic, cu maximul de transmisie la aproximativ 3200 Å: [Fig. 6]

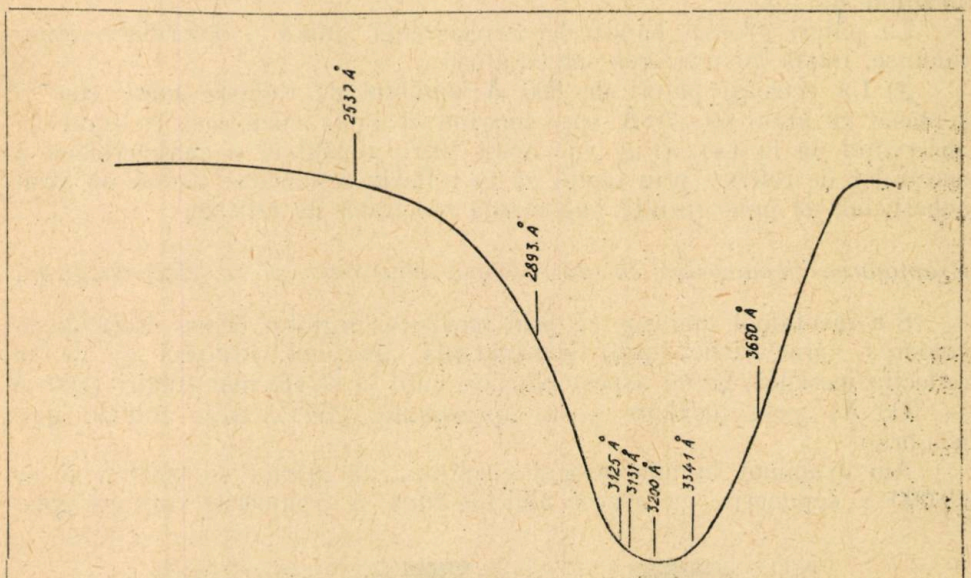


Fig. 6

comparate spectogramele, pentru pături de grosimi diferite 600 Å și 800 Å, oxidate la aceiași temperatură, se constată că semilărgirea maximului de

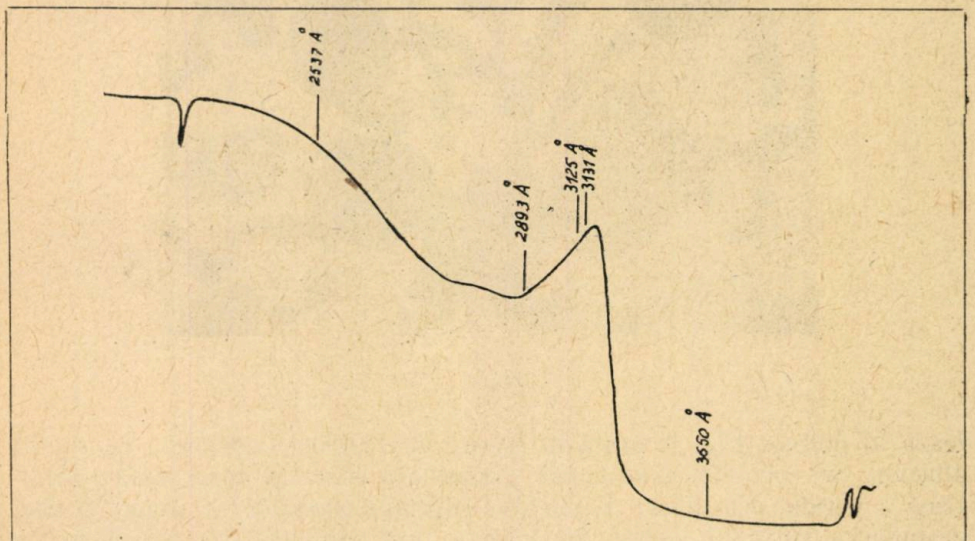


Fig. 7

transmisie a păturii mai groase, este de aproximativ 2 ori mai mare decît a păturii mai subțiri.

În general semilărgimea benzii de transmisie crește cu grosimea stratului de Ag.

La pături groase, banda de transparență suferă o deformare, ascuțindu-se, odată cu creșterea temperaturii.

g) La aceleași pături de 800 Å minimul de reflexie apare clar și deplasat cu vre-o 60—70 Å spre lungimi de undă mici, ceea ce confirmă observația de la (a). [Fig. 7]. Acest lucru constituie o caracteristică a spectrelor de reflexie prin faptul că în reflexie acționează numai un strat superficial, de unde rezultă importanța spectrelor de reflexie.

Examinarea depunerilor cu microscopul electronic și cu electronograful

S-a menționat mai sus că prin încălzire, argintul depus, trece de la culoarea caracteristică prin transparență, grosimii stratului și de la reflecția metalică, la un aspect albicios, care la strate mai subțiri (200 Å — 300 Å) prin încălzire peste aproximativ 250°C, trece într-un galben-brun.

Am examinat la microscopul electronic, la mărire de 6000 x și de 10 000 x depunerile cu aspect albicios-difuz și depunerile care se colo-

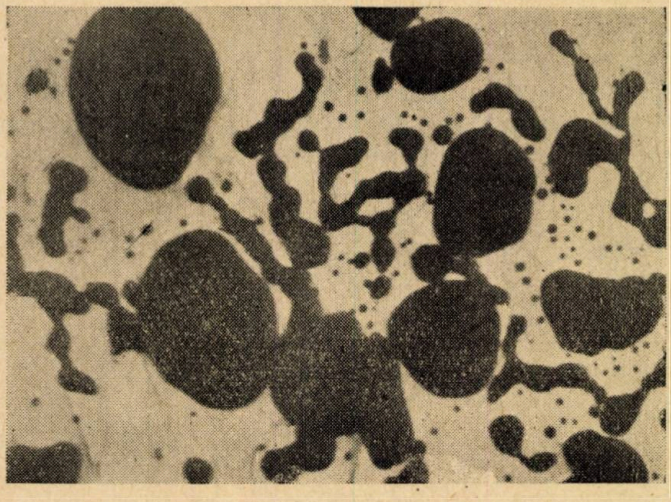


Fig. 8

rează în galben. Fig. 8, arată la mărire de 10 000x, depunerile cu aspect albicios. Se constată o structură granuloasă mare și neregulată ; încălzirea a permis prin aport de energie migrarea atomilor pe suport și deci granularea stratului depus. În această fază difracția electronică indică o structură policristalină și nu prezintă decît inelele caracteristice argintului.

Depunerile cu aspect colorat galben au o structură granulară mult mai fină (Fig. 9) indicînd un început de proces de fuziune. În difracția electronică a acestor strate apar de data aceasta și liniile caracteristice oxidului de argint. În concluzie examinarea cu microscopia și difracția electronică a straturilor depuse duce la concluzii în acord cu rezultatele microspectrogramelor de transmisie și reflecție discutate mai sus.

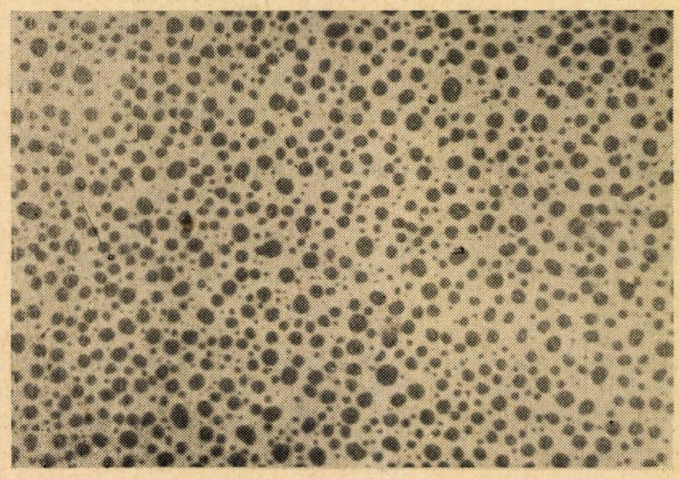


Fig. 9

În încheiere menționăm că într-un studiu publicat (6), am examinat straturile subțiri de argint, în același domeniu de temperaturi ca mai sus, din punct de vedere al emisivității lor totale. Abaterile de la legea radiației totale ($E=\varepsilon\sigma T^4$) pot să rezulte și din transformările de natură mecanică și chimică pe care le pune în evidență studiul de față.

Catedra de Fizică 1

BIBLIOGRAFIE

[1] *J. P. David:* J. de Phys. et le Radium t. 21, 157, 1960.
[2] *R. Philip:* J. de Phys. et le Rad. t. 21, 165, 1960.
[3] *G. Perny:* Ann. de Phys, t, 5, 1683, 1960.
[4] *I. Georgescu:* Comunicările Ses. Științifice IPB, 1960.
[5] *I. Georgescu, A. Ichimescu* și *I. Vieroșanu:* Comunicările sesiunii științifice IPB, 1962.
[6] *I. Agarbiceanu, A. Boiangiu* și *D. Moisil:* Com. Acad. R.P.R., nr. 12, 1961.

СПЕКТР В ОТРАЖЕННОМ И ПРОХОДЯЩЕМ СВЕТЕ НАГРЕТЫХ ТОНКИХ ПЛЁНОК СЕРЕБРА

(Краткое содержание)

В этой работе, рассматривается систематически с помощью спектрального анализа в отражённом и проходящем свете, а также с помощью электронного микроскопа, полоса прозрачности серебра. Для этого были использованы тонкие плёнки серебра, заключенные между 200—800 Å, нагретые до температуры приблизительно в 350°C. Полученные результаты можно видеть в приложенных спектрограммах, показывающих изменение появляющиеся в структуре полосы прозранности под влиянием температуры.

THE REFLECTION AND TRANSMISSION SPECTRA OF THIN FILMS OF SILVER SUBMITTED TO HEATING

(Summary)

The authors have studied by means of reflection spectroscopy and by transmission the modifications suffered by thin films of silver (200—800 A), heated up to 350°C. The results have been also followed by electronic microscopy.

LE SPECTRE DE RÉFLECTION ET DE TRANSMISSION DES COUCHES MINCES D'ARGENT SOUMISES À UN TRAITEMENT THERMIQUE

(Résumé)

On a étudié par le moyen de la spectroscopie de réflexion et de transmission les modifications subies par des couches minces d'argent (200—800A) soumises à un traitement thermique. Les modifications resultantes ont été examinées aussi par la microscopie électronique.

REFLEXIONS — UND DURCHLÄSSIGKEITSSPEKTRUM DÜNNER, THERMISCH BEHANDELTER SILBERSCHICHTEN

(Zusammenfassung)

Vorliegende Arbeit stellt eine systematische Untersuchung der Durchlässigkeitsbande des Silbers dar, die mittels spektroskopischer Methoden in reflektiertem und durchfallendem Licht sowie mittels eines Elektronenmikroskops durchgeführt wurde. Es wurden auf etwa 350°C erhitzte Silberschichten von 200—800 Å Dicke verwendet. Die Resultate sind aus den beigefügten Spektrogrammen ersichtlich, welche die in der Struktur der Durchlässigkeitsbande unter dem Einfluss der Temperatur auftretenden Veränderungen aufzeigen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

LA RÉPARTITION DU POTENTIEL LE LONG DES STRUCTURES SOUTERRAINES POURVUES D'INSTALLATIONS DE PROTECTION CATHODIQUE *

G. MOISIL

Maints auteurs ont établi des formules pour le calcul du potentiel le long des structures souterraines pourvues d'installations de protection cathodique.

Rogers [1], supposant que le potentiel $V_c\ (x)$ de la structure, et le courant qui s'échange entre la structure et le sol satisfont à l'équation des télégraphistes, propose la formule suivante :

$$V_c(x) = \frac{I}{2}\, r_0\, e^{-\gamma x} \tag{1}$$

I. étant le courant injecté, $r_0 = \sqrt{\frac{r_c}{g}}$, $\gamma = \sqrt{r_c\, g}$, r_c la résistance de la structure par unité de longueur, g la conductance de passage, entre la structure et le sol.

Grâce à sa simplicité, de nombreux auteurs, [2—12], recommandent la formule de Rogers.

De récents travaux, [13—21], parus surtout en U.R.S.S., signalent des discordances plus ou moins frappantes, entre les valeurs calculées par la formule (1) et les données expérimentales.

D'après Krasnoiarskii [16], les écarts entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées par la formule (1), sont dus à l'intense polarisation de la surface du métal, au voisinage du point d'absorption du courant et à la dépolarisation de cette surface, à grandes distances de ce point.

D'autres chercheurs [13], [14], [15], [19], [20], [22], [23], considèrent que ces écarts sont explicables, étant donné que la théorie de Rogers ignore le champ produit par les anodes, champ qui par ailleurs n'est pas négligeable.

Lounew et Erchow [13], recommandent la formule suivante, dont le deuxième terme est justement le potentiel produit par une anode ponctuelle

* Comunication présenté à la VII-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest, 7—8 avril 1962.

située à la distance D de l'axe de la structure, λ_s étant la conductibilité du sol :

$$V_c(x) = V_c(0) \cdot e^{-\gamma x} - \frac{I}{2\pi\lambda_s \sqrt{x^2 + D^2}} \tag{2}$$

Cette correction est d'ailleurs justifiée par les récents travaux expérimentaux de Trifel et Sakow [23].

Kotik [14], Nikolski et Rasoumov [24] et Glazkow, Dorochenko et Kotik [25], propose au lieu de la formule de Rogers, la formule suivante établie à l'aide de la méthode de Sunde [26, 27] :

$$V_c(x) = -\frac{I}{2}\left[r_0 e^{-\gamma x} + \frac{1}{\pi\lambda_s} \tau\Omega(\tau x, \tau D)\right] \tag{3}$$

Une méthode trés correcte pour le calcul du potentiel en un point d'un conducteur massif hétérogène, a été élaborée par Noether [28, 29], et développée par Gibrat [30]. Si l'on applique cette méthode pour le calcul du potentiel des structures pourvues d'une protection cathodique, on obtient la formule :

$$V_c = -\frac{r_c I}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(qa_0) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{2\pi r_c \lambda_s + q^2 [K_0(qa_0) + K_0(2qh)]} \cos xq\, dq \tag{4}$$

a_0 étant le rayon de la structure supposée cylindrique et de longueur infinie, h la profondeur à laquelle est enterrée la structure, D la distance entre l'anode, considérée ponctuelle et l'axe de la structure ; q est un paramètre d'intégration.

Toutefois, la formule (4), n'a jamais été utilisée, puisque la méthode de Gibrat suppose un contact parfait entre la structure et le sol, condition impossible à satisfaire en pratique.

Dans nos travaux antérieurs [31—32], nous avons montré qu'on peut appliquer la méthode de Gibrat, même si le conducteur est entouré par une gaine protectrice ayant une résistance d'isolement R par unité de longueur, à condition de substituer dans les formules le rayon a_0 de la structure par le rayon équivalent :

$$a = a_0 e^{-2\pi\lambda_s R} \tag{5}$$

Le potentiel de la structure entourée par une gaine protectrice sera donc :

$$V_c(x) = -\frac{r_c I}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(qa_0 e^{-2\pi\lambda_s R}) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{2\pi r_c \lambda_s + q^2 [K_0(qa_0 e^{-2\pi\lambda_s R}) + K_0(2qh)]} \cos xq\, dq \tag{6}$$

Afin de circonscrire les limites de valabilité de la formule (1) de Rogers, de la formule (2) de Lounew et Erchow, et des formules (4) et

(6) déduites par la méthode de Gibrat, nous nous proposons dans cette note de résoudre les problèmes suivants :

a) Nous allons d'abord établir une expression rigoureuse du potentiel sur la surface métallique de la structure.

b) Nous essayerons, grâce à des approximations convenablement choisies, de tirer de la formule générale, les formules (1), (2), (4) et (6).

c) Nous allons établir une expression approchée valable dans les conditions ou les formules approchées susmentionnées ne sont plus utilisables.

2. Calcul du potentiel de la structure.

2.1. *Position du problème.*

Soit une structure souterraine (fig. 1), de forme cylindrique, de section circulaire de rayon a_1, de longueur infinie, et de résistance r_c par unité de longueur, revêtue d'une gaine protectrice de conductibilité λ_i, le rayon de la structure y compris la graine étant a_2. La structure est enterrée à la profondeur h, sous la surface de séparation air-sol, supposée plane et infinite. On suppose le sol homogène, isotrope et linéaire, et de conductibilité constante λ_s.

A une distance D, de l'axe de la structure, se trouve une anode ponctuelle demi-enterrée. La courant que l'on injecte dans l'anode soit $+I$, tandis que le courant absorbé de la structure est $-I$. On néglige les tensions de contact.

Dans le domaine considéré, les lignes de courant s'échappent de la source $+I$, c'est-à-dire de l'anode, et se terminent sur la cource $-I$, c'est-à-dire sur le point de la structure d'où l'on soutire le courant.

La densité de courant J, satisfait à l'équation de continuité :

$$\nabla \bar{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

ρ_v étant la densité volumique de charge électrique.

D'autre part, par la loi d'Ohm, J est lié au potentiel :

$$\bar{J} = -\lambda \nabla V \tag{8}$$

Il résulte de (7) et (8) que le potentiel satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{9}$$

dont la solution formelle est :

$$V = \frac{1}{\lambda} \nabla^{-2} \left[\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right] \tag{10}$$

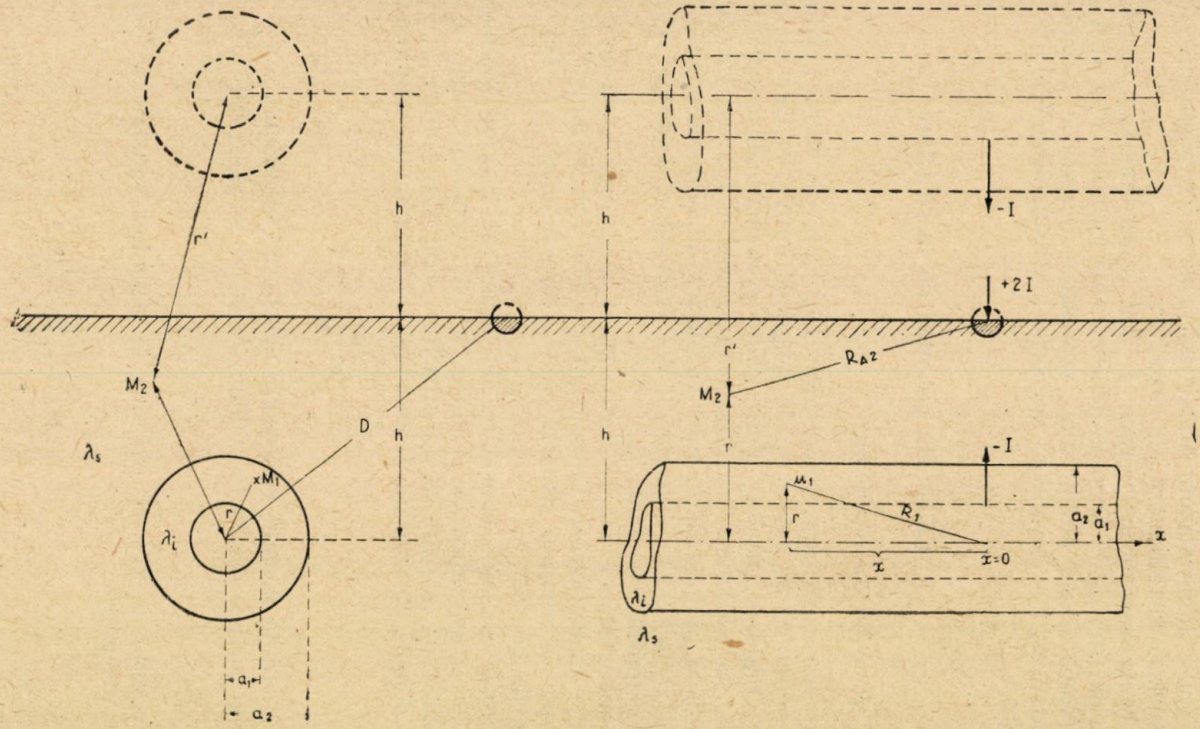


Fig. 1

Le potentiel V_i doit également satisfaire à certaines conditions de frontière.

Remarquons d'abord, que la distribution des charges électriques sur le plan air-sol, peut êtré éliminée, grâce au théorème des images électriques [33].

Sur la surface de contact entre le sol et la gaine protectrice, les conditions de continuité sont les suivantes :

$$V_i = V_s \tag{11}$$

$$\lambda_i \frac{\partial V_i}{\partial n} = \lambda_s \frac{\partial V_s}{\partial n}. \tag{12}$$

Enfin, le potentiel doit s'annuler à l'infini :

$$V(\infty) = 0. \tag{13}$$

2.2. *Calcul du potentiel V_1 en un point de la gaine protectrice.*

A chaque point de la gaine protectrice c'est-à-dire à chaque point de conductibilité λ_i, le potentiel V_i doit satisfaire à l'équation :

$$\nabla^2 V_i = \frac{1}{\lambda_i}\left[\frac{\partial \rho_{vi}}{\partial t}\right] \tag{14}$$

Selon Ivanenko et Sokolow [34] on peut aisément résoudre les équations éliptiques de ce type, à l'aide du formalisme de la fonction δ de Dirac.

Soit M_1 un point d'observation situé dans la gaine de conductibilité λ_i. Si l'on appelle r la distance entre ce point et l'axe de la structure, et x l'abscisse de ce point mesurée le long de cet axe, la distance entre M_1 et la source absorbante située sur la structure est en moyenne :

$$R_1 = \sqrt{x^2 + r^2}$$

Si l'on exprime maintenant $\dfrac{\partial \rho_{vi}}{\partial t}$ par l'intermède de la fonction δ, on obtient :

$$\frac{\partial \rho_{vi}}{\partial t} = -I\left[-\delta(R_1) + F(x)\frac{\delta(r-a_1)}{2\pi a_1} + \Psi_i(x)\frac{\delta(r-a_2)}{2\pi a_2}\right] \tag{15}$$

avec :

$$a_2 > r > a_1.$$

$F(x)$ est la fonction de distribution du courant sur la surface métallique de la structure, tandis que $\Psi_i(x)$ est la fonction de distribution du courant sur la surface qui sépare le sol de la gaine.

De (14) et de (15) on déduit :

$$V_i = -\frac{I}{\lambda_i}\nabla^{-2}\left\{-\delta(R_1) + F(x)\frac{\delta(r-a_1)}{2\pi a_1} + \Psi_i(x)\frac{\delta(r-a_2)}{2\pi a_2}\right\} \tag{16}$$

Mais on peut remarquer [34] :

$$\nabla^{-2}[-\delta(R_1)] = \frac{1}{4\pi R_1} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty K_0(qR_1)\cos xq\cdot dq \tag{17}$$

$$\nabla^{-2}\left[F(x)\frac{\delta(r-a_1)}{2\pi a_1}\right] = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty f(q)K_0(qr)I_0(qa_1)\cos xq\cdot dq \tag{18}$$

$$\nabla^{-2}\left[\Psi_i(x)\frac{\delta(r-a_2)}{2\pi a_2}\right] = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \psi_i(q)K_0(qa_2)I_0(qr)\cos xq\cdot dq \tag{19}$$

où :

$$f(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq\xi}F(\xi)\,d\xi \tag{20}$$

$$\psi_i(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq\xi}\Psi_i(\xi)\,d\xi \tag{21}$$

ξ étant une coordonnée d'intégration selon l'axe x.

On en tire :

$$V_i = \frac{1}{2\pi^2\lambda_i}\int_0^\infty [-K_0(qR_1) + f(q)K_0(qr)I_0(qa_1) + \psi_i(q)K_0(qa_2)I_0(qr)] \times \times \cos xq\cdot dq. \tag{22}$$

2.3. *Calcul du potentiel V_s, en un point du sol.*

Soit M_2, un point d'observation situé dans le sol, à la distance $r > a_2$ de l'axe de la structure souterraine, son abscisse étant x. La distance entre ce point et l'axe de l'image de la structure soit r' ; enfin soit R_2 la distance entre ce point et l'anode :

$$R_{A2} = \sqrt{R_A^2 + x^2}.$$

En un point du sol, $\frac{\partial \rho_{vs}}{\partial t}$ sera donnée par la relation

$$\frac{\partial \rho_{vs}}{\partial t} = -I\left\{\Psi_s(x)\left[\frac{\delta(r-a_2)}{2\pi a_2} + \frac{\delta(r'-a_2)}{2\pi a_2}\right] - 2\delta(R_2)\right\} \tag{23}$$

$\Psi_s(x)$ est la fonction de distribution du courant, sur la surface de séparation entre le sol et la gaine protectrice ; elle est également la fonction de distribution sur l'image de cette surface.

Le potentiel du point M_2 sera :

$$V_s = -\frac{I}{\lambda_s} \nabla^{-2} \left\{ \Psi_s(x) \left[\frac{\delta(r-a_2)}{2\pi a_2} + \frac{\delta(r'-a_2)}{2\pi a_2} \right] + 2\delta(R_2) \right\} \tag{24}$$

c'est-à-dire :

$$V_s = \frac{I}{2\pi^2 \lambda_s} \int_0^\infty \left\{ I_0(qa_2) [K_0(qr) + K_0(qr')] \psi_s(q) - 2K_0(qR_A) \right\} \cos xq\, dq \tag{25}$$

où :

$$\psi_s(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq\xi} \Psi_s(\xi)\, d\xi . \tag{26}$$

2.4. *Calcul des fonctions* $\psi_l(q)$ *et* $\psi_s(q)$.

Pour déterminer les fonctions $\psi_l(q)$ et $\psi_s(q)$ il suffirait d'écrire les conditions (11 et (12), en tenant compte que sur la surface de séparation entre le sol et la gaine $r = a_2$, et en moyenne $R_A = D$ et $r' = 2h$. On en obtient un système de deux équations en ψ_l et ψ_s, dont la solution est :

$$\psi_l(q) = A_1(q) + B_1(q) f(q) \tag{27}$$

$$\psi_s(q) = A_2(q) + B_2(q) f(q) \tag{28}$$

où :

$$A_1(q) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[K_0(qa_2) + 2\frac{\lambda_l}{\lambda_s} K_0(qD) \right] \left[K_1(qa_2) I_0(qa_1) + \frac{a_2}{2h} K_1(2qh) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_l}{\lambda_s} I_0(qa_2) [K_0(qa_2) + K_0(2qh)] \left[K_1(qa_2) + \frac{2a_2}{D} K_1(qD) \right] \right\} \tag{29}$$

$$B_1(q) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\lambda_l}{\lambda_s} K_1(qa_2) I_0(qa_1) I_0(qa_2) [K_0(qa_2) + K_0(2qh) - \right.$$

$$\left. - K_0(qa_2) I_0(qa_1) \left[K_1(qa_2) I_0(qa_1) + \frac{a_2}{2h} K_1(2qh) \right] \right\} \tag{30}$$

$$A_2(q) = -\frac{1}{\Delta} \left\{ K_0(qa_2) I_0(qa_2) \left[K_1(qa_2) + \frac{2a_2}{D} K_1(qD) \right] + \right.$$

$$\left. + K_0(qa_2) I_1(qa_2) \left[K_0(qa_2) + 2\frac{\lambda_l}{\lambda_s} K_0(qD) \right] \right\} \tag{31}$$

$$B_2(q) = \frac{1}{\Delta} K_0(qa_2) I_0^2(qa_1) K_1(qa_1) + K_0^2(qa_2) I_0(qa_2) I_1(qa_2)] \tag{32}$$

$$\Delta = K_0(qa_2) I_0(qa_2) \left\{ K_1(qa_2) I_0(qa_1) + \frac{a_2}{2h} K_1(2qh) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_l}{\lambda_s} I_1(qa_2) [K_0(qa_2) + K_0(2qh)] \right\} \tag{33}$$

2.5. *Calcul du potentiel sur la surface métallique de la structure.*

Pour obtenir le potentiel sur la surface de la structure, on n'a qu'à mettre dans la relation (32), $r = a_1$, $R_1 = \sqrt{a_1^2 + x^2}$, et de remplacer $\psi_i(q)$ par son expression tirée de (27) :

$$V_c(x) = \frac{I}{2\pi\lambda_i} \int_0^\infty \{ -K_0(qa_1) + \{[K_0(qa_1) + B_1(q) K_0(qa_2)] f(q) + A_1(q) K_0(qa_2)\} I_0(qa_1) \} \cos xq \cdot dq . \tag{34}$$

Ainsi que Noether [28], l'a déja remarqué, le potentiel $V_c(x)$, sur la surface métallique de la structure est lié à la densité linéaire du courant de fuite, par la relation :

$$j(x) = \frac{1}{r_c} \frac{d^2 V_c(x)}{dx^2} . \tag{35}$$

D'autre part, on a :

$$j(x) = I \cdot F(x). \tag{36}$$

Et si l'on applique à la relation (20) la formule de Meslin-Fourier, on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(q) \cos xq \cdot dq . \tag{37}$$

En rapprochant les expressions (36) et (37) à la relation (35) de Noether, on en tire l'équation :

$$\frac{d^2 V_c(x)}{dx^2} = \frac{r_c I}{\pi} \int_0^\infty f(q) \cos xq \cdot dq \tag{38}$$

que l'on intégre immédiatement :

$$V_c(x) = -\frac{r_c I}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(q)}{q^2} \cos xq \cdot dq . \tag{39}$$

Enfin en rapprochant les relations (34) et (39) on en déduit une équation en $f(q)$, dont la solution insérée en (39), nous donne l'expresion exacte ci-dessous du potentiel sur la surface métallique de la structure :

$$V_c(x) = -\frac{r_c I}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(qa_1) - A_1(q) K_0(qa_2) I_0(qa_1)}{2\pi r_c \lambda_s + q^2 [K_0(qa_1) + B_1(q) K_0(qa_2)] I_0(qa_1)} \cos xq \cdot dq \tag{40}$$

Les valeurs des fonctions de Bessel K_0, K_1, I_0 et I_1 se trouvent dans les tables de Vinogradow [35].

3. Formules approchées.

3.1. *Considérations générales.*

Dans les divers cas pratiques, tous les paramètres de la formule (40), sont sujets à des variations comprises entre de très larges limites. Par exemple, la résistivité du sol, présente des variations comprises entre environ 1Ωm et 10^4 Ω m [9], selon la nature et le degré d'humidité du sol. La résistivité de la gaine protectrice peut varier de quelques ohmmètres, jusqu'à 10^{15} Ω m [36]. La résistance r_0, de la structure par unité de longueur, a des valeurs minimes de 10^{-6}Ω/m, mais elle peut atteindre, pour certains cables de télécommunication [36], des valeurs de 10^{-2}Ω/m.

A l'exception de la profondeur h, les paramètres géometriques sont également affectés par d'importantes variations. Il existe des câbles dont le rayon est inférieur à 1 cm, tandis que le diamétre de certaines conduites en acier peut dépasser 1m. Enfin, la distance D, entre l'anode et l'axe de la structure peut varier de quelques dizaines de mètres à quelques certaines de mètres [7], [13], [18].

Ce sont justement ces énormes variations des paramètres, qui nous empêchent de déduire une formule approchée à la fois simple, dans laquelle on néglige donc quelques-uns des paramètres, et qui soit en même temps valable pour toutes les valeurs que peuvent prendre tous ces paramètres. C'est pour cette raison, que les différentes formules approximatives sont parfois concordantes avec l'expérience, tandis que maintes fois il y a une grande discordance entre les valeurs mesurées et les valeur calculées à l'aide de ces formules.

Au contraire, il este aisé de déduire les formule approchées recommandées par divers auteurs, si dans la formule (40) on restreint le domaine de variation de quelques-uns des paramètres.

3.2. *Formule approchée, valable pour les petites valeurs de a_1 et a_2.*

Si a_1 et a_2 sont petits par rapport à D et à h, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{a_2}{2h} \approx 0 \qquad && \frac{2a_2}{D} \approx 0 \\ &I_0(qa_1) \approx 1 \qquad && I_1(xa_1) \approx 0 \\ &I_0(qa_2) \approx 1 \qquad && I_1(qa_2) \approx 0 \end{aligned} \tag{41}$$

Grâce à ces approximations, les expression de A_1, A_2, B_1 et B_2 se simplifient considérablement, et il en résulte pour $V_c(x)$ l'expression suivante :

$$V_c(x) = -$$

$$= -\frac{r_c I}{\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{\lambda_s}{\lambda_i} K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i} - 1\right) K_0(qa_2) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{2\pi r_c \lambda_s + q^2 \left[\frac{\lambda_s}{\lambda_i} K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i} - 1\right) K_0(qa_2) + K_0(2qh)\right]} \cos x\, q \cdot dq \tag{42}$$

3.3. *Formules approchées déduites par la méthode de Gibrat.*

Si dans la formule (42), on indetifie la conductibilité λ_i de la gaine, avec la conductibilité λ_s du sol, on retrouve la formule (4) établie par la méthode de Gibrat.

Afin de retrouver la formule (6), valable dans le cas des structures revêtues d'une gaine protectrice, nous employons pour $K_0(y)$ l'expression approchée :

$$K_0(y) \approx -\left[\ln \frac{\gamma}{2} + \ln y\right] \tag{43}$$

où $\gamma = e^C$, C étant la constante d'Euler. On pourra écrire :

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_i} K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i} - 1\right) K_0(qa_2) \approx -\ln\left[\frac{\gamma}{2} qa_2\right] + \frac{\lambda_s}{\lambda_i} \ln \frac{a_2}{a_1}. \tag{44}$$

D'autre part, un calcul élémentaire, donne pour la résistance d'isolement de la gaine l'expression suivante :

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{a_2}{a_1} \tag{45}$$

et par conséquent :

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_i} K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i} - 1\right) K_0(qa_2) \approx -\left[\ln \frac{\gamma}{2} + \ln(qa_2 e^{-2\pi\lambda_s R})\right] \approx K_0(qa) \tag{46}$$

où :

$$a = a_0 e^{-2\pi\lambda_s R}$$

$$a_0 \approx a_2 \approx a_1 .$$

Si maintenant on remplace en (42) par $K_0(qa)$ le premier membre de (46), on obtient la formule (6).

Il est justifié donc, d'employer toujours la méthode de Gibrat, même dans le cas des structures revêtues d'une gaine protectrice sufisamment mince, à condition de remplacer le rayon a_0 de la structure par un rayon équivalent [31, 32] :

$$a = a_0 e^{-2\pi\lambda_s R} .$$

3.4. *Formule approchée de Rogers.*

On peut déduire de la formule exacte (40) la formule (1) due à Rogers, si l'on admet non seulement les approximations faites pour retrouver la formule (6) mais encore les restrictions :

$$\lambda_s R \geqslant 100 \tag{47 a}$$

$$\lambda_s r_c \geqslant 10^{-6} . \tag{47 b}$$

R, r_c et λ_s étant mesurées dans le système d'unités S. I.

Les conditions (47) sont généralement remplies, chaque fois qu'il s'agit de conduites en acier recouvertes d'un revêtement protecteur de bonne qualité.

Nous divisons d'abord le domaine d"intégration de la relation (6) en deux sous-domaines : le premier compris entre les limites $q = 0$ et $q = 10^{-2}$ et le deuxième entre les limites $q = 10^{-2}$ et $q = \infty$:

$$V_c(x) = J_1 + J_2 . \tag{48}$$

Dans le sous-domaine $O \leqslant q \leqslant 10^{-2}$, l'approximation (43) étant valable on a :

$$J_1 = \frac{r_c I}{2\pi} \ln \frac{2ah}{D^2} \int_0^{10^{-2}} \frac{\cos xq \cdot dq}{\pi r_c \lambda_s - q^2 \ln \frac{\gamma \sqrt{2ah}}{2} q} \tag{49}$$

Mais, grâce a (47), l'on peut également écrire les expressions approchées :

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{2ah}{D} \approx - \lambda_s R$$

$$\pi r_c \lambda_s - q^2 \ln \frac{\gamma \sqrt{2ah}}{2} q \approx \pi r_c \lambda_s + q^2 \pi \lambda_s R$$

et par conséquent :

$$J_1 = - \frac{r_c I}{\pi} \int_0^{10^{-2}} \frac{\cos xq \cdot dq}{\frac{r_c}{R} + q^2} = - \frac{r_c I}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\cos xq \cdot dq}{\frac{r_c}{R} + q^2} - \int_{10^{-2}}^{\infty} \frac{\cos xq \cdot pq}{\frac{r_c}{R} + q^2} \right\} \tag{50}$$

Remplaçant la première intégrale par sa valeur [38], et tenant compte que pour $q > 10^{-2}$ on a :

$$\frac{r_c}{R} \ll q^2 ,$$

on peut écrire :

$$J_1 = - \frac{I}{2} r_0 e^{-\gamma x} + \frac{r_c I}{\pi} \int_{10^{-2}}^{\infty} \frac{\cos xq \cdot dq}{q^2} \tag{51}$$

où :

$$r_0 = \sqrt{r_c R} , \quad \gamma = \sqrt{\frac{r_c}{R}} ,$$

Afin de calculer l'intégrale :

$$J_2 = - \frac{r_c I}{\pi} \int_{10^{-2}}^{\infty} \frac{K_0(qa) + K_0(2qh) - 2K_0(qL)}{2\pi r_c \lambda_s + q^2 [K_0(qa) + K_0(2qh)]} \cos xq \cdot dq \tag{52}$$

on remarque que même dans le cas le moins favorable ($q=10^{-2}$), on a toujours :

$$K_0(qa)+K_0(2qh) \gg 2K_0(qD)$$

$$K_0(qa)+K_0(2qh) \gg \frac{2\pi r_c \lambda_s}{q^2}$$

et l'on peut donc écrire l'expression approchée suivante :

$$J_2 = -\frac{r_c I}{\pi}\int_{10^{-2}}^{\infty}\frac{\cos xq\cdot dq}{q^2} \tag{53}$$

D'après (48), (51) et (53) on en déduit :

$$V_c(x) = -\frac{I}{2} r_0 e^{-\gamma x} \tag{1}$$

c'est-à-dire la formule due a Rogers.

3.5. *Formule approchée de Lounew et Erchow.*

Dans le calcul exposé dans le paragraphe précédent, le champ produit par l'anode était tout simplement négligé, à cause de l'approximation :

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2ah}{D^2} = \frac{1}{2\pi}\ln 2a_0 h - \lambda_s R + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{D^2} \approx -\lambda_s R .$$

Toutefois, le terme $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{D^2}$ n'est plus négligeable, dès que l'anode se trouve à une distance $D > 300$ m, de l'axe de la structure. Lorsque D tend vers l'infini $\ln\frac{1}{D^2}$ tend vers $-\infty$. Le potentiel d'une structure électriquement protéjée, dont l'anode se trouve à l'infini, sera donc :

$$V_c = -\frac{I}{2} r_0 e^{-\gamma x} + V_0 \tag{54}$$

où :

$$V_0 = V(\infty) = \infty .$$

Ce résultat n'est point surprenant ; on le rencontre chaque fois qu'il y a des charges ou des sources de courant situées à l'infini.

Nous allons calculer encore une fois le potentiel, en admettant les mêmes approximations, mais cette fois nous n'ignorerons plus le champ engendré par l'anode.

Nous supposons que le potentiel peut être exprimé sous la forme d'une somme de deux potentiels partiels :

$$V = U + W .$$

U représente le potentiel du sol dû au champs des courants produit par la source absorbante placée sur la structure et par une électrode située à l'infini injectant dans le sol un courant I_A.

W représente le potentiel dû au champ des courants produit par l'anode injectant le courant I_A dans le sol, et par une électrode située à l'infini qui absorbe le même courant. Si l'on superpose ces deux potentiels on obtient justement le potentiel V, tenant compte cette fois du champ engendré par l'anode.

Sur la surface métallique de la structure le potentiel sera :

$$V_c = U_c + W_c. \tag{56}$$

Ou, tenant compte de la formule de Rogers :

$$U_c = -\frac{I}{2} r_0 e^{-\gamma x} + U_0$$
$$W_c = W_{A_c} + W_0 \tag{57}$$

et évidemment :

$$U_0 + W_0 = 0. \tag{58}$$

D'après (56), (57) et (58) on en conclut :

$$V_c = -\frac{I}{2} r_0 e^{-\gamma x} + W_{A_c} \tag{59}$$

La fonction W_A peut être calculée selon la théorie générale exposée dans le paragraphe 2. Si l'on néglige l'influence de la structure sur l'anode, on en obtient

$$W_{A_c} = \frac{I_A}{2\pi\lambda_s \sqrt{x^2 + D^2}}. \tag{60}$$

Et puisque $I_A = -I$, on tire d'aprés (59) et (60) la formule (3), recommandée par Lounew et Erchow.

4. Formele aprochée, valable pour de petites valeurs de la résistance d'isolement de la gaine protectrice.

On peut établir une formule approchée, assez simple chaque fois que R est du même ordre de grandeur que $1/\lambda_s$ et $r_c \geqslant 10^{-3}$ Ω/m. Dans ce but nous diviserons le domaine d'intégration dans l'équation (6) en trois sous-domaines :

$$V_c(x) = -\frac{r_c I}{\pi} \left\{ \int_0^{Q_1} + \int_{Q_1}^{Q_2} + \int_{Q_2}^{\infty} \right\} = T_1 + T_2 + T_3. \tag{61}$$

La limite Q_1, doit etre assez petite pour que l'approximation (43) soit justifée à l'intérieur du domaine $0 \leqq q \leqq Q_1$. On obtient pour le terme T_1 :

$$T_1 = \frac{1}{2\pi^2\lambda_s} \ln \frac{2ah}{D^2} \int_0^{Q_1} \frac{\cos xq \cdot dq}{1 - \varphi(q)} \tag{62}$$

où :

$$\varphi(q)=\frac{1}{2\pi r_c \lambda_s}\, q^2 \ln\left(\frac{\gamma}{2}\sqrt{2ah}\; q\right). \tag{63}$$

Nous allons maintenant imposer à la limite Q_1, encore une condition, à savoir elle doit etre assez petite, pour que l'approximation :

$$\frac{1}{1-\varphi(q)} \approx 1+\varphi(q)$$

soit valable en même temps.

Dans ce cas :

$$T_1=\frac{1}{2\pi^2\lambda_s}\ln\frac{2ah}{D^2}\int_0^{Q_1}[1+\varphi(q)]\cdot\cos xq\cdot dq \tag{64}$$

l'intégration étant facile à effectuer.

Considérons maintenant le terme :

$$T_2=-\frac{r_c I}{\pi}\int_{Q_1}^{Q_2}\frac{K_0(qa)+K_0(2qh)-2K_0(qD)}{2\pi r_c\lambda_s+q^2[K_0(qa)+K_0(2qh)]}\cos xq\cdot dq \tag{65}$$

La limite Q_2 doit être choisie de telle manière qu'on ait pour le domaine $q \geqq Q_2$:

$$K_0(qa)+K_0(2qh) \gg \frac{2\pi r_c\lambda_s}{q^2} \tag{66 a}$$

$$K_0(qa)+K_0(2qh) \gg 2K_0(qD) \tag{66 b}$$

Si l'on voulait être rigoureux, l'approximation (66a) ne serait plus valable pour de grandes valeurs de q, la fonction $K_0(y)$ devenant nulle exponentiellement pour y infini. Toutefois, pour ces grandes valeurs de q, l'intégrale devient tout à fait négligeable.

Mais à l'intérieur de l'intervalle $Q_1 \leqq q \leqq Q_2$, tous les termes du numérateur et du dénominateur sont du même ordre de grandeur, et par conséquent aucuns de ces termes ne peuvent être négligés. Toutefois, puisque cet intervalle est assez étroit, et la variation des fonctions de Bessel K_0 assez lente, nous pouvons admettre que la fonction :

$$\Phi(q)=\frac{K_0(qa)+K_0(qh)-2K_0(qD)}{\frac{2\pi r_c\lambda_s}{q^2}+K_0(qa)+K_0(2qh)} \tag{67}$$

conserve à l'intérieur de cet intervalle la valeur constante :

$$\Phi_0=\frac{1}{2}[\Phi(Q_1)+\Phi(Q_2)]=\frac{1}{2}[\Phi(Q_1)+1]. \tag{68}$$

Il en résulte :

$$T_2 = -\frac{r_c I}{\pi}\,[1+\Phi(Q_1)]\int_{Q_2}^{Q_1}\frac{\cos\, xq\cdot dq}{q^2}. \tag{69}$$

Les mêmes considérations conduisent à l'expression suivante du terme T_3 :

$$T_3 = -\frac{r_c I}{\pi}\int_{Q_2}^{\infty}\frac{\cos\, xd\cdot dq}{q^2} \tag{70}$$

En éffectuant les intégrales dans les expressions de T_1, T_2 et T_3, on trouve finalement :

$$V_c(x) = I\left\{\alpha_1[\mu_1+\alpha_2(\alpha_3\mu_2+\mu_3)]-\alpha_4\left\{\frac{1}{2}\,[1+\Phi(Q_1)]\,\nu_1+\nu_2\right\}\right\} \tag{71}$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi^2\lambda_s}\ln\frac{2ah}{D^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\pi r_c \lambda_s}$$

$$\alpha_3 = \ln\frac{2}{\gamma}\;\frac{1}{\sqrt{2ah}}$$

$$\alpha_4 = \frac{r_0}{\pi}$$

$$\mu_1 = \frac{\sin x\,Q_1}{x}$$

$$\mu_2 = \frac{Q_1^2\sin x\,Q_1}{x}+2\left[\frac{Q_1\cos x\,Q_1}{x^2}-\frac{\sin 2\,Q_1}{x^3}\right]$$

$$\mu_3 = \frac{Q_1^2\ln Q_1\,\sin x\,Q_1}{x}+\frac{Q_1\cos x\,Q_1\,[1-2\ln Q_1]}{x^2}+$$

$$+\frac{\sin x\,Q_1(3+2\ln Q_1)-2\,Si(x\,Q_1)}{x^3}.$$

$$\nu_1 = \frac{\cos x\,Q_1}{Q_1}-\frac{\cos x\,Q_2}{Q_2}-x\,[Si(x\,Q_2)-Si(x\,Q_1)]$$

$$\nu_2 = \frac{\cos x\,Q_2}{Q_2}-x\left[\frac{\pi}{2}-Si(x\,Q_2)\right].$$

5. Méthode de détermination de la résistance d'isolement.

Plusieurs auteurs [18], [23], ont déterminé la résistance d'isolement de la gaine protectrice d'une structure souterraine, en insérant dans la formule de Rogers, ou de Lounew-Erchow, les valeurs mesurées du potentiel le long de la structure.

On peut également déterminer la valeur moyenne de R, le long de la structure, à l'aide de la formule (6), (40) ou (42).

En effet, toutes ces formules ont la forme :

$$V_c(x) = \int_0^\infty \theta(q) \cos xq \cdot dq \,. \tag{72}$$

Si l'on applique la formule de Meslin-Fourier on a :

$$\theta(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty V_c(x) \cos xq \cdot dq \,. \tag{73}$$

Et puisque la fonction $\theta(q)$ est finie même pour $q=0$:

$$\theta(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty V_c(x)\, dx = \frac{K}{\pi} \tag{74}$$

La valeur K de l'intégrale, peut être déterminée par la courbe expérimentale $V_c = V_c(x)$, à l'aide d'un planimètre.

Si l'on emploie la formule (6) et la relation approchée (43) pour les petites valeurs de q, on trouve, après le passage à la limite $q \to 0$:

$$R = \frac{|K|}{I} + \frac{1}{\pi \lambda_s} \ln \frac{\sqrt{2 a_0 h}}{D} \,. \tag{75}$$

La chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Rogers W.* — Petrol Eng. *12*, Nr. 3 (1940) 66—72.

[2] *Pritula A. V.* — Katodnaia zastchita trouboprovodow ot potchewenoi korrozii. Gostoptechisdat (1945), Moscou.

[3] *Kalman V. S.* — Elektritcheskaia zastchita podzemnych trouboprovodow ot korrozii. Aznephtisdat (1946).

[4] *Tzikerman L. I.* — Borba s korrozii podzemnych metallitcheskich trouboprovodow. Gos. isd. po. stroit. i arhit. (1951), Moscou.

[5] *Matena S.* — Paliva (1951) Nr. 1, 189—198.

[6] *Bibillo A.* — Gaz, woda i tehnika sanitaria Nr. 3 (1953) 74—78.

[7] *Mihailow M. I., Akoulionok V. A., Martchenko A. F.* — Zastchita mejdougorodnych kabeley sviazi ot korrozii (1953). Moscou.

[8] *Jouk I. P.* — Korrozia i zastchita metallow G.N.T.I. (1957), Moscou.

[9] *Morgan J. H.* — Cathodic protection Leonard Hill, London, 1959.

[10] *Ostaszewicz Jerzy* — Ochrona podziemnuych urzadzne metallowych przed korozja. Arkady-Warszawa (1959).

[11] * * * — Korrosion (11). Kathodischer Korrosionsschutz. Bericht ueber die Discusionstagung in Frankfurt a. Main an 11 und 12 Febr. 1958. Verlag Chemie Weinheim, 1959.

[12] *Boubela L.* et *Radomil M.* — Paliva Nr. 2 (1960) 47—51.

[13] *Lounew A. F., Erchow I. M.* — Troudy VI vsessoiouznow sobestchania po korrozii i zastchita metallow. Isd. A. N. S.S.S.R. (1958). Moscou, 36—46.

[14] *Kotik V. G.* — Idibem, 47—60.

[15] *Tzekoun N. A.* — Ibidem 79—90.

[16] *Krasnoiarskii V. V.* — Ibidem 140—47.

[17] *Trifel M. S.* — Ibidem 224—240.

[18] *Frantsewitch I. N., Krouchtchewa E. V. et Frantsewich - Zabloudowskaia T. F.* — Katodnaia zastchita magistralnych trouboprovodow Isd. Ucr. S.S.S.R. Kiew (1949).

[19] *Tsekoun N. A.* — Energetitcheschii Bulletin 10 (1958).

[20] *Powell A. M.* et *Morgan J. H.* — Petroleum 20 Nr. 9 (1957), 135.

[21] *Spektor B. V.* — Nepht. Hos. Nr. 5 (1954).

[22] *Marshall E. Parker* — The oil and Gas Cy (supl: Corrosion and its control). (1956) Tulsa — Oklahoma.

[23] *Trifel M. S.* et *Sakow V. I.* — Gaz. Prom. Nr. 1 (1960). 48—54.

[24] *Nikolski V. V. et Rasoumov L. P.* — Katodnaia zastchita podzemnych kabelei sveazi ot korrozii Sveazisdat 1958 (Moscou).

[25] *Glazkow V. I., Dorochenko P. G. et Kotik V. G.* — Zastchita magistralnych trouboprovodow ot podzemnoi korrozii. Gostoptehisdat (1960) Moscou.

[26] *Sunde, E. D.* — El. Engn. *55* Nr. 12 (1936), 1338—1346.

[27] *Sunde E. D.* — Earth conductions effects in transmissions systems. Van Nostrand (1949). New-York, London, Toronto.

[28] *Noether F.* — Wiss. Veröff, aus dem Siemens-Konzern *1* Nr. 3 (1922) 35—60.

[29] *Noether F.* — Handbuch der Physik *13* Berlin J. Springer 1928. 76—93.

[30] *Gibrat R.* — Bull. Soc. Fr. électr. (1934). 749.

[31] *Moisil Gh.* — Electrotehnica *3*, Nr. 12 (1955), 530—535.

[32] *Moisil Gh.* — Electrotehnica *4*, Nr. 8 (1956).

[33] *Maxwell J. Clerk* — Traité d'Electricité et de Magnetisme, vol. I (1885) Paris. Gauthier Villars.

[34] *Ivanenko D. et Sokolow A.* — Klassitcheskaia teoria polia (1951) Moscou.

[35] *Vinogradow I. M.* — Tablitzy znatchenii funcții Besselia Isd. A. N. S.S.S.R. (1950) Moscou-Léningrade.

[36] *Riabtsew I. I.* — Zastchita podzemnych ssoorougenii ot korrozii. Isd. Min. Kom. Hos. R.S.F.S.R. (1959) Moscou.

[37] *Gray A.* et *Mathews S. E.* — A treatise on Bessels functions and their applications to physics. Macmillan. London. (1952).

[38] *Rygik I. M. et Gradstein I. S.* — Tabele de integrale, sume serii și produse. Ed. Tehnică (1955) Bucarest (traduction) .

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ВДОЛЬ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПОДЗЕМНОГО СООРУЖЕНИЯ

(Краткое содержание)

С помощью функции Дирака, интегрируем уравнение Лапласа (9). и получается формула (40). С помощью приближения из этой формулы выводятся следующие формулы (1), (2), (4), (6), а также выражение (75) сопротивление изоляционной оболочки сооружения.

THE DISTRIBUTION OF THE POTENTIAL ALONG THE BURIED STRUCTURES PROVIDED WITH INSTALLATIONS OF CATHODIC PROTECTION

(Summary)

The δ-Dirac function is used for solving the elliptical equation (9), and the solution (40) is obtained. By approximating this solution, the formula (1), (2), (4) and (6) are obtained, as well as the expression (75) for the calculus of the insulating resistance of the structure-coating.

LA RÉPARTITION DU POTENTIEL LE LONG DES STRUCTURES SOUTERRAINES POURVUES D'INSTALLATIONS DE PROTECTION CATHODIQUE

(Résumé)

On établit une expression rigoureuse (40) du potentiel sur la surface métallique d'une structure souterraine, en intégrant l'équation elliptique (9) à l'aide du formalisme de la fonction de Dirac. Grâce à des approximations convenablement choisies, on tire de la formule générale les formules approchées (1), (2), (4), (6) recommandées par divers auteurs, et la formule (75) utile pour la détermination de la résistance d'isolement de la gaine protectrice.

POTENTIALVERTEILUNG LÄNGS EINER UNTERIRDISCHEN KATHODISCH GESCHÜTZTEN ROHR-ODER KABEL-LEITUNG

(Zusammenfassung)

Mittels der Dirac-schen δ-Funktion, löst man die elliptische Differentialgleichung (9) und erhält für die Potentialverteilung an der metallischen Oberfläche einer unterirdischen kathodisch geschutzten Rohr-oder Kabelleitung die Formel (40). Die Formeln (1), (2), (4) und (6), sind Näherungen der genaueren Formel (40) und ebenso die Formel (75), welche den Isolationswiderstand der Umhüllung gibt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

OBSERVAȚII ASUPRA INFLUENȚEI AERULUI ȘI VAPORILOR DE APĂ LA DIFERITE PRESIUNI ASUPRA CONDUCTIBILITĂȚII ELECTRICE A MONOCRISTALULUI DE CLORURĂ DE SODIU *

CANDIDA GHEORGHIȚĂ-OANCEA, PAUL CRISTEA

I. Introducere.

Este cunoscut faptul că atmosfera ambiantă modifică proprietățile superficiale ale cristalelor și corpurilor în general, afectînd spre exemplu conductibilitatea electrică a substanței. Această influență a atmosferei ambiante, a aerului și a vaporilor de apă în mod particular, contribuie la modificarea potențialului suprafeței și ca urmare unele fenomene se manifestă în aer mult mai diferit decît în vid. În lucrarea de față, am căutat să facem cîteva observații asupra modului cum este influențată conductibilitatea electrică a unui monocristal de NaCl sub acțiunea aerului și a vaporilor de apă la diferite presiuni.

II. Partea experimentală

Dispozitivul experimental.

Dispozitivul experimental folosit, constă din o incintă de sticlă formată din 2 părți îmbinate cu ajutorul unui rodaj, în care se realizează un vid de 10^{-3} mmHg. Celula de clorură de sodiu este construită astfel: se clivează un cristal de clorură de sodiu și se pictează pe el cu aquadag cei doi electrozi la distanța de 1—3 mm, realizîndu-se astfel o celulă de suprafață. Curenții se măsoară cu ajutorul unui montaj în punte cu lampă electrometrică urmat de un amplificator de curent continuu [1]. Legătura de la celula de sare la grila lămpii electrometrice este ecranată electric pentru a putea face citirile în vid, pentru valori foarte mici ale curentului.

Pentru a obține o atmosferă de aer uscat, în incintă se introduce o eprubetă cu clorură de calciu.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

Determinările experimentale.

Conductibilitatea electrică a fost determinată întîi în aer la presiunea atmosferică, apoi la diferite presiuni, pînă la 10^{-3} mmHg, scoțînd prin pompare în etape aerul din instalație. Presiunea din incintă a fost citită

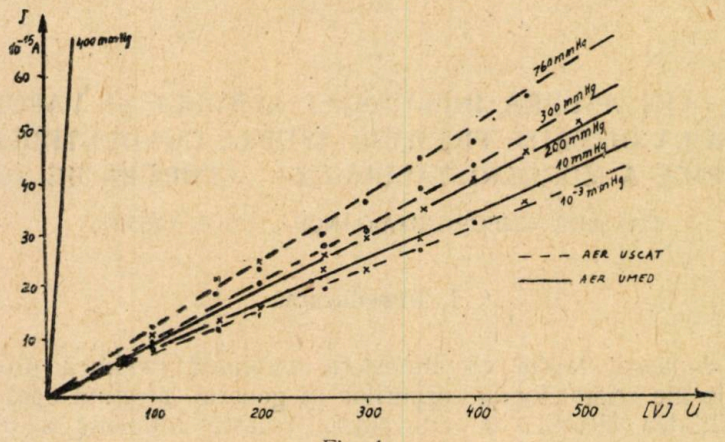


Fig. 1

pînă la ordinul milimetrilor cu ajutorul unui manometru cu mercur, pus în legătură directă cu incinta unde se făceau măsurătorile. Citirile pentru o anumită presiune se făceau după cca. 1/2 oră, pentru a se stabili un regim de echilibru.

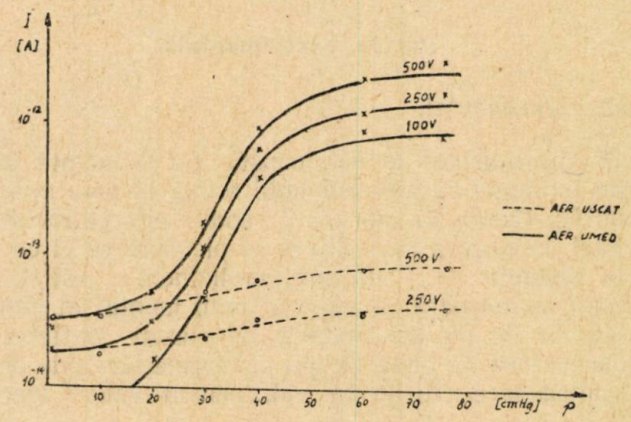


Fig. 2

Pentru a distinge cum influențează aerul și vaporii de apă conductibilitatea electrică a celulei de clorură de sodiu, am efectuat măsurătorile în prezența aerului uscat și a celui umed, la diferite presiuni.

În fig. 1, care reprezintă curbele de conductibilitate electrică, se observă că sub acțiunea aerului uscat în gama de presiuni 10^{-3} mmHg pînă la presiunea atmosferică, variația conductibilității este relativ redusă. În cazul aerului umed, variația conductibilității cu presiunea este mult

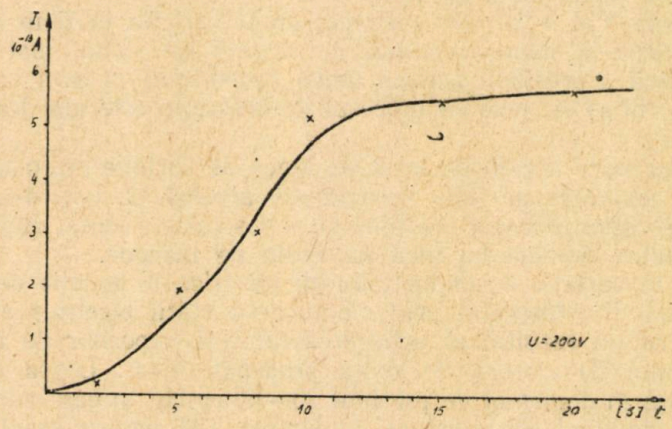


Fig. 3.

mai pronunțată în special în domeniul 20—50 mmHg după cum se vede în fig. 2. Curentul prin celulă crește în acest caz de la $\sim 10^{-14}$ A la $\sim 10^{-12}$ A, pentru o tensiune de 250 V aplicată pe celulă. Sub presiunea de 20 cmHg și peste presiunea de 50 cmHg variația conductibilității cu

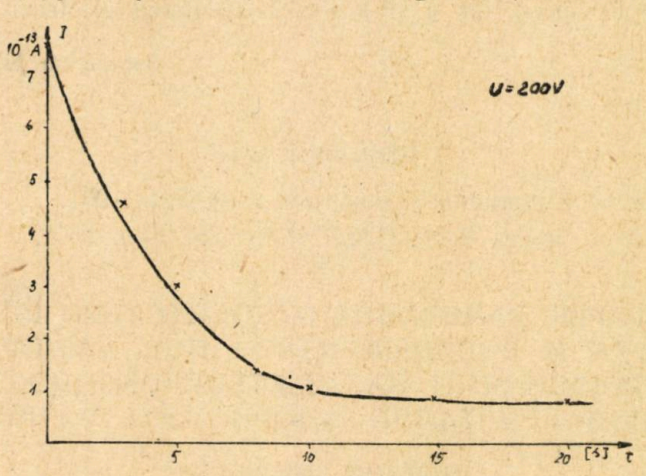


Fig. 4

presiunea este mult mai lentă nemodificînd ordinul de mărime. Pentru presiuni mici de ordinul 10^{-3} mmHg pînă la 20 cmHg curentul este practic egal cu cel din cazul cînd se lucrează cu aerul uscat $\sim 10^{-14}$ A (fig. 1).

Aceasta arată că rolul esențial în creșterea conductibilității superficiale a monocristalului de clorură de sodiu îl are acțiunea vaporilor de apă. La presiuni între 20 cm și 50 cmHg adsorbția vaporilor de apă variază rapid, iar peste 60 cmHg suprafața monocristalului este practic „saturată", straturile superficiale fiind formate.

În figurile 3 și 4 în care s-a reprezentat variația în timp a conductibilității electrice a monocristalului de clorură de sodiu, mai întîi la o creștere bruscă a presiunii aerului umed (adsorbția) și apoi la o scădere bruscă (desorbția) se vede că procesul de desorbție este mai lent decît cel de adsorbție.

În prima parte a ambelor procese, legea de variație are o formă exponențială cu constanta de timp aproximativ aceeași, de cca. 4—5 secunde. În cazul desorbției procesul continuă cu o descreștere lentă, după 2 minute conductibilitatea scăzînd cu încă un ordin de mărime.

Modul de variație a conductibilității electrice în funcție de presiunea gazului, poate fi interpretat prin modificarea stării electrice a suprafeței care apare ca un rezultat al acțiunii aerului și vaporilor de apă asupra monocristalului de clorură de sodiu proaspăt clivat. Legea de variație a rezistivității în domeniul de presiuni 20—60 cmHg în care adsorbția este activă, este de tipul celei dedusă de Halsay [2] pentru cazul adsorbției unui gaz pe suprafața unei pături metalice subțiri.

$$\ln \varrho = K \ln \frac{A}{p}$$

unde K și A sînt două constante ce depind de datele moleculare ale gazului și condițiile de lucru, iar ϱ și p — rezistivitatea electrică și presiunea gazului.

Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

[1] *V. Böhm* — Automatica și electronica, nr. *5*, 6, 1961.

[2] *S. Offret* — Journ. Rech. C.N.E.S. Nr. 55, Juin, 1961.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЛИЯНИЯ ВОЗДУХА И ВОДЯНЫХ ПАРОВ ПОД РАЗЛИЧНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МОНОКРИСТАЛЛА ХЛОРИСТОГО НАТРИЯ.

(Краткое содержание)

В настоящей работе были произведены измерения по поверхностной злектропроводности свеже отслоенного моно-кристалла NaCl (хлористый натрий), под влиянием сухого и влажного воздуха в области давления 10^{-3} рт. ст, до атмосферного давления.

Чувствительные изменения проводности были наблюдены в пределах давления 20—50 ст. рт.—ст. под действием влажного воздуха.

Изучение процессов адсорбции и ресорбции было произведено наблюдая за изменением проводности во времени при внезапном изменении и давления влажного воздуха в помещении.

OBSERVATIONS ON THE INFLUENCE OF THE AIR AND WATER VAPOUR AT DIFFERENT PRESSURES ON THE ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF THE SINGLE NaCl CRYSTAL.

(Sumary)

In this paper we measured the electrical conductivity of surface of the single NaCl crystal under the influence of dry and wet air in the range of pressures from 10^{-3} mmHg up to the atmospheric pressure.

Considerable variations of conductivity have been found for $p = 20$ cmHg. to $p = 50$ cmHg. under the action of wet air. The study of adsportion and desorption is made following the change of conductivity with time at a sudden variation of the pressure of the wet air in the vessel.

OBSERVATIONS SUR L'INFLUENCE DE L'AIR ET DES VAPEURS DE L'EAU AUX DIVERSES PRESSIONS SUR LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DU MONOCRISTAL DE CLORURE DE SOUDE.

(Résumé)

Dans le travail ce sont faits des mesurements sur la conductibilité électrique superficielle du monocristal de clorure de soude fraichement clivé, sous l'influence de l'air sec et humide dans le domaine des pressions de 10^{-3} mmHg. jusqu'à la pression atmosphérique.

Des variations sensibles de la conductibilité se sont observés dans le domaine des pressions 20—50 cmHg. sous l'action de l'air humide. L'étude de l'adsorption et de la désorption c'est fait en étudiant la conductibilité en fonction du temps pendant une brusque variation de la pression de l'air humide de l'incinte.

BEOBACHTUNGEN ÜBER DEN EINFLUSS VON LUFT UND VON WASSERDAMPF BEI VERSCHIEDENEN DRUCKEN AUF DIE ELEKTRISCHE LEITFÄHIGKEIT VON NATRIUMCHLORID EINKRISTALLEN

(Zusammenfassung)

Es wird über Messungen der elektrischen Oberflächenleitfähigkeit von frisch gespaltenen Natriumchlorid — Einkristallen berichtet, die in trockener und feuchter Luft unter Drucken von 10^{-3} bis 760 mmHg durchgeführt werden.

Es wurde eine merkliche Leitfähigkeitsänderung unter dem Einfluss von feuchter Luft im Druckgebiet 20—50 cmHg festgestell. Die Untersuchung der Adsorption und Desorption erfolgte mittels der zeitlichen Änderung der Leitfähigkeit bei plötzicher Druckänderung der feuchten Luft im Gefäss.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

MATEMATICĂ

ABOUT A TRANSFORMATION IN AXONOMETRIC PLANE *

AURELIAN TĂNĂSESCU

This paper will study some aspects of the link existing between the central projection of an object on an inclined representation and the orthogonal axonometric projection of the same object on an axonometric plane identical with the inclined projection.

It is known that, in general, in axonometry, the axonometric projection of an object on the axonometric plane is determined by knowing the orthogonal projections of the object on three planes, two by two perpendicular.

This idea being the start, we suggest to deduce the projection or the orthogonal axonometric representation of an object on the axonometric plane, knowing the central projection of the object on this axonometric plane considered as inclined projection. Certainly, we can put also the inverse question. In the literature of speciality there are some works concerning this problem, or, more precisely, in connection with the inverse transition from the central projection of an object on an inclined projection, to the descriptive orthogonal projection of the object.

In this paper we shall insist as a new element, especially on the utilisation of the pseudoprincipal straight lines and pseudoprincipal point linked to the measure point for the direction of verticals.

Be it the central projection $AaBbCcEe$ of a prismatic volume on the inclined projection defined by the three vanishing points F_1, F_2 and F_3 that we are considering at finite distance (fig. 1). We consider line hh of the horizon, definite by two of these vanishing points, for instance F_1 and F_2 and be it (P) the pseudoprincipal point and ω the orthogonal projection of the view point on the inclined projection.

In order to obtain the measure point M_z of the verticals vanishing in the vanishing point F_3 we rebate in Ω_0 the view point Ω on the inclined projection.

An arbitrary horizontal plane intersects the inclined projection upon the base xx of the representation. It results in rebating on the inclined projection the section $k_1\ \Omega\ k_2$ in the tetrahedron $\Omega\ F_1F_2F_3$ where Ω is

* Paper read at the VII-th scientific session of the teaching staff of the Polytechnical Institute and the Institute of Architecture of Bucharest (April 7-8, March 2-4, 1962).

the view point. Thus, we note that in this rebate around the basis xx of the representation we obtain the real directions $k_1\bar{\Omega}$ and $k_2\bar{\Omega}$ of the edges ac and ab respectively.

In these conditions we obtain immediately the plane $a_0b_0c_0e_0$ of the volume utilising the traces 1, 2, 3, and 4 of the inclined projection of the

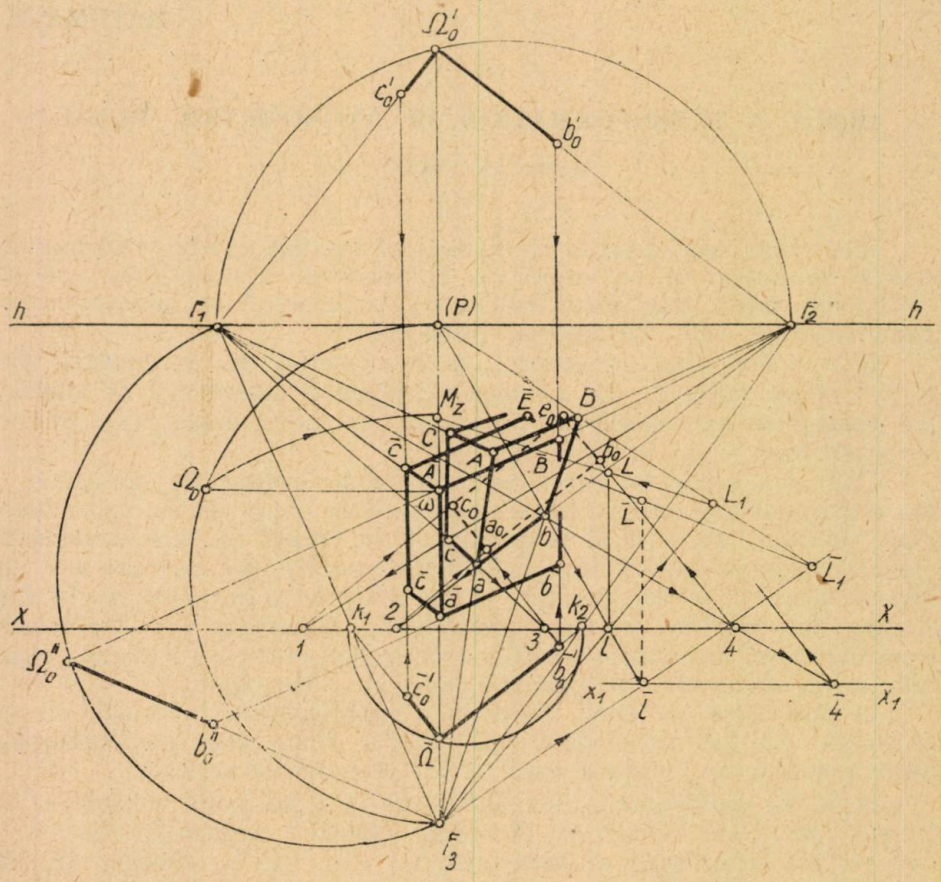


Fig. 1.

straight lines c_0e_0, a_0b_0 and c_0a_0, e_0b_0. This plane is evidently obtained at the scale imposed by the chosen arbitrary horizontal plane.

For obtaining the orthogonal axonometric representation of the volume given in this central projection, we identify the axonometric plane with the inclined projection. The triangle of axonometric traces is defined by the vanishing points $F_1F_2F_3$ and the axonometric axes are $\omega\ F_1$, $\omega\ F_2$ and $\omega\ F_3$.

We observe that for deducing the orthogonal axonometric representations $\omega = \bar{A}.\bar{C}.$ and $\omega = \bar{A}.\bar{B}.$ of the edges AC and AB, we no longer need

to rebate $F_1\Omega'$, F_2 on the axonometric plane of face $F_1\Omega F_2$ of the tetrahedron under consideration, because we may use the points $\bar{c}'_0$ and $\bar{b}'_0$ as extremities of segments measuring the real dimensions of the plane $a_0b_0c_0e_0$ at the scale imposed on directions $\bar{\Omega}\ k_1$ and $\bar{\Omega}\ k_2$.

Let us now study the transition from the projection of verticals on the inclined projection to their orthogonal axonometric representations.

We shall utilise the measure point M_z of their direction and the pseudoprincipal straight lines, as for instance, $(P)bl$ or $(P)BL_1$. We obtain the real length lL of the vertical bB at the scale imposed through the medium of the measure point M_z and of the point L_1.

Usually, we obtain the ortogonal axonometric representation $\omega=\bar{A}.\bar{a}$ of the vertical edge Aa, by utilising the rebate $F_1\Omega''_0$ F_3 on the axonometric plane of the face $F_1\Omega F_3$ of threerectangular trihedron.

Under these conditions, the orthogonal axonometric representation $\bar{A}\bar{a}\bar{B}\bar{b}\bar{C}\bar{c}\bar{E}\bar{e}$ of the volume considered in the central projection on the inclined projection is perfectly determined at the scale imposed by the election of basis xx of the representation.

Altering in X_1X_1, for instance, the basis of the inclined projection, we obtain the amplification of orthogonal axonometric representation in a well defined relation.

From those aforesaid, it results that we can immediately draw the central projection of an object or volume of architecture on an inclined projection starting from an orthogonal axonometric representation of the object on the axonometric plane identical with the inclined projection.

Be it the $\bar{A}\bar{a}\bar{B}\bar{b}\bar{C}\bar{c}\bar{E}\bar{e}$ orthogonal axonometric representation of a prismatic volume (fig. 1) and ωF_1, ωF_2, ωF_3 axonometric axes. Two arbitrary level planes can define the triangle of axonometric traces through the line of horizon hh and the basis xx of the inclined projection. The points (P), Ω_0, $\bar{\Omega}$, Ω''_0 k_1, k_2 and M_z are resulting. Likewise, there are resulting the dimensions at the imposed scale for all the edges of the prismatic volume given in its orthogonal axonometric representation.

We put the $a_0b_0c_0e_0$ plane of the arbitrary volume only with the parallel sides, with $\bar{\Omega}\ k_1$ and $\bar{\Omega}\ k_2$ directions up to their traces 1, 2, 3 and 4 on basis of the representation then uniting them with the vanishing points F_1 and F_2 respectively, we obtain the central projection abce, on the inclined projection, of the plane basis.

Utilising the principal point (P), the measure point M_z and the pseudoprincipal straight line, we have completely and rapidly, at the imposed scale, the plane projection on the inclined projection.

In conclusion, we underline that this study can be completed with specifications resulting from the particularization of the triangle of axonometric traces. We refer to the dimetric and isometric orthogonal axonometric projection.

Likewise, compared to other methods, we must note the easiness with which we can make link between the central projection of a volume of architecture on the inclined projection and its orthogonal axonometric projection on the same axonometric plane and reciprocally.

The polytechnical Institute of Bucharest
Descriptive Geometry Chair

К ВОПРОСУ ИЗМЕНЕНИЯ В АКСОНОМЕТРИЧЕСКОМ ПЛАНЕ

(Резюме)

В настоящей работе исследуется связь, существующая между центральной перспективой данного предмета на наклонную плоскость и ортогональное аксонометрическое представление предмета на аксонометрическую плоскость, тождественную наклонной перспективной картине.

Приводится способ построения центральной перспективы предмета на наклонную картину из его ортогонального аксонометрического представления, пользуясь притом псевдоосновной точкой (P) и псевдоосновными прямыми.

ABOUT A TRANSFORMATION IN AXONOMETRIC PLANE

(Summary)

In this work the connection which may exist between the central perspective of an object to an inclined panel and the axonometric ortogonal representation of the object to an axonometric plane identical to the inclined panel of perspective is giver.

Thus one shows how can draw the central perspective of the object on an inclined panel by its axonometric ortogonal representation and reciprocally, utilising the pseudo principal point (P) and pseudo principal strainght lines.

SUR UNE TRANSFORMATION DANS LE PLAN AXONOMÉTRIQUE

(Résumé)

Dans cet ouvrage nous étudions la relation qui existe entre la perspective centrale d'un objet sur un tableau incliné et la représentation axonométrique qui est confondu avec le tableau (perspectif) incliné.

Ainsi nous pouvons déduire la perspective centrale d'un objet sur un tableau perspectif incliné en partant de sa représentation axonométrique orthogonale et réciproquement.

Il se rend utile le point pseudoprincipal (P) et la droite pseudo principale.

ÜBER DIE TRANSFORMATION IN EINER AXONOMETRISCHEN EBENE

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit untersucht man die Beziehung zwischen der zentralen Perspecktive eines Gegenstandes auf einer geneigten Tabel und der orthogonalen axonometrischen Darstellung des Gegenstandes auf einer axonometrischen Ebene, welche mit der geneigten Perspektiv-Ebene identisch ist.

Man zeigt auf diese Weise, dass es möglich ist die zentrale Perspektive eines Gegenstandes auf einer geneigten Ebene aus der axonometrischen orthogonalen Darstellung zu konstruiren und ungekehrt, mit Hilfe des Pseudohauptpunktes (P) und der Pseudohauptgeraden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

TERMOTEHNICĂ

CALITATEA PROCESULUI TERMODINAMIC ȘI DOMENIUL DE FOLOSIRE AL COMPRESORULUI VOLUMETRIC ROTATIV *

L. STOICESCU, C. STAMATESCU, M. GRIGORIU

Se stabilește teoretic că compresorul rotativ funcțiunînd fără supape, constituie o soluție preferabilă compresorului cu piston, în special pentru rapoarte de comprimare mai mici decît 3, întrucît procesul de comprimare are loc în condiții de randament izotermic mai ridicat.

Calitatea procesului termodinamic, teoretic, în compresorul volumetric, se poate examina cu ajutorul unui raport

$$\eta = \frac{N_{ideal}}{N_{real}} \tag{1}$$

Considerînd N_{ideal} puterea necesară într-un proces de comprimare izotermic, iar N_{real} puterea necesară în procesul de comprimare politropică între aceleași limite de presiune p_l și p_a, notînd cu π raportul de comrpimare p_l/p_a, și neglijînd faza de expansiune a gazului, în diagrama conpresorului, rezultă un randament avînd expresia :

$$\eta = \frac{N_{iz}}{N_{pol}} = \frac{\ln \pi}{\frac{m}{m-1}\left[\pi^{\frac{m-1}{m}} - 1\right]} \tag{2}$$

În cazul compresorului volumetric cu piston, acesta funcționînd cu supape, randamentul definit prin relația (1), randamentul izoteramic, trebuie exprimat sub forma

$$\eta_{iz} = \frac{\ln \pi}{\frac{m}{m-1}\left[\pi'^{\frac{m-1}{m}} - 1\right]} \cdot \frac{T_1}{T_1'} \tag{3}$$

în care $\pi' > \pi$ iar $T_1/T_1' \cong 1$

Inadevăr :

Procesul real are loc, în interiorul cilindrului de comprimare, între presiunile p_a' și p_l' (figura 1) din cauza rezistențelor locale în supapele

* Extras din lucrarea întitulată „Asupra compresorului volumetric rotativ cu lamele ghidate", comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

de aspirație și de refulare, presiunile p_a și p_l fiind presiunile nominale, medii în coloana de aspirație, respectiv în coloana de refulare, în amonte respectiv în aval de supape.

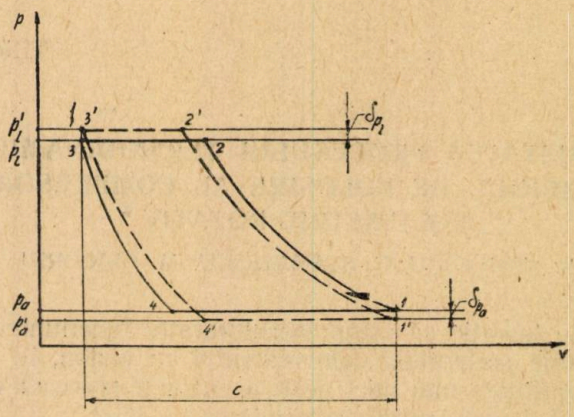


Fig. 1 Procesul de comprimare în coordonate *pv*

Considerînd aceleași condiții de încălzire a gazului în faza de aspirație (datorite pe de o parte energiei interne a gazului expandat în spațiul mort, iar pe de altă parte schimbului de căldură pereți-gaz în cursa de aspirație) atît în procesul ideal de comprimare considerat — procesul

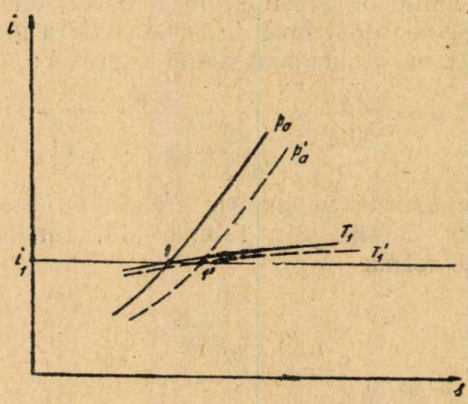


Fig. 2 Raportul temperaturilor T_1/T_1'

izotermic —, cît și în procesul real politropic, influența laminării gazului în supapa de aspirație nu este sensibilă în ce privește temperatura gazului (figura 2), deci se poate considera $T_1 \cong T_1'$. Această condiție este valabilă

numai pentru gaze; în cazul vaporilor în starea sub curba de saturație, sau în imediată apropiere de această curbă, cele două temperaturi T_1 și T'_1 nu mai pot fi considerate egale, laminarea vaporilor în supapa de aspirație schimbînd sensibil temperatura lor.

Se poate considera deci cu suficientă aproximație, pentru gaze, expresia randamentului izotermic sub forma:

$$\eta_{iz} = \frac{\ln \pi}{\frac{1}{\varepsilon}[\pi'^{\varepsilon} - 1]} \tag{4}$$

în care s-a notat $\frac{m-1}{m} = \varepsilon$

Se introduc pierderile de presiune notate δ_{p_a} și δ_{p_l}, definite prin:

$$\delta_{p_a} = \frac{p_a - p'_a}{p_a} \text{ și } \delta_{p_l} = \frac{p'_l - p_l}{p_l} \tag{5}$$

Se introduc coeficienții de pierdere de presiune σ_a și σ_l definiți prin:

$$\left.\begin{aligned} p'_a &= (1 - \delta_{p_a})\, p_a = \sigma_a\, p_a \text{ și} \\ p'_l &= (1 + \delta_{p_l})\, p_l = \sigma_l\, p_l \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Se introduce coeficientul de corecție al randamentului, definit prin:

$$\zeta = \frac{\pi^{\varepsilon} - 1}{\pi'^{\varepsilon} - 1} = \frac{\pi^{\varepsilon} - 1}{(\sigma\pi)^{\varepsilon} - 1} \tag{7}$$

în care $\sigma = \frac{\sigma_l}{\sigma_a}$

Expresia randamentului izotermic devine:

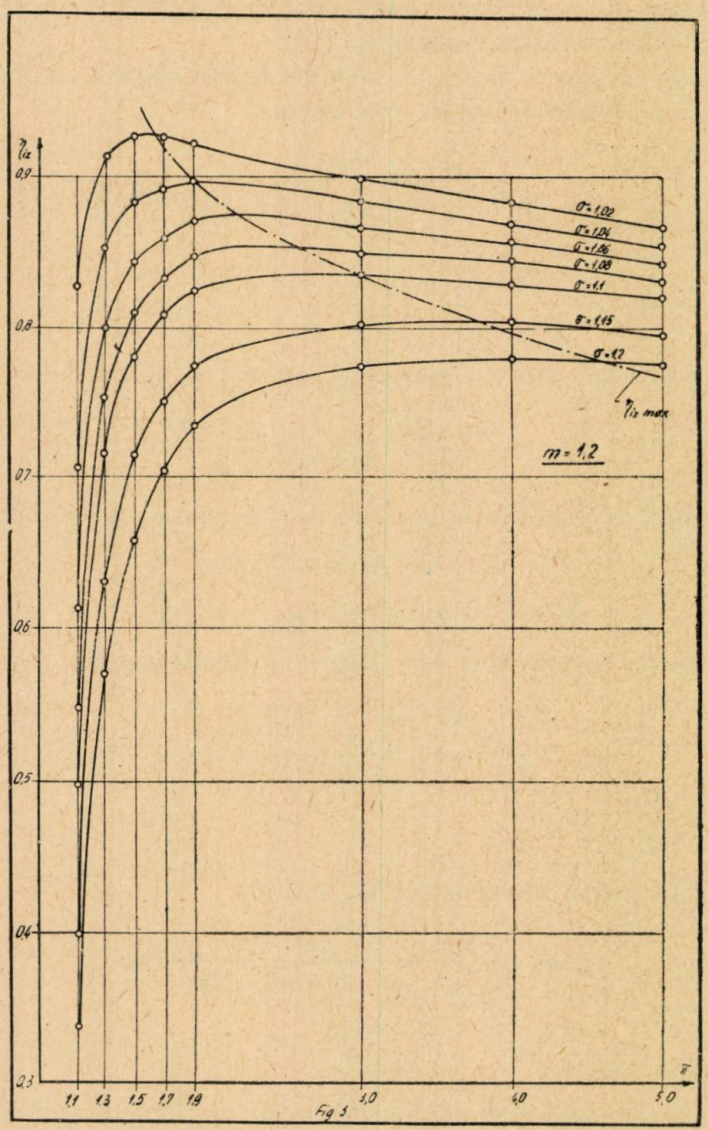
$$\eta_{iz} = \frac{\ln \pi}{\frac{1}{\varepsilon}[\pi^{\varepsilon} - 1]} \cdot \frac{\pi^{\varepsilon} - 1}{[(\sigma\pi)^{\varepsilon} - 1]} = \eta \cdot \zeta \tag{8}$$

În relația (8):

σ caracterizează mărimea pierderilor de presiune la curgerea gazului prin supape. Valorile înspre limita inferioară corespund compresorului funcționînd fără supape, adică compresorului volumetric rotativ; valorile mari corespund compresorului cu piston, funcționînd cu supape.

ε caracterizează procesul politropic, și gazul.

S-a construit funcțiunea exprimată de relația (8), $\eta_{iz} = f(\pi)$, considerîndu-se σ și ε parametrii între valorile uzuale: σ între 1.02 și 1,2,



Variația randamentului izotermic cu raportul de comprimare, pentru $m=1.2$.

iar ε între 1.2 și 1.5. S-au obținut curbele din figurile 3, 4, 5 și 6, în baza tabelelor de calcule numerotate de la 1 pînă la 4, anexate.

Examinîndu-se aceste curbe rezultă :

Randamentele izotermice maxime, pentru valori σ mai mici decît 1,1, au loc la rapoarte de comprimare cuprinse între 3 și 1.5. Cu cît coefi-

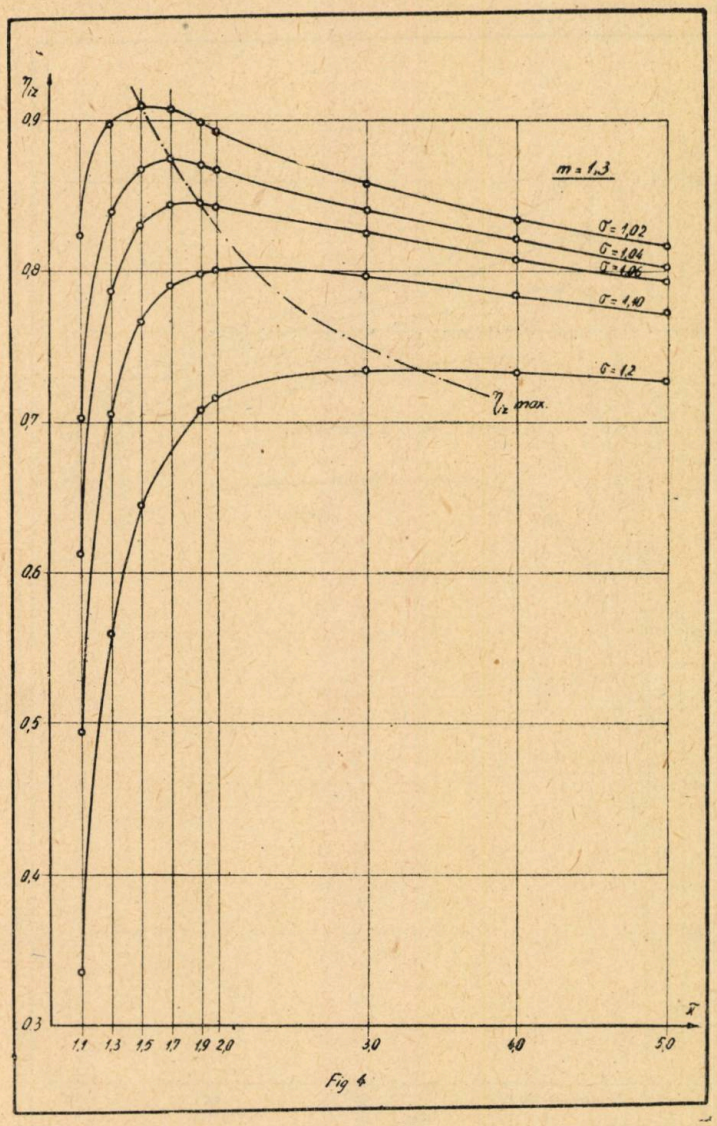


Fig 4

Variația randamentului izotermic cu raportul de comprimare, pentru $m=1,3$

cientul σ este mai aproape de unitate, deci cu cît pierderile de presiune la intrarea și ieșirea gazului din cilindrul de comprimare sînt mai reduse, cu atît rapoartele de comprimare corespunzînd randamentelor izotermice

maxime, sînt mai mici. Asemenea condiții — valori σ aproape de unitate — au loc numai în compresoarele volumetrice rotative, acestea funcționînd, în general, fără supape, sau, unele tipuri constructive, cu supapă numai pe refulare.

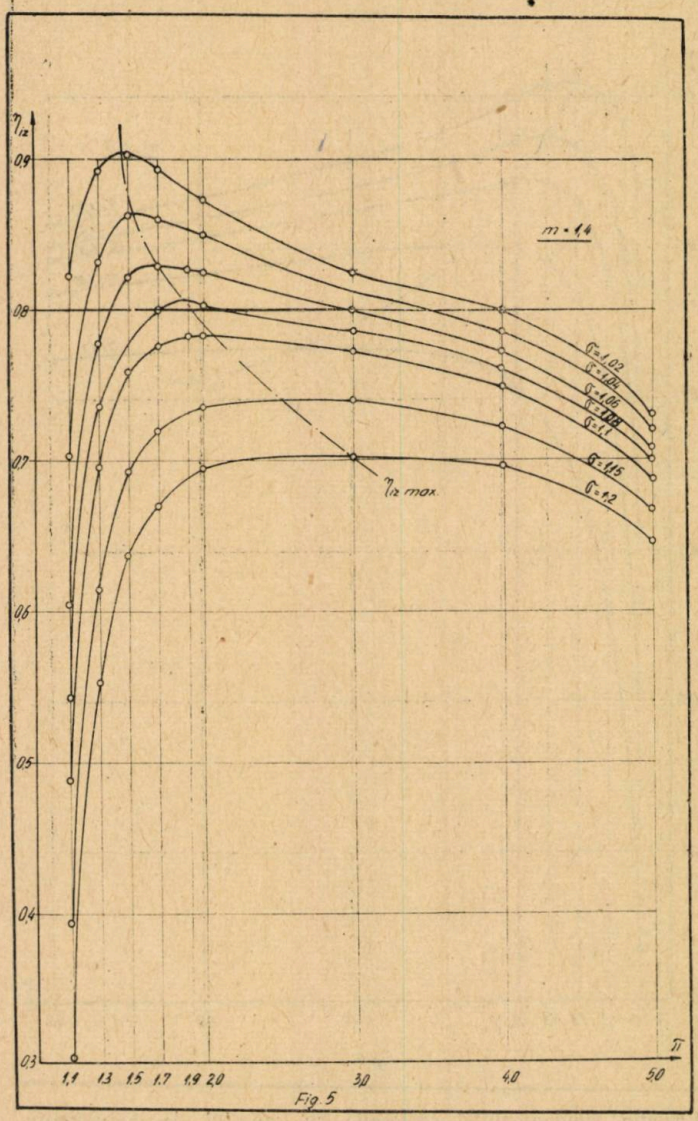
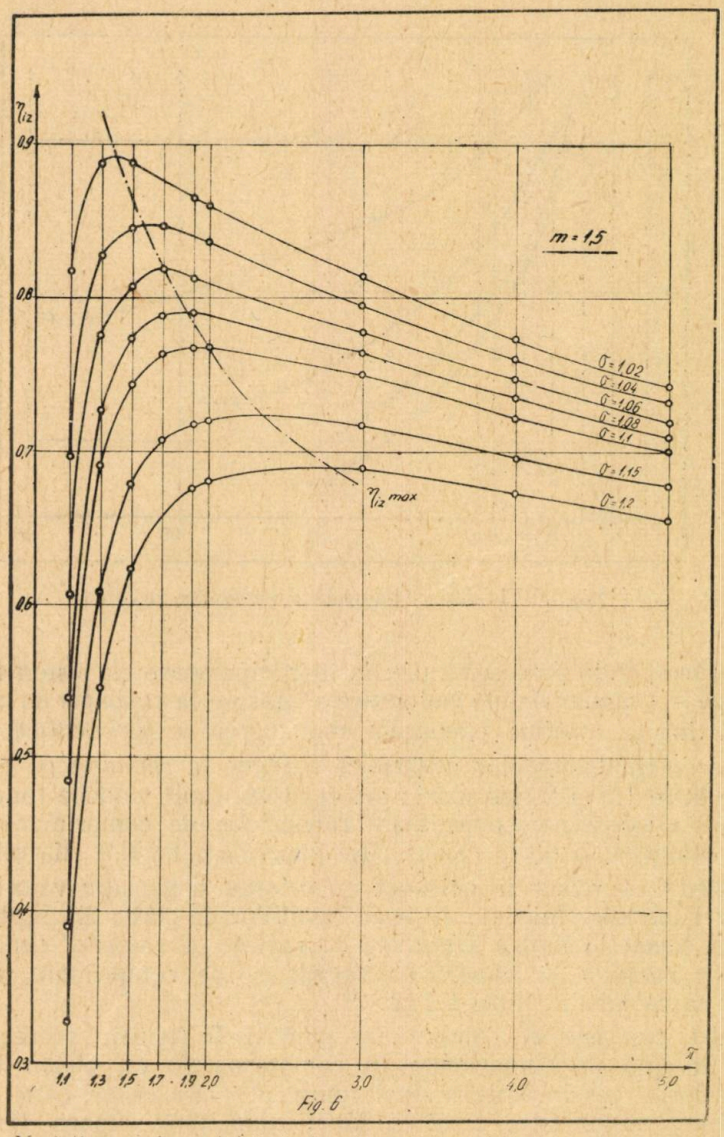


Fig. 5

Variația randamentului izotermic cu raportul de comprimare, pentru $m=1,4$

Rezultă că randamentele izotermice maxime ale proceselor din compresoarele volumetrice rotative au loc la rapoarte de comprimare mai mici

decît 3, iar în cazurile uzuale și anume pentru procese politropice și gaze caracterizate prin exponenți politropici mai mari decît 1.3, randamentele izotermice sînt maxime pentru rapoarte de comprimare cuprinse între 1,5 și 2 (figurile 5 și 6).



Variația randamentului izotermic cu raportul de comprimare, pentru $m=1,5$

Pentru valori σ mai mari decît 1,1 randamentele izotermice maxime au loc pentru rapoare de comprimare în jurul și mai mari decît 3.

Asemenea condiții sînt caracteristice compresoarelor cu piston, funcționînd cu supape de aspirație și de refulare. Din figurile 4, 5 și 6 rezultă că, pentru procese de comprimare și gaze caracterizate prin exponenți politropici cuprinși între 1.3 și 1.5 și coeficienți σ mai mari decît 1,1 —

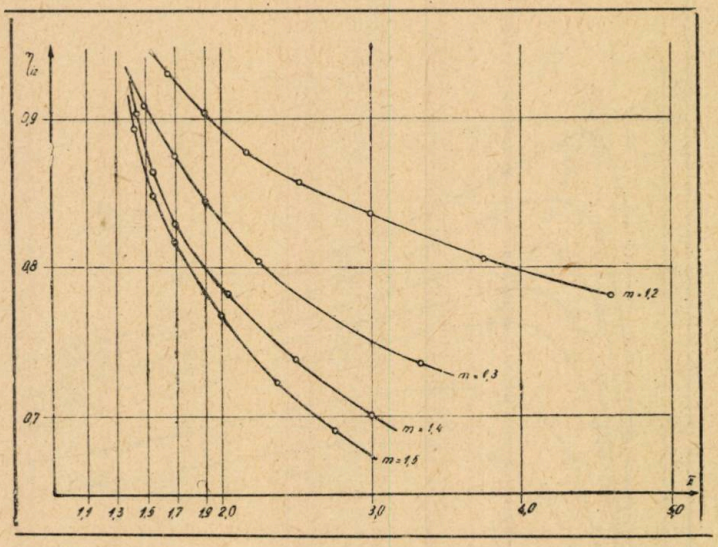


Fig. 7. Curbele randamentelor izotermice maxime

ceea ce corespunde proceselor uzuale în compresoare cu piston funcționînd cu supape — randamentele izotermice se găsesc la rapoarte de comprimare în jurul lui 3, condiții cunoscute din lucrări experimentale, publicate.

Valorile randamentelor izotermice maxime la rapoarte de comprimare cuprinse între 1,5 și 2 sînt mari ; ele depășesc mult valorile randamentelor izotermice maxime corespunzătoare rapoartelor de comprimare mai mari decît 2, atingînd în unele cazuri cifre superioare lui 0,9 (figurile 3 și 4).

Pentru a se scoale în evidență importanța și variația valorilor randamentelor izotermice maxime, în baza familiilor de curbe din figurile 3, 4, 5 și 6 s-au trasat în figura 7 curbele de variație a valorilor randamentelor izotermice *maxime* în funcție de rapoartele de comprimare, considerîndu-se m ca parametru între 1,2 și 1,5.

Pentru rapoarte de comprimare pînă la 5 (uzuale proceselor într-o singură treaptă de comprimare în compresoarele cu piston lucrînd cu gaze) valorile randamentelor izotermice ale proceselor care au loc în compresoare volumetrice rotative funcționînd fără supape (curbele din figurile 3, 4, 5 și 6 trasate pentru $\sigma < 1{,}1$) sînt sensibil superioare randamentelor izotermice corespunzătoare proceselor în compresoarele cu piston funcționînd cu supape, chiar dacă aceste randamente sînt la valoarea lor maximă (curbele din figurile 3, 4, 5 și 6 trasate pentru $\sigma > 1{,}1$).

Din acest studiu se pot trage următoarele:

Concluzii

1) Folosirea compresoarelor volumetrice rotative funcționînd fără supape sau cu supape numai pe refulare, *se impune* față de compresoarele cu piston, în cazul gazelor, pentru rapoarte de comprimare mai mici decît 3, din cauza calității superioare a procesului termodinamic calificat cu ajutorul randamentului izotermic.

2) Folosirea compresoarelor volumetrice rotative funcționînd fără supape este indicat a se generaliza în locul compresoarelor cu piston și pentru rapoarte de comprimare egale și mai mari decît 3, întrucît și în aceste condiții calitatea procesului este superioară în compresoarele funcționînd fără supape, ceea ce se califică tot prin randamentele izotermice respective.

În plus, în compresoarele volumetrice rotative se pot realiza procese ameliorate și prin micșorarea exponentului politropic, mulțumită intensificării răcirii. În compresoarele volumetrice rotative, în afară de răcirea cilindrului de comprimare se poate realiza, la unele tipuri constructive, o bună răcire și a rotorului.

Aceste concluzii dovedesc necesitatea extinderii fabricației și folosirii compresoarelor volumetrice rotative. Tot aceste concluzii sînt întărite și prin avantajele costului investițiilor și al simplificării întreținerii și exploatării. În plus, funcționarea compresoarelor volumetrice rotative este foarte liniștită, aceasta avînd loc cu dezvoltarea de forțe perturbatorii reduse iar la unele tipuri constructive, neglijabile.

Catedra de termotehnică și mașini termice

Tabela 1

Calculul variației funcțiunilor η_i, ξ și η_{iz} cu raportul de comprimare π, în compresorul volumetric rotativ, pentru m = 1,2 și σ parametru între valorile uzuale 1,02 și 1,2

$\sigma = \frac{\sigma_i}{\sigma_a}$	π / η	1,1 / ~1	1,3 / 0,982	1,5 / 0,972	1,7 / 0,96	1,9 / 0,954	2 / 0,953	3 / 0,915	4 / 0,895	5 / 0,877
1.02	ξ	0,827	0,927	0,952	0,963	0,966	0,969	0,981	0,985	0,9875
	η_{iz}	0,827	0,910	0,925	0,925	0,921	0,922	0,897	0,882	0,865
1.04	ξ	0,705	0,867	0,909	0,928	0,940	0,946	0,963	0,970	0,973
	η_{iz}	0,705	0,851	0,8825	0,890	0,896	0,901	0,882	0,868	0,853
1.06	ξ	0,614	0,813	0,868	0,895	0,912	0,920	0,945	0,956	0,960
	η_{iz}	0,614	0,798	0,843	0,858	0,870	0,876	0,865	0,856	0,841
1.08	ξ	0,547	0,767	0,833	0,867	0,887	0,8975	0,928	0,943	0,947
	η_{iz}	0,547	0,752	0,809	0 832	0,846	0,855	0,849	0,844	0,830
1.10	ξ	0,497	0,729	0,803	0,8425	0,864	0,8775	0,913	0,9275	0,935
	η_{iz}	0,497	0,715	0,780	0,808	0,824	0,834	0,836	0,830	0,820
1.15	ξ	0,398	0,644	0,734	0,782	0,811	0,828	0,877	0,898	0,907
	η_{iz}	0,398	0,632	0,713	0,750	0,774	0,789	0,802	0,803	0,795
1.2	ξ	0,336	0,580	0,678	0,732	0,767	0,786	0,845	0,870	0,883
	η_{iz}	0,336	0,569	0,659	0,703	0,732	0,749	0,773	0,779	0,775

Tabela 2

Calculul variației funcțiunilor η, ξ, η_{iz} cu raportul de comprimare π, în compresorul volumetric rotativ, pentru m = 1,3 și σ parametru între valorile uzuale 1,02 și 1,2

$\sigma = \frac{\sigma_i}{\sigma_a}$	π / η	1,1 / 0,993	1,3 / 0,967	1,5 / 0,954	1,7 / 0,94	1,9 / 0,926	2 / 0,918	3 / 0,873	4 / 0,845	5 / 0,826
1.02	ξ	0,828	0,928	0,952	0,963	0,968	0,972	0,980	0,984	0,987
	η_{iz}	0,8225	0,897	0,9075	0,906	0,897	0,892	0,856	0,832	0,815
1.04	ξ	0,706	0 867	0,908	0,928	0,939	0,943	0,962	0,970	0,971
	η_{iz}	0,701	0,8375	0,867	0,873	0,869	0,866	0,840	0,820	0,802
1.06	ξ	0 616	0,813	0,869	0,896	0,911	0,917	0,943	0,955	0,958
	η_{iz}	0,612	0,786	0,829	0,8425	0,843	0,842	0,823	0,806	0,792
1.08	ξ	0,546	0,766	0,832	0,866	0,885	0,892	0 926	9,939	0,945
	η_{iz}	0,5425	0,740	0,794	0,815	0,819	0,819	0,809	0,793	0,781
1.10	ξ	0,496	0,728	0,803	0,840	0,862	0,871	0,911	0,926	0,934
	η_{iz}	0,493	0,703	0,766	0,790	0,797	0,800	0,796	0,783	0,772
1.15	ξ	0,399	0,643	0,733	0,780	0,810	0,820	0,874	0,894	0,905
	η_{iz}	0,397	0,621	0,700	0,733	0,750	0,753	0,763	0,755	0,748
1.20	ξ	0,336	0,578	0 676	0,729	0,763	0,777	0,840	0,866	0,879
	η_{iz}	0,3335	0,559	0,645	0,685	0,707	0,715	0,733	0,732	0,726

Tabela 3

Calculul variației funcțiunilor η, ξ, η_{iz} cu raportul de comprimare π, în compresorul volumetric rotativ, pentru m = 1,4 și σ parametru între valorile uzuale 1,02 și 1,2

$\sigma = \frac{\sigma_i}{\sigma_a}$	π / η	1,1 / 0,99	1,3 / 0,959	1,5 / 0,948	1,7 / 0,927	1,9 / 0,911	2 / 0,902	3 / 0,849	4 / 0,812	5 / 0,788
1.02	ξ	0,831	0,929	0,952	0,963	0,969	0,969	0,982	0,983	0,987
	η_{iz}	0,823	0,891	0,902	0,892	0,883	0,873	0,833	0,798	0,729
1.04	ξ	0,708	0,867	0,908	0,926	0,940	0,944	0,951	0,967	0,973
	η_{iz}	0,702	0,831	0,862	0,858	0,856	0,850	0,807	0,785	0,719
1.06	ξ	0,613	0 811	0,865	0,893	0,908	0,915	0,942	0,952	0,957
	η_{iz}	0,607	0,778	0,821	0,828	0,827	0,825	0,800	0,773	0,707
1.08	ξ	0 549	0,767	0,831	0,864	0,884	0,891	0,925	0,937	0,945
	η_{iz}	0,543	0,736	0,788	0,800	0,805	0,803	0,785	0,760	0,699
1.1	ξ	0,494	0,725	0,798	0,836	0,859	0,868	0,908	0,922	0,93
	η_{iz}	0,489	0,696	0,758	0,775	0,782	0,783	0,772	0,748	0,687
1.15	ξ	0,3975	0,641	0,728	0,776	0,805	0,816	0,870	0,889	0 902
	η_{iz}	0,3935	0,615	0,691	0,719	0,733	0,735	0,739	0,721	0,667
1.20	ξ	0,333	0,575	0,670	0,724	0,770	0,758	0,835	0,857	0,874
	η_{iz}	0,330	0,552	0,636	0,670	0,694	0,691	0,710	0,696	0,646

Tabela 4

Calculul variației funcțiunilor η, ξ, η_{iz} cu raportul de comprimare π, în compresorul volumetric rotativ, pentru m = 1,5 și σ parametru între valorile uzuale 1,02 și 1,2

$\sigma = \frac{\sigma_i}{\sigma_a}$	π / η	1,1 / 0,986	1,3 / 0,955	1,5 / 0,932	1,7 / 0,915	1,9 / 0,894	2 / 0,8875	3 / 0,83	4 / 0,787	5 / 0,755
1.02	ξ	0,8278	0,9278	0,9514	0,9616	0,9676	0,9694	0,9791	0,9827	0,9846
	η_{iz}	0,8162	0,836	0,8867	0,8799	0,865	0,860	0,813	0,773	0,743
1.04	ξ	0,706	0,855	0,907	0,926	0,937	0,942	0,958	0,966	0,970
	η_{iz}	0,696	0,826	0,845	0,847	0,838	0,836	0,795	0,760	0,732
1.06	ξ	0,615	0,811	0,856	0,893	0,908	0,913	0,938	0,950	0,955
	η_{iz}	0,606	0,775	0,806	0,817	0,812	0,810	0,778	0,747	0,720
1.08	ξ	0,546	0,762	0,829	0,862	0,882	0,887	0,921	0,934	0,941
	η_{iz}	0,539	0,727	0,773	0,787	0,7884	0,7881	0,764	0,735	0,710
1.1	ξ	0,492	0,722	0,797	0,833	0,857	0,865	0,904	0,920	0,928
	η_{iz}	0,485	0,690	0,743	0,762	0,766	0,7677	0,750	0,723	0,701
1,15	ξ	0,396	0,637	0,727	0,772	0,802	0,812	0,865	0,885	0,897
	η_{iz}	0,390	0,608	0,678	0,706	0,717	0,720	0,7175	0,696	0,677
1.20	ξ	0,332	0,571	0,668	0,720	0,754	0,766	0,829	0,855	0,868
	η_{iz}	0,327	0,545	0,623	0,659	0,675	0,680	0,688	0,672	0,656

КАЧЕСТВО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ОБЬЕМНОГО РОТАЦИОННОГО КОМПРЕССОРА

(Краткое содержание)

Графо-аналитическим методом определено, что максимальный изотермический коэффициент полезного действия для обьемного компрессора (ротационного), работающего без клапанов, получается при степенях сжатия находящихся между 1,5 и 2, а для компрессора, работающего с клапанами (с поршнем), получается при степенях сжатия около 3 и более. При этом, в первом случае величина изотермического коэффициента полезного действия больше, чем во втором случае.

Отсюда вытекает необходимость использования и выпуска в еще большем количестве, — обьемного ротационного компрессора, работающего без клапанов и с клапанами.

THE APPLICABILITY OF THE ROTATING VOLUMETRIC COMPRESSOR DEPENDING ON THE THERMODYNAMICAL EFFICIENCY

(Summary)

Suppose a gas compressor without valves, possesing a rotating piston, that means a volumetric compressor. By means of a graphical analysis, it is stated that its greater compression efficiency (the ratio

Isothermal Horse-Power to Indicate Air Horse-Power) has to be obtained for a pressure ratio between 1,5 and 2.

In the case of compressors with valves, which are also volumetric but have lineally moving pistons, the greatest compression efficiency is less and has to be obtained when the pressure ratio aproximates 3 or more.

As a conclusion for the actual practice the manufacture and the use of volumetric compressors with rotating piston have to be developed.

IE DEGRÉ DE QUALITÉ DU PROCÉS THERMODYNAMIQUE ET LE DOMAINE DU FONCTIONNEMENT ÉCONOMIQUE DU COMPRESSEUR VOLUMÉTRIQUE ROTATIF

(Résumé)

On établit par une méthode grapho-analytique qu'on obtinet le plus grand rendement isothermique du compresseur volumétrique à piston rotatif (sans soupapes) pour des rapports de compression entre 1,5 et 2, tandis que pour le compresseur à piston à mouvement linéaire on obtient ce rendement maximum pour des rapports de compression d'environ 3 ou plus de 3.

Il convient d'ajouter que les valeurs des rendements isothermiques, dans le premier cas, sont supérieurs à celles du second.

Il en résulte l'importance de l'extension de la fabrication et de l'adoption des compresseurs volumétriques rotatifs, foncitonnant sans soupapes ou à soupapes uniquement pour le refoulement.

DER GÜTEGRAD DES THERMODYNAMISCHEN PROZESSES UND DAS ANWENDUNGSGEBIET DES NACH DEM VERDRÄNGUNGSPRINZIP ARBEITENDEN DREHKOLBENVERDICHTERS

(Zusammenfassung)

Mit Hilfe einer graphoanalitischen Methode wird festgestellt dass der grösste isothermische Wirkungsgrad bei den nach dem Verdrängungs prinzip arbeitenden ventillosen Drehkolbenverdichtern für Kompressionsverhältnisse zwischen 1,5 und 2 zu erhalten ist.

Bei den Kolbenverdichtern mit linearer Bewegung, trotzdem sie nach demselben Prinzip arbeiten, ist dies für Kompressionsverhältnisse von ungefähr 3 und darüber zu erreichen.

Der isothermische Wirkungsgrad des Drehkolbenverdichters ist dem des Kolbenverdichters überlegen.

Man kann daraus auf eine Erweiterung der Benützung und der Fabrikation solcher Drehkolbenverdichter schliessen welche entweder ohne Ventile laufen oder nur Druckventile besitzen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

REZISTENȚA MATERIALELOR

CITEVA CAZURI DE FLAMBAJ LATERAL PRIN ȘOC*

PETRE AUGUSTIN

După cum se știe, flabajul lateral poate interveni în cazul barelor, care au momentul de inerție al secțiunii transversale minim mult mai mic decît cel maxim. În aceste cazuri, forțele transversale sau alte forțe ce conduc la o solicitare de încovoiere, pot face ca bara să devină nestabilă pentru o încovoiere laterală și răsucire.

După cum s-a arătat, într-o lucrare anterioară (1), în cazul aplicării dinamice a sarcinilor, forța instantanee poate atinge valoarea forțelor critice și pot amorsa un flambaj, fără ca valoarea forței, dacă aceasta ar fi aplicată static, să provoace acest fenomen. Spre deosebire de flambajul clasic, deformația în timpul acestui flabaj nu continuă pînă la rupere, ci numai pînă ce întreaga energie aplicată este preluată sub formă de energie de deformație. Aceste deformații deși nu ating valori infinite pot deveni periculoase, astfel încît calculul lor, în multe cazuri, devine obligatoriu.

Obiectul lucrării de față îl constituie calculul deformațiilor în cazul flabajului lateral prin șoc.

Pentru simpliciare se neglijează efectul masei corpului lovit și se consideră viteza de lovire, suficient de mică pentru a se putea neglija efectul de undă.

Notînd rigiditatea de încovoiere laterală cu EI_j și cea de răsucire cu GI_a, energia preluată de bară, prin deformație, se poate scrie:

$$E_i = EI_y \int \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^2 dx + GI_d \int \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx. \qquad (1)$$

Aici u și φ reprezintă, respectiv, deplasarea laterală și rotirea unui element de bară de lungime dx.

Energia exterioară produsă de căderea unei greutăți P de la înălțimea h se poate scrie

$$E_e = 2\,EI_y \int \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^2 dx + Ph. \qquad (2)$$

* Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 18 decembrie 1960.

Aici s-a presupus că prin rotirea secțiunii transversale sarcina nu se deplasează pe linia ei de secțiune.

Neglijînd pierderile, energia exterior aplicată, se va regăsi, la sfîrșitul deformației sub formă de energie potențială de deformație, astfel încît se poate scrie:

$$2EI_y\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2dx+Ph=EI_y\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2dx+GI_d\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx. \tag{3}$$

Deoarece termenul ce reprezintă energia potențială de încovoiere, se poate scrie sub forma:

$$EI_y\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2dx=KP^2, \tag{4}$$

ecuația (3) devine:

$$Ph=GI_d\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx-KP^2. \tag{5}$$

Cu aceste notații forța critică de flambaj lateral clasic, se va scrie:

$$P_f^2=\frac{GI_d}{K}\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx. \tag{6}$$

astfel încît ecuația (5) devine:

$$Ph=KP_f^2\left(1-\frac{P^2}{P_f^2}\right), \tag{7}$$

sau

$$Ph=GI_d\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\left(1-\frac{P^2}{P_f^2}\right)dx, \tag{8}$$

respectiv

$$\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx=\frac{Ph}{GI_d(1-\alpha^2)}, \tag{9}$$

unde s-a notat

$$\alpha=\frac{P}{P_f}. \tag{10}$$

Relația (9) soluționează problema pusă. Amplitudinea deformațiilor se obține introducînd aici pentru φ deformația obținută în timpul flambajului clasic. Pentru soluții aproximative se poate utiliza, pentru φ o expresie analitică oarecare compatibilă cu condițiile de fixare. Este interesant de remarcat faptul că aceste condiții, privesc numai modurile de fixare la răsucire. Astfel, pentru o bară de lungime φ fixată la un capăt, astfel încît să nu se rotească, și liberă la celălalt, se poate lua

$$\varphi=\varphi_1\sin\frac{\pi x}{2l}. \tag{11}$$

Introducînd această expresie în (9) se obține

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{3Phl}{\pi^2 GI_d(1-\alpha^2)}}. \tag{12}$$

Pentru bara împiedecată să se rotească la ambele capete, se poate lua

$$\varphi = \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{13}$$

și se obține

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2Phl}{\pi^2 GI_d(1-\alpha^2)}}. \tag{14}$$

Pentru bara încastrată la ambele capete se poate lua

$$\varphi = \varphi_1\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right), \tag{15}$$

astfel încît

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{Phl}{2\pi^2 GI_d(1-\alpha^2)}}, \tag{16}$$

După cum era de așteptat, dacă $P \to P_f$ deformațiile tind către ∞.

Catedra de rezistența materialelor

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ПОБОЧНОГО ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА УДАРОМ

(Краткое содержание)

В работе представлены значения максимальных деформаций в случае побочного продольного изгиба под динамически приложенными накрузками для некоторых из часто встречающихся случаев. Расчеты проделны в приближении пренебрежения эффекта собственной массы ударяемого стержня.

SOME CASES OF LATERAL BUCKLING OF BEAMS BY IMPACT

(Summary)

The work presents the values of maximum deformations in the case of lateral buckling of beams under dynamically applied loads for some of the frequently encountered cases. The calculations are worked out by approximately neglecting the effect of the proper mass of the colided beam.

QUELQUES CAS DE FLAMBAGE LATÉRAL PAR CHOC

(Résumé)

On présente dans cette étude des valeurs des déformations maxima au cas du flambage latéral sous des charges appliquées d'une manière dynamique ; il s'agit de certains situations qu'on rencontre couramment. Les calculs sont effectués avec l'approximation qui néglige l'effet produit par la masse propre de la barre ayant subi le choc.

EINIGE FÄLLE VON SEITLICHER KNICKUNG DURCH STOSS

(Zusammenfassung)

In der Arbeit werden die Werte der grössten Formänderungen im Falle der seitlichen Knickung unter dynamisch angelegter Belastung für einige häufig begegnete Fälle, angegeben. Die Berechnungen sind annäherd mit Vernachläss igung des Effektes der eigenen Masse der angeschlagenen Barre, gemacht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

ADSORBȚIA ACIDULUI ACETIC PE SCHIMBĂTORI DE IONI DIN SOLUȚII DE ACETONĂ — APĂ *

V. PĂRĂUȘANU, O. LANDAUER, C. MATEESCU, F. DANES

Purificarea substanțelor cu schimbători de ioni răspîndită pe scară largă în domeniul prelucrării apelor a început să fie folosită în ultimii ani și în tehnologia chimică organică. Prima instalație de purificare cu schimbători de ioni în chimia organică folosită la tratarea sucului de sfeclă și melasei datează din 1942. Totuși, pînă spre 1950, schimbul de ioni ca operație unitară în chimia organică nu putea fi comparat nici pe departe ca importanță cu distilarea, adsorbția, extracția sau recristalizarea [1]. Cauzele acestei situații constau în primul rînd în dificultățile tehnologice întîlnite: ioniții existenți pînă la începutul deceniului trecut nu rezistau la acțiunea chimică a substanțelor organice, dizolvîndu-se în ele și fărămițîndu-se. Trecerea de la ioniți de policondensare la ioniți de polimerizare a permis înlăturarea în bună parte a acestei dificultăți. Totuși, și acum în fiecare caz în parte trebuie controlată rezistența fizică și mecanică a ionitului în mediul respectiv, atît din punct de vedere al micșorării treptate a capacității de schimb și al pierderilor de ionit cît și din punct de vedere al impurificării mediului organic de lucru sau al eventualelor acțiuni catalitice ale ionitului asupra lichidelor organice. Este cunoscut, de exemplu, faptul că tratarea cu ioniți a aldehidelor este dificilă, deoarece ioniții provoacă reacții secundare de acetalizare și aldolizare. Toate aceste fenomene de impurificare nu pot fi prevăzute dinainte și în etapa actuală practica singură constituie criteriul de alegere al metodei de lucru.

O altă dificultate, azi înlăturată în parte, a aplicării ioniților în chimia organică o constituia existența unei game reduse de anioniți: dacă se dispunea încă de mult de o întreagă serie de cationiți, de la cei puternic disociați, analogi acizilor tari, pînă la cei foarte slab disociați (cationiți slab acizi), în schimb pînă nu de mult se cunoșteau numai anioniți slab bazici. În ultimul deceniu au fost sintetizați și anioniți puternic bazici, care permit o bună înlăturare a anionilor, chiar a acizilor tari. Acești anioniți sînt însă dezavantajoși din punct de vedere al prețului ridicat și al regenerării greoaie.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din I.P.B., 7-8 aprilie 1962.

Tot în ultimul timp s-au realizat ioniți cu o mare capacitate de schimb (pînă la 8 mval/gram), ceea ce permite reducerea investițiilor necesare instalațiilor cu ioniți.

Dar una din dificultățile ce se întîmpină în aplicarea ioniților în chimia organică este determinată de complexitatea procesului de schimb ionic în aceste condiții.

Tabloului obișnuit al funcționării ioniților i se suprapun aici unele fenomene de „histerezis" și unele echilibre metastabile [2], influența dimensiunilor ionilor [3], gomflarea ionitului în funcție de mediu [4], repartizarea solventului între rășină și ionit [5], funcționarea multor substanțe organice ca ion dipolar [6], constanta dielectrică a mediului [7], însușirile acid-bază ale solventului [8], echilibrele de disociere a substanțelor ionice și însăși a solvenților, formarea de asociații ionice și moleculare [9], gradul de ordonare sau dezordonare ai ionilor în ionit [10], formarea de combinații chimice nedisociate de către grupele active din ionit și adsorbția suplimentară fizică sau chimică ce există alături de adsorbția de schimb [11].

În această lucrare ne-am propus să studiem o problemă — cea enunțată în titlul — de interes practic imediat și anume purificarea acetonei de sinteză, ceea ce ne permite și studierea unor particularități ale schimbului ionic în medii aquo-organice.

Am studiat schimbul ionilor acetat cu ionii oxidril în medii aquo-acetonice pe diferiți schimbători de ioni. Ca ion de schimb am ales OH^- pentru că acesta permite chiar îndepărtarea acidului acetic conform reacției :

$$ROH + CH_3COOH \rightarrow CH_3COOR + H_2O$$

și nu înlocuirea sa cu un alt acid, cum s-ar fi întîmplat, de exemplu în cazul schimbului cu ion clor :

$$RCl + CH_3COOH \rightarrow CH_3COOR + HCl$$

Schimbul cu ioni OH este interesant, de asemenea, și pentru că pune în evidență rolul jucat în procesul de schimb de ionii solventului, în speță ai apei.

Deși în acetona de sinteză există alături de CH_3COOH și cantități mici de acizi alifatici cu un număr mai mare de atomi de C în moleculă, am studiat numai schimbul cu acidul acetic. Ne-am limitat la acești ioni, întrucît odată cu mărirea dimensiunilor ionilor schimbați se reduce considerabil viteza de schimb și apar fenomene nedorite de histerzis și echilibre metastabile. Datele obținute, lucrînd cu acid acetic, pot fi totuși utilizate la purificarea acetonei de sinteză, deoarece cea mai mare parte a aciditățiii acesteia (ca, de altfel, și a acetonei obținute din distilarea lemnului) este dată de acidul acetic și constantele de disociere a acizilor superiori sînt apropiate ca valoare de aceea a acidului acetic.

Preliminar s-a studiat reversibilitatea schimbului, tratînd anionitul în forma OH cu CH_3COOH și separat tratînd anionitul în forma acetat cu NaOH. În ambele cazuri compoziția la echilibru a ionitului (la compozi-

ție identică a soluției externe) a fost aceiași, ceea ce indică atingerea echilibrului real.

Viteza de atingere a echilibrelor a fost studiată tot preliminar. Ca timp de realizare al echilibrului „*t*" a fost considerat convențional acel timp, în care la trei valori succesive, $t/2$, t, $2t$, concentrația în soluția de echilibru variază cu mai puțin de 1%. Din tabelul 1 se vede că timpul de atingere echilibrului crește relativ încet, odată cu creșterea proporției de acetonă în amestecul apos, cu excepția ultimei porțiuni în care creșterea este foarte rapidă: de la trei ore pentru 98% acetonă la aproximativ 15 zile pentru acetonă 100%. Din această cauză, proporția volumetrică minimă de apă în acetonă a fost de 2%.

Tabela 1

Timpul de realizarea echilibrului de schimb CH^3COO^-—OH^- în soluții de apă-acetonă pe ionit Amberlit IRA—400

u %	(procente volumetrice apă)	100	60	30	13	2	0
T	(timpul de echilibrare, ore)	0,5	1	2	2	3	360*)

S-a studiat schimbul ionic pentru următoarele proporții de apă în procente volumetrice: 100; 60; 43; 30; 13; 2, insistînd asupra amestecurilor cu 13% apă, care corespunde compoziției acetonei industriale, înainte de rectificare.

În privința alegerii anioniților, s-a lucrat preliminar cu produse de diferite bazicități și compoziții: EDE — 10 P, AN — 2 — Fg, Amberlit IRA — 400, Merk — II p. a. S-a constatat că primul ionit sfărîmîndu-se rapid, nu este utilizabil în practica industrială a dezacidifierii acetonei, așa încît a fost exclus din determinările ulterioare.

S-a studiat mai amănunțit schimbul pe Amberlit IRA — 400 și Merk — II p. a., reprezentanți tipici ai claselor de anioniți puternic și respectiv slab bazici asupra cărora am constatat că acetona nu are nici o acțiune de sfărîmare sau dizolvare. Anionitul AN — 2 — Fg nu se sfarmă, însă este parțial solubilizat de acetonă. Deși solubilizarea aceasta este foarte lentă, totuși ea provoacă colorarea acetonei. Trecînd ulterior acetona printr-un strat de cărbune filtrant, coloratia respectivă a putut fi îndepărtată, așa încît cu acest corectiv, purificarea acetonei poate fi făcută industrial cu AN — 2 — Fg, care are avantajul accesibilității și prețului de cost scăzut.

Pentru determinări de laborator au fost preferați însă ioniții Amberlit și Merck, care nu colorează de loc acetona, astfel încît dozarea acidului acetic se poate face ușor prin titrare acidimetrică.

Capacitatea de schimb a ioniților (q_0) a fost determinată prin trecerea ionitului cu soluție de NaCl în forma clor și apoi eluarea clorului cu

* spre deosebire de timpii precedenți, acesta nu corespunde agitării permanente.

$NaNO_3$ și titrarea argintometrică a ionului clor. Capacitățile de schimb în mval/gram produs uscat sînt prezentate în tabela 2.

Tabela 2

Capacitatea de schimb a ioniților, q_0, mval/ml

Ionit	Merck II p. a.	Amberlit IRA—400	AN—2—Fg
q_0	1,610	1,693	7,12

Se observă că din punct de vedere al capacității de schimb ridicate, ionitul de proveniență sovietică, AN-2-Fg este indicat pentru utilizări industriale.

Determinările din seria principală au fost realizate astfel: ionitul trecut în formula OH este uscat pe $CaCl_2$ și c întărit apoi se introduce într-o anumită cantitate din amestecul apă-acetonă-acid acetic de compoziția dorită. Se agită timp de 4 ore cu agitator mecanic. Timpul de echilibrare stabilit în prealabil este la toate probele sub 3 ore și după atingerea echilibrului o parte alicotă din soluție este titrată cu NaOH $\frac{n}{10}$ sau $\frac{n}{100}$ cu indicator fenolftaleină. Temperatura de lucru 20°C.

Se ține seama de aciditatea inițială a acetonei și de evaporarea din timpul agitării, măsurînd volumul de soluție final și lichidul sorbit de ionit.

Regenerarea se face cu soluție 4% NaOH în 10 porțiuni a cîte 0,5 litri pentru fiecare 10 g ionit.

În determinările preliminare s-au utilizat reactivi Merck și acetonă p.a. produsă de uzinele „Reactivul", de aciditate inițială $1{,}8\ 10^{-4}$n.

Concentrația „c" a acidului acetic total, disociat și nedisociat, din soluție a fost făcută prin titrare cu NaOH. Concentrația acidului acetic din ionit se determină printr-un bilanț al acidului acetic:

$$L\,c_0 = L\,c + S\,q_A$$

de unde:

$$q_A = \frac{L\,(c_0 - c)}{S} \qquad (1)$$

în care: q_A = concentrația la echilibru a acidului acetic în ionit mval/gram ionit uscat în forma OH,

c_0 = concentrația inițială a acidului acetic în soluție mval/ml,

c = concentrația acidului acetic în soluție la echilibru,

L = volumul de lichid, ml,

S = greutatea ionitului uscat, g.

Influența proporției de ionit asupra echilibrului a fost studiată în amestecuri cu 13% apă în volume pentru o concentrație inițială de

$1{,}406.10^{-2}n$ pentru ioniții Merck și Amberlit și $1{,}89.10^{-2}n$ pentru ionit AN-2-Fg. Datele de echilibru sînt prezentate în tabelele 3, 4 și 5.

Tabela 3

Influența proporției de ionit Merck II p.a. asupra concentrației de echilibru a acidului acetic, în soluții apă-acetonă cu 13% volumetrice apă $c_0 = 1{,}406 . 10^{-2}$ n

m	0,569	1,138	2,276	4,552
$10^2 c$, $\frac{mval}{ml}$	0,875	0,565	0,275	0,13

Tabela 4

Influența proporției de ionit AN — 2 — Fg asupra concentrației de echilibru a acidului acetic, în soluții apă-acetonă cu 13% volumetrice apă $c_0 = 1{,}89 . 10^{-2}$ n

m		7,55	15,1
$10^2 c$	$\frac{mval}{ml}$	8	4,2

Tabela 5

Influența proporției de ionit Amberlite IRA—400 asupra concentrației de echilibru a acidului acetic în soluții apă-acetonă cu 13% volumetrice apă $c_0 = 1{,}406 . 10^{-2}$ n

m	0,60	1,20	2,40	4,80
$10^4 c$	$\frac{mval}{ml}$ 40	7,25	1,80	0,70

Proporția de ionit a fost introdusă în tabel sub forma raportului:

$$m = \frac{S\, q_0}{L\, c_0} \qquad (2)$$

în care: q_0 este capacitatea de schimb în mval/gram ionit uscat în forma OH Mărimea adimensională „m" indică excesul sau deficitul de ionit, valoarea: $m = 1$ corespunzînd proporției stoechiometrice între ionit și soluție.

Din tabel se observă că mărirea excesului de ionit m micșorează aproximativ în aceeași proporție concentrația de acid acetic în soluție la echilibru

$$c \sim \frac{1}{m}$$

Excepție face anionitul puternic bazic Amberlit IRA-400, unde c variază invers proporțional cu o putere mult mai mare decît 1 a lui *m*. Se impune, deci, să nu se utilizeze în practică ioniți în cantități deficitare, cel puțin în ceea ce privește anioniții puternic bazici.

Influența concentrației inițiale alături de a raportului m a fost studiată în amestecuri cu 13% apă și reprezentată în tabelele 6, 7 și 8.

Tabela 6

Echilibrul $CH_3COO^- - OH^-$ în medii apă-acetonă cu 13% apă pe ionit Merck II p.a.

$10^2 c_0$ mval/ml	1,406	0,527	1,406	0,879	1,406	1,406	2,110	3,516
m	4,552	3,035	2,276	1,821	1,138	0,569	0,759	0'455
$10^2 c$ mval/ml	0,13	9,15	0,275	0,30	0,565	0,875	0,99	2,04
q_A mval/ml	0,319	0,377	0,566	0,579	0,841	1,062	1,120	1,476
D	2,42	0,77	2,23	1,08	1,63	0,96	2,59	7,97
$10^2 (c_0 - c)$ mval/ml	1,276	0,377	1,131	0,579	0,841	0,531	1,12	1,476
$\frac{D}{c_0 - c}$ mval/ml	190	204	197	187	194	221	231	540

Tabela 7

Echilibrul $CH_3COO^- - OH^-$ în medii apă-acetonă cu 13% volumetrice apă, pe ionit AN — 2 — Fg

$10^2 c_0$ mval/ml	1,89	1,89
m	7,55	15,1
$10^4 c$ mval/ml	8,0	4,2
q_A mval/ml	0,905	0,462
D	3,30	3,06
$10^2 (c_0 - c)$ mval/ml	1,81	1,85
$\frac{D}{c_0 - c}$ mval/ml	182	166

Tabela 8

Echilibrul $CH_3COO^- - OH^-$ în medii apă-acetonă cu 13% volumetrice apă, pe ionit Amberlit IRA—400

$10^2 c_0$ $\frac{mval}{ml}$	1,406	0,527	1,406	0,879	1,406	2,110	1,406	3,516
m	4,80	3,20	2,40	1,92	1,20	0,80	0,60	0,48
$10^4 c$ $\frac{mval}{ml}$	0,70	1,15	1,80	2,70	7,25	25,8	40	104
q_A $\frac{mval}{ml}$	0,350	0,516	0,694	0,853	1,334	1,852	2,012	2,476
D	52,3	19,7	53,5	32,1	68,5	(valori negative)		
$10^2 (c_0 - c)$ mval/ml	1,399	0,516	1,388	0,853	1,334	1,852	1,006	2,476
$\frac{D}{c_0 - c}$	3740	3810	3860	3760	5130	(valori negative)		

În figura 1 și 2 sînt prezentate curbele de echilibru pentru Merck II, Amberlit IRA-400 și respectiv AN-2-Fg.

În abscisă figurează concentrația de acid acetic în soluție la echilibru c, iar în ordonată concentrația acidului acetic reținut de ionitul q_A.

În tabelele respective figurează și parametrul de schimb cel mai important pentru utilizări practice și anume coeficientul de selectivitate D, definit ca de obicei:

$$D = \frac{\frac{q_A}{q_0 - q_A}}{\frac{c}{c_0 - c}} \qquad (3)$$

Din datele expuse se observă lipsa unei regularități aparente. Deși pentru schimbul uni-univalent, D este în mod obișnuit constant; în cazul de față D variază cu concentrația de echilibru c și cu raportul m. Se observă însă că D este proporțional cu diferența între concentrația inițială și concentrația de echilibru în soluție:

$$D \sim (c_0 - c)$$

cu excepția concentrațiilor mai mari la care D variază proporțional cu o putere mai mare decît 1 a diferenței de concentrație $c_0 - c$.

La ionitul AN-2-Fg și raportul $\frac{D}{c_0 - c}$ este, de asemenea, constant. La Amberlit, raportul respectiv este constant la concentrații mici, pe cînd

la concentrații mai mari crește odată cu concentrația, iar apoi devine negativ. La cele trei concentrații mai mari se observă că acidul acetic este reținut în cantități mai mari decît capacitatea de schimb a ionitului ($q > q_0$), ceea ce indică existența unei sorbții suplimentare.

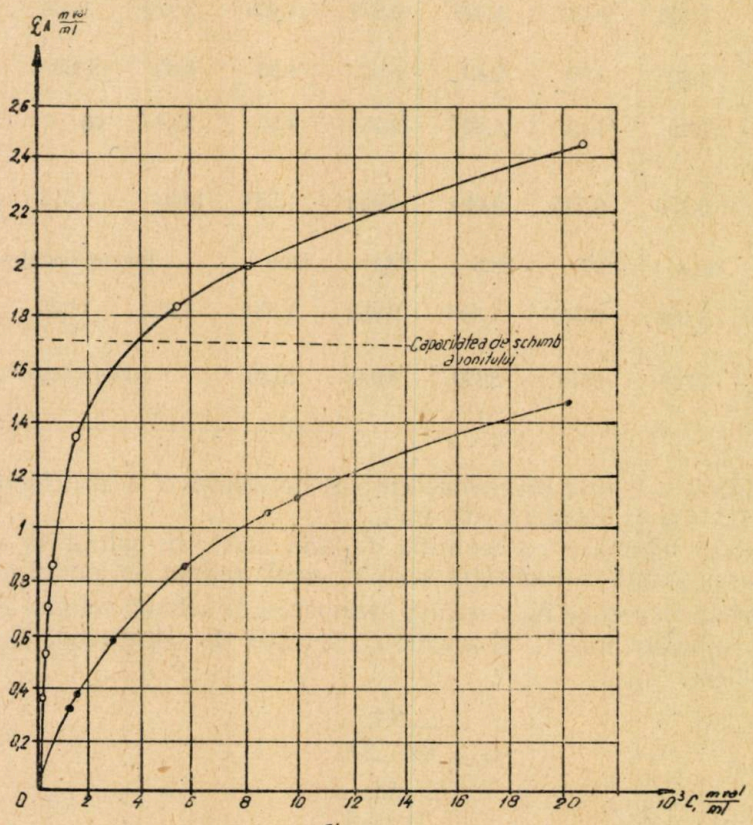


Fig. 1

• Curba de echilibru a schimbului ionic acetat-oxidril pe anionit Merck II p.a. în soluții apă-acetonă cu 13% apă la 20°C

○ Curba de echilibru a schimbului ionic acetat oxidril pe anionit Amberlite IRA-400 în soluții apă acetonă cu 13% apă la 20°C

Pentru interpretarea rezultatelor se consideră echilibrul de schimb:

$$ROH + CH_3COO^- \rightarrow RCH_3COO + OH^-$$

caracterizat prin constanta de schimb ionic:

$$K_s = \frac{[RCH_3COO] \cdot [OH^-]_l}{[ROH]\,[CH_3COO^-]_l} \qquad (4)$$

în care indicele l se referă la concentrațiile în fază lichidă.

În soluție, acidul acetic atinge un echilibru de disociere, caracterizat prin constanta de disociere K_a:

$$K_a = \frac{[H^+]_l \cdot [CH_3COO^-]_l}{[CH_3COOH]_l} \tag{5}$$

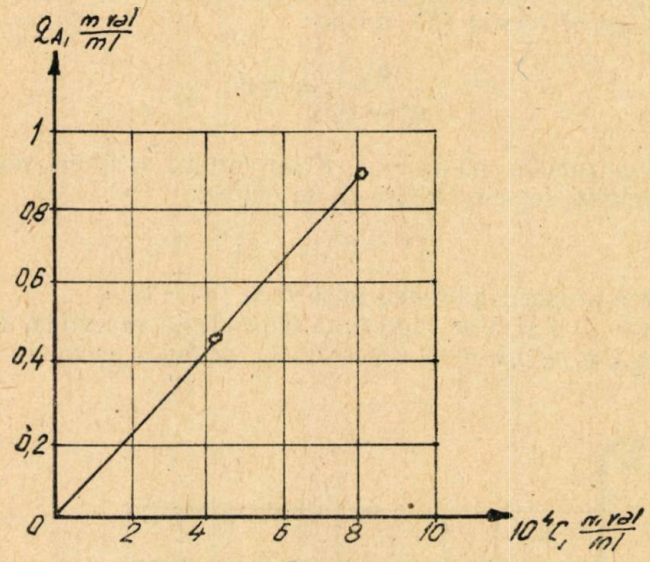


Fig. 2.
Curba de echilibru a schimbului ionic acetat oxidril pe anionit AN-2-Fg în soluții apă acetonă cu 13 % apă, la 20°C.

De asemenea, concentrațiile ionilor apei sînt legate între ele prin relația:

$$[H^+]_l \cdot [OH^-]_l = K_w\, u \tag{6}$$

în care: $K_w = 10^{-14}$ la 21°C, este produsul ionic al apei
u = proporția de apă în acetonă în g/ml.

Înlocuind concentrațiile $[CH_3COO^-]_l$ din relația (5) și $[OH^-]_l$ din relația (6) în (4) se obține:

$$K_s = \frac{[RCH_3COO]\, K_w \cdot u}{[ROH]\, K_a [CH_3COOH]}$$

Notînd cu α gradul de disociere al acidului acetic și înglobînd constantele K_s, K_a, K_w și concentrația apei u într-o constantă generală K:

$$K = \frac{K_s K_a}{K_w \cdot u} \tag{7}$$

se obține:

$$\frac{q_A}{q_0 - q_A} = K c (1 - \alpha) \tag{8}$$

Pentru mediu apos $K_a = 1{,}76.10^{-5}$ [12]; pentru medii mixte aquo-acetonice valoarea lui K_a nu este cunoscută, dar este în orice caz mai mică decît în apă. Pentru concentrații ale acidului acetic la echilibru $c \gg K_a$ (ceea ce are loc la toate concentrațiile de lucru, în medii cu 13% apă) corespund grade de disociere $\alpha \ll 1$. În aceste condiții, factorul $(1 - \alpha)$ poate fi neglijat și relația (8) devine:

$$\frac{q_A}{q_0 - q_a} = K\,c \qquad (8')$$

La proporție constantă apă-acetonă, K nu variază și ținînd seama de definiția coeficientului de selectivitate D, se obține:

$$D = K\,(c_0 - c) \qquad (9)$$

ceea ce explică proporționalitatea între D și $(c_0 - c)$.

În figurile 3, 4 și 5 se reprezintă dependența raportului ionic în fază solidă, $(q_0 - q_a)/q_a$ de inversul concentrației acidului acetic în soluție, 1/c.

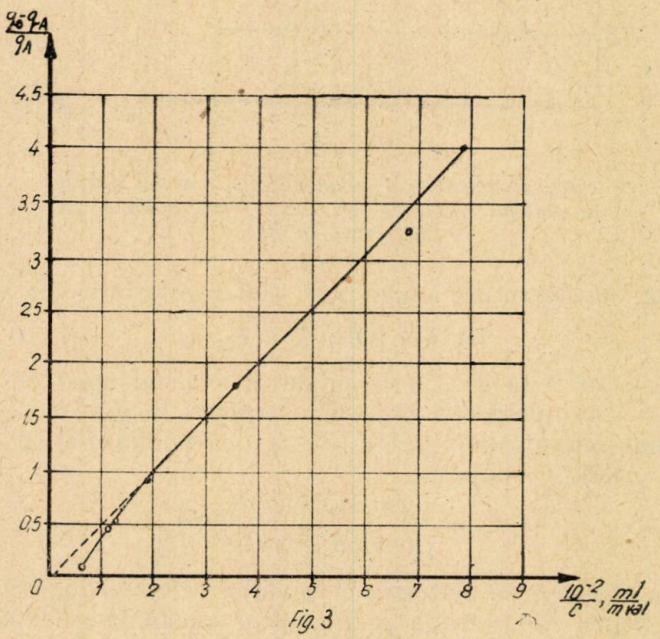


Fig. 3

Echilibrul pe Merck II pa

Se observă că la concentrații mici există o proporționalitate, redată și de relația (8'), pe cînd la concentrații mari raportul ionic în solid devine mai mic decît normal, ajungînd în cazul ionitului Amberlit chiar la valori negative.

Pentru a explica abaterile de la concentrații mari, admitem ipoteza adsorbției suplimentare, neechivalente, a acidului acetic. Fenomentul neechivalenței schimbului de acid acetic a fost constatat și de Bodamer și

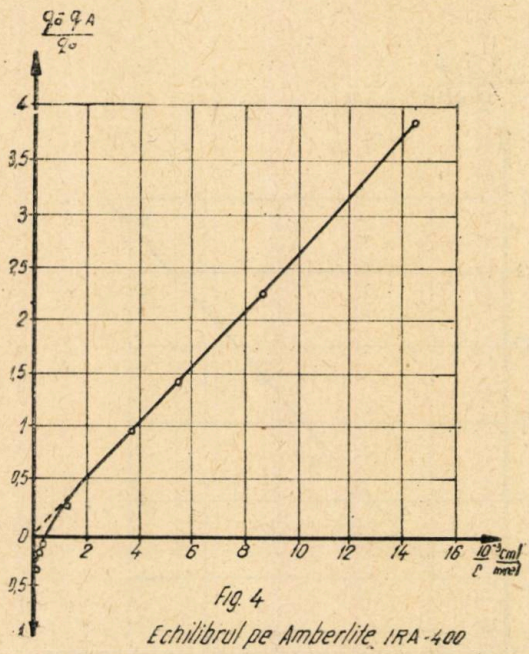


Fig. 4
Echilibrul pe Amberlite IRA-400

Kunin [4], iar Davîdov și Skoblionov [2] au constatat că această sorbție crește rapid cu concentrația acidului acetic în soluție.

Pentru a putea aprecia cantitatea de acid acetic sorbită suplimentar, considerăm concentrația acidului acetic în ionit, q_a ca o sumă a două componente :

$$q_a = q'_a + q''_a \tag{10}$$

în care q'_a este sorbția corespunzătoare schimbului ionic

q''_a este sorbția suplimentară.

În caz că mărimea lui q''_a este apreciabilă, în relația (8′) în locul concentrației totale din ionit, q_a, va trebui introdusă mărimea q'_a:

$$K c = \frac{q'_a}{q_0 - q'_a}$$

de unde

$$q'_a = q_0 \frac{K c}{1 + K c} \tag{11}$$

Această relație oferă posibilitatea calculării sorbției suplimentare:

$$q''_a = q_a - q_0 \frac{K c}{1 + K c} \qquad (12)$$

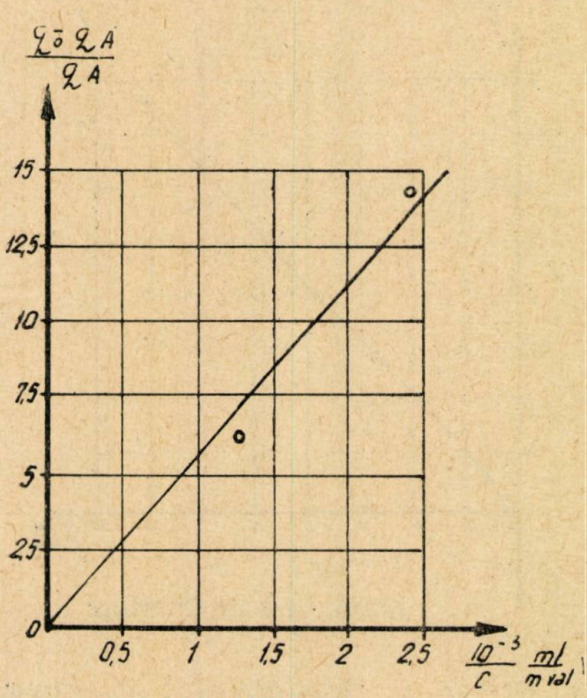


Fig. 5

Echilibrul pe AN-2-Fg

Pentru fiecare ionit se consideră ca valoare a constantei K, valoarea raportului $D/(c_0 - c)$ obținută la concentrații mici și anume:

K = 194 pentru Merk II p.a.

K = 174 „ AN—2—Fg

K = 3790 „ Amberlit IRA—400

Din valorile K de mai sus se pot face evaluări asupra tăriei ioniților, deoarece mediul fiind identic în toate cazurile u și K_a vor fi identice și deci K este proporțional cu constanta de schimb K_s. Se observă că AN—2—Fg și Merk II au performanțe asemănătoare și deci o tărie egală, pe cînd Amberlit IRA—400 este mult mai puternic bazic.

Valorile sorbției suplimentare q''_a calculate cu relația (12) sînt prezentate în tabelele 9 și 10 și grafic în fig. 6 și 7.

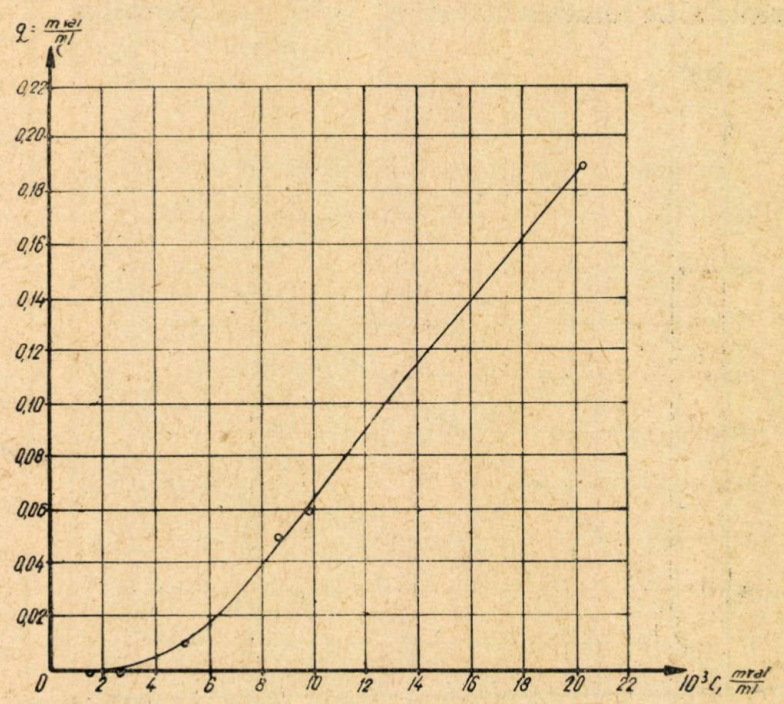


Fig. 6
Sorbția suplimentară a acidului acetic pe anionit Merck II p.a

Tabela 9

Sorbția suplimnetară a acidului acetic, q''_a, din acesteauri cu 13% volumetrice apă, pe ionit Merck II p.a.

$10^2\,c$	$\frac{mval}{ml}$	0,13	0,15	0,275	0,30	0,565	0,875	0,99	2,04
q_A	$\frac{mval}{ml}$	0,319	0,377	0,566	0,579	0,841	1,062	1,12	1,476
q'	$\frac{mval}{ml}$	0,324	0,363	0,560	0,591	0,842	1,012	1,059	1,285
q''	$\frac{mval}{ml}$	−0,005	0,014	0,006	−0,014	−0,001	0,050	0,061	0,191
λ	$\frac{mval}{ml}$						5,90	6,3	8,5

Se vede că la concentrații mici, q''_a are valori foarte mici alternativ pozitive și negative ce pot fi considerate neglijabile în limita erorilor experimentale. La concentrații mari q''_a crește cu concentrația.

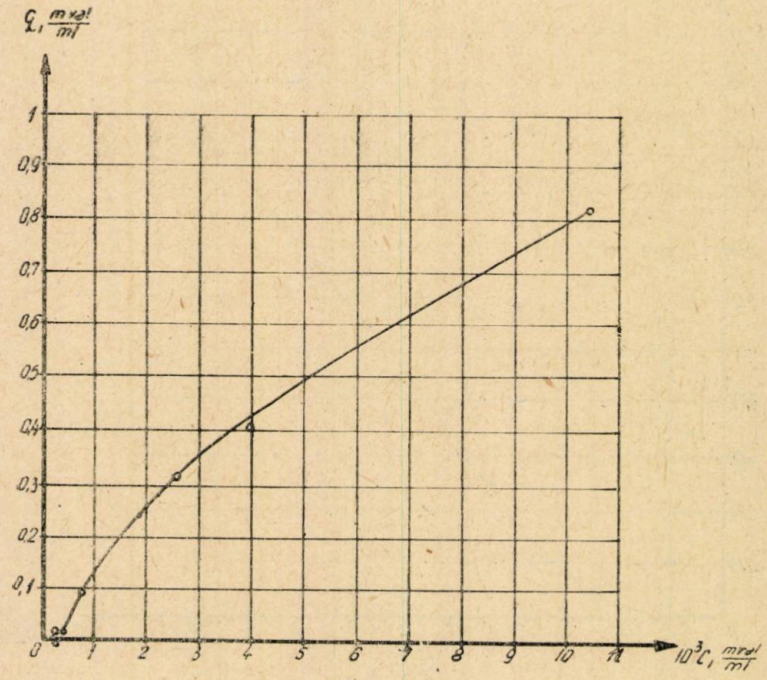


Fig. 7
Sorbția suplimentară a acidului acetic pe anionit Amberlite IRA-400

Tabela 10

Sorbția suplimentară a acidului acetic, q'', din acestecuri cu 13% volumetrice apă, pe ionit Amberlit IRA—400

$10^4 c$	$\frac{mval}{ml}$	0,7	1,15	1,8	2,7	7,25	25,8	40	104
q_A	$\frac{mval}{ml}$	0,350	0,516	0,694	0,853	1,334	1,852	2,012	2,476
q'	$\frac{mval}{ml}$	0,355	0,514	0,718	0,859	1,242	1,538	1,590	1,655
q''	mval/ml	−0,005	0,002	−0,024	−0,006	0,092	0,314	0,422	0,82
λ	mval/ml					110	100	90	94

Se observă că creșterea sorbției suplimentare este mai rapidă decît creșterea concentrației, ceea ce nu este firesc pentru adsorbție, unde ar trebui să avem egalitatea :

$$q''_a = \frac{q_0 \lambda c}{1 + \lambda c} \tag{13}$$

λ = coeficientul de adsorbție — ml/mval.

Pentru a explica această anomalie aparentă, vom analiza două variante :

1. Să admitem pentru adsorbție în locul formulei (13) următoarea formulă :

$$q''_a = \frac{q_0 \lambda c^n}{1 + \lambda c^n} \text{ cu } n > 1 \tag{14}$$

Relația (14) corespunde cazului cînd la un centru activ al ionitului corespund un număr n mai mare decît 1 de molecule adsorbite.

Această ipoteză este susținută implicit de Greger și Belle [10], după care adsorbția unor ioni organici mari se poate face „în ciorchine". Nouă nu ni se pare însă acceptabilă această ipoteză, întrucît această sorbție fiind de natură suplimentară, după cum arată Bofna și Govindon [11], este greu de admis că influența polarizantă a grupei active ionizate a rășinei se poate trasmite prin molecula acidului acetic slab polară și de dimensiuni relativ mari, la alte molecule de acid acetic.

2. Să admitem o sorbție suplimentară diferențiată după ionul cu care este saturată grupa activă a ionitului și anume o sorbție puternică pe ionitul în formă acetat și o sorbție slabă, neglijabilă pe ionitul în formă OH^-.

Nelson și Kraus [13] arată că în adevăr sorbția suplimentară depinde de forma ionică a rășinii. Din aceeași lucrare rezultă că sorbția este mai intensă în cazul ionilor organici și, de asemenea, că fiecare ionit adsoarbe preferențial molecule corespunzînd formei ionice în care se găsește. Aceasta ne îndreptățește să admitem că acidul acetic, ca moleculă organică, este puternic reținut de ionit și că sorbția sa se face diferențiat după forma ionică, oxidril sau acetat, a rășinii și anume că sorbția este mult mai puternică pe forma acetat, corespunzătoare moleculei de acid acetic, decît pe forma oxidril a ionitului.

Aceasta explică de ce creșterea sorbției suplimentare q''_a este mai rapidă decît creșterea concentrației acidului acetic în soluție, c : și din formula (13) reiese că sorbția raportată la numărul grupelor active, crește mai încet decît concentrația, însă o dată cu creșterea concentrației crește și numărul grupelor active q'_a.

În prima aproximație, sorbția pe forma OH a ionitului este considerată neglijabilă. În acest caz :

$$q''_a = q'_a \frac{\lambda c}{1 + \lambda c} \text{ de unde}$$

$$\lambda = \frac{q''_a}{c\,(q'_a - q''_a)} \tag{15}$$

Valorile lui λ calculate cu relația (15) prezentate în tabelele 9 și 10.

Ținînd seama că q'_a este o mărime relativ mică obținută prin diferența între q_a și q'_a, ambele comparativ $\gg$ decît q_a, putem considera satisfăcătoare concordanța obținută pentru valorile lui λ. Vom considera pentru λ următoarele valori obținute prin medierea ponderată:

$\lambda = 8{,}1$ mval/ml pentru Marck II p.a.

$\lambda = 94$ mval/ml pentru Amberlite IRA—400

În concluzie, sorbția totală va fi dată de relația:

$$q = q_0 \frac{K c}{1 + K c} \cdot \left[1 + \frac{c \lambda}{1 + \lambda c}\right] \qquad (16)$$

Cu valorile adoptate pentru K și λ se calculează cu ajutorul formulei (15) valorile sorbției totale ale acidului acetic q_a în funcție de concentrație pentru ioniții Merck II și Amberlit în medii cu 13% apă. Valorile obținute sînt comparate în tabela 11 cu valorile experimentale. Se observă o concordanță mulțumitoare între cele două serii.

Tabela 11

Abaterile de la relația 15 pentru calculul sorbției acidului acetic din soluții apă-acetonă cu 13% volumetrice apă

A) Ionit Merck II p. a. Abaterea $\% = 100 \frac{q_A - q_a}{q_A}$

$10^4 c$ $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	13	15	27,5	30	56,5	87,5	99	204
q_A (exp) $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	0,319	0,377	0,566	0,579	0,841	1,062	1,12	1,476
q_a (calc) $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	0,327	0,369	0,572	0,605	0,876	1,079	1,143	1,467
%	−2,5	+2,2	−1,1	−4,3	−4,0	−1,4	−2	+0,7

B) Ionit Amberlit IRA—400

$10^4 c$ $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	0,7	1,15	1,8	2,7	7,25	25,8	40	104
q_A $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$ (exp)	0,350	0,526	0,694	0,853	1,334	1,852	2,012	2,476
q_A $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$ (calc)	0,358	0,516	0,698	0,878	1,322	1,832	2,010	2,455
%	−2,2	0	−0,6	−2,8	+0,9	+1,1	+0,1	+0,8

Influența proporției apă-acetonă asupra echilibrului de schimb ionic.

S-a lucrat la concentrații de acid acetic mici, astfel încît să nu intervină sorbția neechivalentă. Din același motiv s-a lucrat numai cu ioniții Merck II și AN—2—Fg, la care fenomenul sorbției suplimentare are o amploare mult mai mică decît la Amberlit IRA—400.

Tabela 12

Sorbția acidului acetic din soluții pe ionit Merck II p.a. u = % volumetrice apă, α — gradul de disociere a acidului acetic, %
$q_0 = 1{,}612$ mval/ml; $c_0 = 1{,}406.10^{-2}$ mval/ml; $m = 1{,}138$

u %	100	60	30	13	2
$10^2 c$ $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	20	39	63	56,5	53
q_A $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	1,206	1,016	0,776	0,841	0,876
D	18	4,44	1,16	1,63	1,97
$\frac{D}{c_0-c}$ $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	1490	438	149	194	225
α %	6,6				
$10^{14} K_s K_a \frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	1390	260	45	2 5	4,5

Tabela 13

Sorbția acidului acetic din soluție apă-acetonă pe ionit Amberlit IRA—400
$q_0 = 7{,}12$ mval/ml

u %	100	57,5	13
$10^2 c_0$ $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	1,89	0,945	1,89
m	15,04	15,04	15,04
$10^4 c$ $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	0,90	3,60	4,20
q_A $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	0,47	0,45	0,46
D	14,9	1,73	3,07
$\frac{D}{c_0-c}$ $\frac{\text{mval}}{\text{ml}}$	794	190	166
α %	44		
$10\ K_s K_a$ mval/ml	445	109	22

*

Valorile obținute pentru constanta K egală cu raportul dintre coeficientul de selectivitate D și diferența $(c_0 - c)$ sînt prezentate în tabelele 12 și 13 și fig. 8. Se observă că valorile constantei K scad foarte mult, o dată cu scăderea concentrației apei pînă la 20—30%, după care micșo-

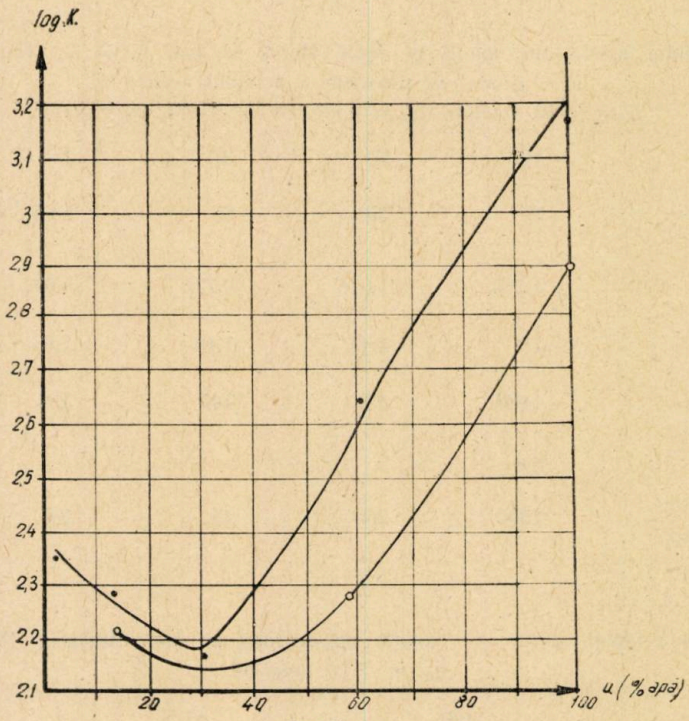


Fig. 8
• Merck pă
○ AN-2-fg.

rarea mai departe a proporției de apă duce la creșterea foarte înceată a constantei K. Datorită acestui fapt, este recomandabil ca purificarea acetonei să se execute în faza imediat următoare sintezei, cînd soluția apoasă conține numai 2—3% acetonă. În aceste condiții există și avantajul unei viteze de schimb mult mai mari [15], în schimb apare dezavantajul tratării și manevrării unui volum mare de lichid. Considerăm că soluția cea mai economică ar fi efectuarea dezacidifierii într-o etapă de concentrare a acetonei intermediară între 2 și 87%. În nici un caz nu poate fi recomandabilă tratarea acetonei cu ionit după faza de rectificare, cînd apa este total îndepărtată. În aceste condiții, deși K (și în consecință selectivitatea) este ceva mai mare decît la acetonă 87%, viteza de schimb foarte mică face procedeul de purificare prohibitiv.

Din valorile produsului K, cu ajutorul relației (7), se poate calcula produsul $K_a K_s$, între constanta de schimb ionic și constanta de disociere a acidului acetic. Valorile constantei de schimb ionic nu se pot calcula decît pentru $u = 100\%$, deoarece nu se cunosc valorile constantei de disociere în medii mixte aquo-acetonice.

În mediu apos se obțin următoarele valori pentru constanta de schimb ionic K_s:

$K_s = 2{,}53.10^{-7}$ pentru AN—2—Fg

$K_s = 7{,}9.10^{-7}$ „ Merck II p.a.

$K_s = 1{,}88.10^{-5}$ „ Amberlit IRA—400

Constanta de echilibru a schimbului ionic pentru Amberlit IRA-400 este în soluție apoasă de 80 ori mai mare decît la AN-2-Fg și de 25 ori mai mare decît la ionitul Merk II p.a. Valorile constantei de schimb sînt deci deosebit de mici (de ordinul $10^{-5} - 10^{-7}$), toți acești anioniți avînd o afinitate mult mai mare pentru ionul OH^- decît pentru ionul CH_3COO^-. Datorită însă faptului că în soluția de acid acetic concentrația de ioni OH^- este foarte mică, distribuția acidului acetic între fazele lichid și rășină este destul de favorabilă purificării, coeficienții de selectivitate D sînt apreciabili mai mari decît unitatea. Valorile K_s mari obținute pentru anionitul puternic bazic Amberlit IRA-400 îl fac deosebit de indicat pentru procesul de purificare. Acesta, însă, prezintă dificultăți mari la regenerare, necesitînd după experiențe preliminare de 5—6 ori mai mult NaOH decît anioniții slabi studiați. De asemenea, la Amberlit IRA-400, concentrația de echilibru c este influențată de proporția de ionit m mult mai puternic decît în cazul celorlalți doi ioniți.

Coeficientul de selectivitate ridicat face neindicată utilizarea unor coloane cu ionit care ar corespunde unui număr mare de trepte de realizare a echilibrului. Se recomandă, deci, să se lucreze discontinuu în vase cu agitator, stabilind de două ori echilibrul: prima dată cu un anionit slab, care să îndepărteze majoritatea aciditățiі și apoi cu o cantitate mult mai mică de anionit puternic bazic. Această dispunere permite și întrebuințarea unei cantități reduse de soluție regenerată de NaOH.

Catedra de chimie fizică

BIBLIOGRAFIE

[1] *Nachod F. C., Shubert Jack* — Ionnoobmenaia tehnologhia, Moscova (1959).

[2] *Davîdov A. T., Skoblionok P. F.* — Col. Jurn. (1956) *18*, 31.

[3] *Davîdov A. T., Ponirovsckaia L. J., Skoblionok P. F.* — Hromatografia ce teoria i primenenie Moscova, 1960, p. 117.

[4] *Bodamer G. W., Kunin R.* — Ind. Eng. Chem. (1953) *75*, 2577.

[5] *Davies W., Owen B. D.* — Journ. Chem. Soc. (1956), 1676.

[6] *Samsonov G. V.* — Hromatografia ce teoria i primenenie Moscova, (1960), p. 91.

[7] *Izmailov N. A., Frantevici - Zabledevskaia T. F.* — Jurn. Obș. Himii, (1945) *16*, 283.

[8] *Izmailov N. A.* — Hromatografia ce teoria i primenenie, Moscova, (1960), p. 83.

[9] *Davies W., Owen B. D.* — Journ. Chem. Soc. (1956), 1681.

[10] *Gregor H. P., Belec J., Marens R. A.* — Journ. Am. Chem. Soc. (1955) *77*, 2713.

[11] *Bobna S. L., Govindon K. P.* — Ind. Eng. Chem. (1956) *48*, 310.

[12] *Manualul Ing. Chimist*, vol. II. Ed. tehnică 1952, p. 1746.

[13] *Nelson F., Kraus K. A.* — Journ. Am. Chem. Soc. (1955) *77*, 329.

[14] *Gable R. W., Strobel H. A.* — Journ. Phys. Chem. (1956) *5*, 60.

[15] *Vermeulen D., Hoffmann, H. E.* — Ing. Eng. Chem. (1953) *45*, 1658.

„АДСОРБЦИЯ УКСУСНОЙ КИСЛОТЫ НА ИОНООБМЕННИКАХ В РАСТВОРАХ АЦЕТОН-ВОДА"

(Р е з ю м е)

Изучается обмен ионов ацетата с гидроксилом в водноацетоновых средах на разных ионообменниках. Выявляется роль ионов воды при изменении формы изотермы обмена, рассматривается влияние пропорции ионит-вода. пропорции вода-ацетон, концентрации уксусной кислоты и типа анионита на равновесие.

При больших концентрациях уксусной кислоты, наблюдаются отклонения от изотермы обмена. Эти отклонения объяснены количественно при помощи дополнительной адсорбции уксусной кислоты на ионите в форме „ацетата".

Основываясь на оптытных данных, предлагается способ разокисления синтетического ацетона.

THE ADSORBTION OF ACETIC ACID ON ION EXCHANGERS FROM ACETON - WATER SOLUTIONS

(S u m m a r y)

The exchange of acetat-ions with hydroxyl, in aquo-acetonic media on different ion exchangers is investigated. The role of water-ions in the change of the form of the exchange-isotherm is pointed out and the influence

on the equilibrium of the ratio ionit-fluid, of the ratio water- acetone, of the concentration of acetic acid and type of the anionit is investigated.

At high concentrations of acetic acid, deviations from the exchange isotherm are observed. The deviations are quantitatively explained by the supplementary adsorption of acetic acid on ionit, with „acetat" formation.

On the basis of experimental data, an elimination method of acid from synthesis acetone is proposed.

L'ADSORBTION DE L'ACIDE ACÉTIQUE SUR LES ÉCHANGEURS DE IONS DANS LES SOLUTIONS ACÉTONE — EAU

(Résumé)

On étudie les échangeurs de ions acétate avec hydroxile, dans des milieux aqueux - acétonique sur différents échangeurs de ions.

On met en évidence le rôle des ions de l'eau dans la modification de la forme de l'isotherme d'échange.

On recherche l'influence de la proportion de ionite — liquide, de la proportion eau - acétone, de la concentration de l'acide acétique et du type d'anionite sur l'équilibre.

S'il existe de fortes concentrations d'acide acétique, on peut observer des déviations de l'isotherme d'échange. Les déviations sont expliquées quantitativement par l'adsorbtion supplémentaire de l'acide acétique sur le ionite sous forme d'„acétate".

Basés sur les dates expérimentelles, on propose un procédé de desacidification de l'acétone de synthèse.

DIE ADSORBTION DER ESSIGSÄURE AUF IONENAUSTAUSCHERN AUS AZETON - WASSER - LÖSUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wurde der Ionenaustausch Azetat mit Hydroxyl in wässerig-azetonischen Medium auf verschiedenen Ionenaustauschern studiert.

Es wurde die Rolle der Wasserionen bei der Formänderung der Austauschisotherme hervorgehoben. Es wurde der Einfluss des Verhältnisses Ionit-Flüssigkeit, des Verhältnisses Wasser-Azeton, der Essigsäurekonzentration und des Anionittype auf das Gleichgewicht studiert.

Bei starker Essigsäurekonzentration können Abweichhungen werden mengenmässig durch die zusätzliche Adsorbtion der Essigsäure auf dem Ionit in Form von „Azetat" erkärt werden.

Auf Grund der experimentellen Daten wird ein Verfahren für die Entsäuerung des Synthese-Azetons vorgeschlagen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

ELECTROTEHNICĂ

ASUPRA DEDUCERII EXPRESIEI FORȚEI LUI LAPLACE

A. TIMOTIN

1. Spre deosebire de intensitatea $\bar{E}_v$ a cîmpului electric în vid, pentru a cărei introducere se folosește întotdeauna expresia $\bar{F}=q\bar{E}_v$ a forței care se exercită în vid asupra unui mic corp de probă de sarcină q, mărimile de stare ale cîmpului magnetic se introduc, încă, în diferite moduri în tratatele de Electricitate și Magnetism. În afara procedeelor utilizate mai rar, cari consistă în folosirea uneia din legile generale ale Electrodinamicii pentru definirea inducției magnetice în vid $\bar{B}_v$ (de ex. a legii inducției electromagnetice, v. [1]) și cari prezintă inconveniente de ordin teoretic mai general, s-au folosit în acest scop acțiunile ponderomotoare ale cîmpului magnetic din vid, exercitate asupra unor corpuri de probă potrivit alese: forța $\bar{F}=\mu_0^{-1}\, q_m \bar{B}_v$ asupra unui mic corp cu sarcina magnetică q_m, v. [2]; cuplul $\bar{C}=\bar{m}\times\bar{B}_v$ asupra unui mic corp magnetizat permanent de moment magnetic (amperian) $\bar{m}$, v. [3]; forța $\bar{F}=\gamma_0\, i\, d\bar{l}\times\bar{B}_v$ asupra unui element de circuit filiform dl de curent i (forța lui Laplace, în care $\gamma_0\, i$ e curentul în unități „magnetice", γ_0 fiind diferit de unitate și egal cu valoarea reciprocă a vitezei luminii în vid numai în sistemul de unități Gauss), v. [4]; cuplul $\bar{C}=\gamma_0\, i\, \bar{A}\times\bar{B}_v$ asupra unei mici bucle de curent i și vector-arie A, v. [5], [6].

Dintre procedeele bazate pe acțiuni ponderomotoare primul prezintă numai o importanță istorică, asociată analogiei dintre electrostatică și magnetostatică, și e principial incorect deoarece postulează existența unei mărimi de stare a particulelor încă neidentificată în natură (sarcina magnetică „adevărată"), forța care se exercită în vid asupra unei macro- sau microparticule fiind întotdeauna nulă într-un cîmp magnetic omogen. Al doilea procedeu prezintă inconvenientul de a necesita proprietăți de material ale micilor corpuri practic încă neidentificate: lipsa completă a unei magnetizări temporare. Al treilea procedeu prezintă inconvenientul de a folosi un corp de probă — elementul de circuit — principial „neizolabil" de alte corpuri (un circuit de curent continuu fiind întotdeauna închis) deși practic utilizabil. Al patrulea procedeu nu prezintă nici unul din aceste inconveniente.

Oricare ar fi modul de introducere al vectorului $\bar{B}$, expresia

$$d\bar{F} = \gamma_0 \, i \, \bar{dl} \times \bar{B}_v \tag{1}$$

a forței lui Laplace, ocupă o poziție centrală în problema localizării acțiunilor ponderomotoare ale cîmpului magnetic (și deci ale cîmpului electromagnetic). Deducerea ei cu ajutorul unor considerente energetice (de ex. cu ajutorul teoremelor forțelor generale în cîmpul magnetic staționar sau cuasistaționar) e criticabilă atît din punctul de vedere al demonstrației însești (care aplică, deobicei, la o porțiune deschisă de circuit, teoreme stabilite pentru circuite închise) cît și din faptul că restrînge la regimul staționar sau cuasistaționar valabilitatea unei relații mai generale. Deaceea, în lucrarea de față, se propune o demonstrație directă a expresiei (1) bazată pe definirea inducției magnetice în vid cu ajutorul acțiunilor pondemotoare exercitate asupra unei bucle de curent.

Menționăm totodată că o cale principial diferită pentru introducerea vectorului B_v, cu demonstrarea ulterioară imediată a relației (1), ar fi utilizarea expresiei $F = \gamma_0 \, q\bar{v} \times \bar{B}_v$ a forței care se exercită în vid asupra unei particule încărcate în mișcare (forța lui Lorentz). Această cale necesită precizări suplimentare referitoare la sistemul de referință față de care se consideră viteza v (în teoria macroscopică prerelativistă).

2. *Premize.* Fie o buclă de curent filiformă de contur Γ și de curent i, astfel că în fiecare punct al conturului (cu excepția unui număr finit de puncte izolate) dimensiunile transversale ale conductorului sînt infinit mici față de raza de curbură în acel punct. Fie P (de vector de poziție $\bar{r}_p$) centrul sferei de rază a minimă, care mai cuprinde în interior toate punctele conturului Γ și

$$\bar{A} = \bar{n} A = \frac{1}{2} \oint_\Gamma \bar{r} \times d\bar{l} = \frac{1}{2} \oint_\Gamma \bar{l} \times d\bar{l} \tag{2}$$

vectorul-arie al conturului, $\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al elementului de arc $d\bar{l}$ față de o origine o arbitrară, iar $\bar{l}$ vectorul de poziție al aceluiași element față de „centrul" P al conturului. Se consideră drept generalizări ale datelor experimentale privitoare la explorarea cîmpului magnetic în vid următoarele propoziții:

2.1. Momentul static rezultant exercitat de cîmpul magnetic în vid asupra buclei de probă, în raport cu centrul P al acesteia (cuplul $\bar{C}$ exercitat asupra buclei) tinde către zero odată cu aria $A = |\bar{A}|$ a acesteia, astfel că limita

$$\lim_{a \to 0} \bar{C}/A = \gamma_0 \, i \, \bar{n} \times \bar{B}_v(P) \tag{3}$$

există, e independentă de forma conturului Γ la orientare $\bar{n} = \bar{A}/A$ dată, și e egală cu produsul unui foctor scalar $\gamma_0 \, i$ (intensitatea curentului electric de conducție în unități „magnetice") — care depinde numai de starea electrocinetică a conductorului buclei — prin produsul vectorial dintre versorul $\bar{n}$ al buclei și vectorul B_v (inducția magnetică în vid) — care

depinde de punctul P din cîmp în care e situată bucla. Această relație poate fi considerată drept relația de introducere simultană a mărimilor $\gamma_0 i$ și $\bar{B}_v$.

2.2. Acțiunile ponderomotoare pe care un cîmp magnetic exterior de inducție $B_v(\bar{r})$ le exercită asupra unui element de conductor filiform $\Delta\bar{l}$ parcurs de curentul i, se reduc la o forță elementară ΔF care depinde numai de $\Delta\bar{l}$, de curent și de punctul din pîmp considerat astfel că limita

$$\lim_{\Delta l \to 0} \Delta\bar{F}/\Delta l = \bar{f}(\bar{u}, i, \bar{r}) \quad \text{cu} \quad \bar{u} = \Delta\bar{l}/\Delta l \tag{4}$$

există.

Această relație exprimă faptul că densitatea lineară a forței magnetice există în acord cu concepția de cîmp, în sensul că depinde numai de starea corpului asupra căreia se exercită și de starea locală a cîmpului (și nu depinde, de exemplu, de forma sau dimensiunile restului circuitului). Totodată din 2.2. mai rezultă că densitatea lineară a momentului exercitat de cîmp asupra unui conductor filiform e nulă.

3. *Se demonstrează succesiv următoarele:*

3.1. *Forța elementară dF, căutată, diferă de expresia (1) a lui Laplace, cu un termen aditiv a cărui contribuție la cuplul exercitat asupra unei bucle de curent (3) e nulă, oricare ar fi forma buclei (care se strînge, tinzînd către punctul P)*

$$d\bar{F} = \gamma_0 i\, \bar{l} \times \bar{B}_v + d\bar{G} \quad \text{cu} \quad \lim \frac{1}{A} \oint_\Gamma \bar{l} \times d\bar{G} = 0 \tag{5}$$

În adevăr, cu (4) și (3) trebuie ca

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{A} \oint_\Gamma \bar{l} \times d\bar{F} = \gamma_0 i\, \bar{n} \times \bar{B}_v(P) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{A} \gamma_0 i\, \bar{A} \times \bar{B}_v(P) \tag{6}$$

Ținînd seama de (2) și de faptul că integrala unei diferențiale exacte e nulă, pentru o curbă închisă, rezultă

$$\bar{A} \times \bar{B}_v(P) = \frac{1}{2} \oint_\Gamma (\bar{l} \times d\bar{l}) \times \bar{B}_v(P) = \oint_\Gamma \left[d\bar{l}\,(\bar{l}\,\bar{B}_v(P)) - \bar{B}_v(P)\,(d\bar{l}.\bar{l}) + \right.$$

$$\left. + d\left\{ \bar{B}_v \frac{l^2}{2} - \frac{\bar{l}\,(\bar{l}\,\bar{B})}{2} \right\} \right] = \oint_\Gamma \bar{l} \times (d\bar{l} \times \bar{B}_v(P)) \tag{7}$$

sau cu (6)

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{A} \oint \left[(\bar{l} \times \{ d\bar{F} - \gamma_0 i\, (d\bar{l} \times \bar{B}_v(P)) \} \right] = 0 \tag{8}$$

Presupunînd că bucla e plasată într-un punct P din cîmp în jurul căruia

funcția $\bar{B}_\nu\ (\bar{r}) = \bar{B}_\nu(P) + (\bar{l}.\,\mathrm{grad})\ B_\nu\ (P) + \ldots$ poate fi dezvoltată în serie Taylor, se constată imediat că în (8) se poate înlocui $\bar{B}_\nu\ (P)$ cu inducția din punctul curent unde e plasat $d\bar{l}$. Se obține în acest caz (5).

3. 2. *Termenul aditiv $d\bar{G}$ al forței elementare, care nu aduce nici-o contribuție la valoarea cuplului, e identic nul*

$$\overline{dG} = 0 \tag{9}$$

În adevăr cu (4) și (5), se poate scrie

$$\overline{dG} = \bar{g}(\bar{u}, i, \bar{r})\, dl \quad \text{cu} \quad \lim_{a \to 0} \frac{1}{A} \oint_\Gamma \bar{l} \times \bar{g}(\bar{u}, i, \bar{r})\, dl = 0 \tag{10}$$

oricare ar fi forma conturului Γ.

Dezvoltînd funcțiunea $\bar{g}$ în serie Taylor în jurul punctului P (care poate fi ales astfel ca această dezvoltare să existe) se observă imediat că în limita (10) se poate înlocui valoarea curentă a funcțiunii $\bar{g}$ cu valoarea ei în punctul P

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{A} \oint_\Gamma \bar{l} \times \bar{g}(\bar{u}, i, P)\, dl = 0 \tag{11}$$

oricare ar fi forma conturului Γ.

Aplicînd această relație unei bucle triunghiulare de laturi $\Delta\bar{l}_1 = \bar{u}_1 \Delta l_1$, $\Delta\bar{l}_2 = \bar{u}_2 \Delta l_2$ și $-(\Delta\bar{l}_1 + \Delta\bar{l}_2)$ (astfel ca unghiul primelor două laturi (interior) să fie ascuțit și în rest oarecare), observînd că în acest caz punctul P cade în mijlocul laturii a treia și efectuînd calculele, se obține egalitatea :

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{A} \frac{\Delta l_1 \Delta l_2}{2} \left[-\bar{u}_2 \times g(\bar{u}_1, i, P) + \bar{u}_1 \times \bar{g}(\bar{u}_2, i, P) \right] = 0 \tag{12}$$

Deoarece primul factor are limita finită, iar al doilea nu depinde de $a = \frac{1}{2} |\Delta l_1 + \Delta l_2|$, rezultă

$$\bar{u}_2 \times \bar{g}(\bar{u}_1, i, P) = \bar{u}_1 \times \bar{g}(\bar{u}_2, i, P) \text{ cu } \bar{u}_1 \text{ și } \bar{u}_2 \text{ oarecari} \tag{13}$$

Înmulțind scalar această relație cu $\bar{u}_1$, rezultă $\bar{u}_2(\bar{u}_1 \times \bar{g}(\bar{u}_1, i, P)) = 0$ adică $\bar{g}(\bar{u}_1, i, P) = h(\bar{u}_1, i, P)\, \bar{u}_1$ și analog $g(\bar{u}_2, i, P) = h(\bar{u}_2, i, P)\, \bar{u}_2$. Termenul aditiv $d\bar{G}$ e deci paralel cu elementul de arc $d\bar{l}$. Înlocuind în (13) acestor relații se obține

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 \left[h(\bar{u}_1, i, P) + h(\bar{u}_1, i, P) \right] = 0 \tag{14}$$

relație care poate fi adevărată cu $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$ numai dacă al doilea factor

e nul oricare ar fi $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$. Pentru trei versori oricare se va putea, deci, scrie :

$$\begin{gathered} h(\bar{u}_1, i, P) + h(\bar{u}_2, i, P) = 0\,; \quad -h(\bar{u}_2, i, P) - h(\bar{u}_3, i, P) = 0 \\ h(\bar{u}_3, i, P) + h(\bar{u}_1, i, P) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Adunînd aceste trei relații și observînd că $\bar{g} = h\bar{u}$ rezultă, oricare ar fi $\bar{u}$, i și P,

$$\bar{g}(\bar{u}, i, \bar{r}) \equiv 0. \tag{16}$$

Cu (16) și (10) rezultă (9).

4. Înlocuind (9) în (5) se obține imediat expresia căutată, (1).

$$\boxed{d\bar{F} = \gamma_0 i\, d\bar{l} \times \bar{B}_v}$$

pentru forța elementară care se exercită în cîmpul magnetic, în vid, asupra unui element de conductor filiform parcurs de curent — inducția $\bar{B}_v$ fiind aceea produsă în punctul considerat în absența circuitului (sau pentru $i=0$). Cu această expresie se poate imediat demonstra că :

4. 1. Într-un cîmp omogen forța rezultantă exercitată asupra buclei e nulă, iar momentul rezultant exercitat asupra ei, față de o origine oarecare O, are expresia

$$\bar{M}_0 = \oint_\Gamma \bar{r} \times d\bar{F} = \gamma_0 i\, \bar{A} \times \bar{B}_v \tag{17}$$

4. 2. Forța rezultantă exercitată asupra unei bucle de probă (care se strînge către un punct) într-un cîmp neomogen, dar solenoidal (div $\bar{B}_v = 0$, cum e totdeauna cazul în cîmpul magnetic), satisface egalitatea

$$\lim_{a \to 0} \frac{\bar{F}}{A} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{A} \oint_\Gamma d\bar{F} = \operatorname{grad} (\gamma_0 i\, \bar{u} . \overset{\downarrow}{\bar{B}}_v(\bar{r})) \tag{18}$$

în care săgeata indică variabilele în raport cu care se derivează.

BIBLIOGRAFIE

[1] *L. R. Neiman* și *P. L. Kalantarov* : Bazele teoretice ale Electrotehnicii, vol. I, Ed. Energ. de Stat, 1955.

[2] *A. Sommerfeld* : Elektrodynamik, Leipzig, 1949.

[3] *R. Răduleț* : Bazele teoretice ale Electrotehnicii, vol. I, Lit. Inv., București, 1955.

[4] *I. E. Tamm :* Bazele teoriei electricității, Ed. Tehnică, 1955.

[5] *V. Novacu :* Introducere în Electrodinamică, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., București, 1955.

[6] *S. E. Friș și A. V. Timoreva :* Curs de Fizică generală, vol. 2, ed. II, Ed. Tehnică, 1955.

Catedra de Electrotehnică

О ВЫРАЖЕНИИ СИЛЫ ЛАПЛАСА

(Краткое содержание)

Вектор магнитной индукции в вакууме $\bar{B}_v$ можеть быть определен посредством магнитных пондеромоторных усилий деиствующих на малую петлю тока (с площадю $\bar{A}$, и с током i) принятая как магнитная зона, и в частном случае посредством момента сил

$$\bar{C} = \gamma_0 i \bar{A} \times \bar{B}_v$$

в статье показывается ччо выражение:

$$d\bar{F} = \gamma_0 i \, d\bar{l} \times \bar{B}_v$$

снлы деиствующей в магнитном поле по элемент тока с длиной $d\bar{l}$ и силой тока i (сила Лапласа) может быть доказана на основе выражения момента приведенной выше без использования энергетических рассуждений.

ON THE DEDUCTION OF THE LAPLACE FORCE EXPRESSION

(Summary)

The magnetic flux density vector $\bar{B}$ may be introduced on a basis of mechanical action in the magnetic field on a small loop (the loop's current being i, it's surface vector $\bar{A}$) which is taken as test body. Especially, one can use to this effect the torque

$$\bar{C} = \gamma_0 i \bar{A} \times \bar{B}$$

In the present paper, it is shown that the force

$$d\bar{F} = \gamma_0 i \, d\bar{l} \times \bar{B}$$

which is acting in the vacuum magnetic field on a circuit element $d\bar{l}$ with current i (the Laplace force), can be deduced from the above expression of the torque, without energetic aids.

SUR LA DEDUCTION DE L'EXPRESSION DE LA FORCE DE LAPLACE

(Résumé)

Le vecteur induction magnétique $\bar{B}_v$ peut être introduit dans le vide en utilisant le couple $\bar{C}$ exercé par le champ magnétique sur un petit circuit fermé (ayant un vecteur-aire $\bar{A}$ et un courant i)

$$\bar{C} = \gamma_0 i \, d\bar{l} \times \bar{B}$$

Dans l'article on démotre que l'expression de la force exercée sur un élement linéaire $d\bar{l}$ de courant (la force de Laplace)

$$d\bar{F} = \gamma_0 i \, d\bar{l} \times \bar{B}$$

peut être déduite de la première relation, sans recourir aux considérations énergétiques.

ÜBER DIE ABLEITUNG DES LAPLACE-SCHE KRAFTSATZES

(Zusammenfassung)

Die Einführung der magnetischen Vakuuminduktion $\bar{B}_v$ kann man mit Hilfe des vom magnetischen Felde im Vakuum auf eine durch den Flächeninhaltsvektor $\bar{A}$ charakterisierte und von der Stromstärke i durchflossene kleine Stromschleife ausgeübte Kraftmoment $\bar{C}$ einführen:

$$\bar{C} = \gamma_0 i \bar{A} \times \bar{B}_v$$

Es wird gezeigt dass die Beziehung

$$d\bar{F} = \gamma_0 i \, d\bar{l} \times \bar{B}_v$$

welche die Kraft die auf einem linearem Stromkreiselement $d\bar{l}$ (von einem Strom i durchflossen) ausgeübt wird, aus der oben erwähnte Beziehung, ohne energetische Betrachtungen, abgeleitet werden kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

UNE MÉTHODE UNITAIRE DE PRÉSENTER LES RELAIS DE DISTANCE ET DIRECTIONNELS

CĂLIN MIHAILEANU

1* Introduction

Dans la technique de la protection par relais des lignes électriques à haute tension les relais de distance occuppent actuellement une place prépondérante. L'organe de mesure d'un relais de distance éffectue une comparaison entre certaines grandeurs qui sont des combinaisons de la tension et du courant dans la ligne qui este protégée, au point où est installé le relais. Les organes de démarrage des relais de distance sont eux-aussi réalisés souvent d'après le même principe de mesure ennoncé plus haut.

Dans certains cas les protections sont prévues d'élements directionnels qui doivent faire une discrimination supplémentaire entre les cas dans lesquels l'énergie s'écoule des barres du poste vers la ligne protéjée où bien dans le sens inverse.

Les principes suivant lesquels on effectue la mesure de la distance entre le point d'emplacement du relais et celui où s'est produit le défaut, ainsi que les dispositions constructives qui se sont matérialisées dans le dernier quart de siècle ont été nombreuses et comme suite à ce fait des méthodes analytiques ou grapho-analytiques ont été élaborées afin de représenter le comportement des différents types de relais et de permettre la comparaison des performances de ceux-ci.

Dans le présent ouvrage on expose un mode de traitement qui permet une présentation et une base d'étude unitaires des types de relais de distance et directionnels les plus répandus, indépendemment de leur principe constructif.

2* Types de relais analysés

Pour classifier les différents types de relais on emploie la représentation classique de la courbe caractéristique du relais dans le plan complèxe de l'impédance et dans celui de l'admittance.

Les types de relais que nous avons étudies sont les plus usuels, c'est-à-dire tous ceux qui sont représentés dans ces deux plans soit par une caractéristique linéaire soit par une caractéristique circulaire.

On n'a pas eu en vue les relais à caractéristique ellyptique, hyperbolique ou autres dont l'utilisation est d'ailleurs extrémement rare.

La classification de ces types de relais est donnée au tableau synoptique no. 1.

Dans la deuxième colonne du tableau no. 1 sont indiqués les noms affectés dans cet ouvrage aux différents types de relais dont la caractéristique au plan Z et Y est celle des colonnes 4 et 5. Dans la colonne 3 on donne les symboles employés dans cet ouvrage pour ces différents relais. La justification de cette nomenclature sera donnée dans le chapitre 19-ème.

3* Méthodes d'analyse employées

On peut réduire le grand nombre de principes constructifs utilisés à la réalisation pratique des relais de distance et directionnels à deux variantes principales notamment :

a) le principe de la balance, dans lequel on compare soit les forces d'attraction exercées par deux bobines (balance électromagnétique), soit deux courants redressés (balance magnétoélectrique ou à relais polarisé) ; dans l'ensemble de ces cas il s'agit donc de la comparaison des valeurs efficaces de certaines grandeurs alternatives sinusoïdales, voire des modules des grandeurs complèxes qui les représentent.

b) le principe de l'induction et celui electrodynamique dans lesquels on crée un couple de forces, — ou bien la résultante de plusieurs couples, —sur une axe, chacun de ces couples pouvant être proportionnel au produit des valeurs efficaces de deux grandeurs éléctriques alternatives sinusoïdales de même fréquance et du cosinus d'unangle dépendant du déphasage entre elles.

Dans ce qui suivra, nous allons analyser les relais de distance et directionnels en nous basant sur la première de ces méthodes, et à la fin de l'ouvrage nous reprendrons l'analyse par la seconde méthode, pour tirer de cette façon certaines conclusions qui s'imposent.

4* Relais d'impédance (admittance) généralisée Zg (Yg)

Un relais Zg (Yg) compare les modules de deux combinaisons linéaires entre la tension $\underline{U}$ et le courant $\underline{I}$ appliqués au relais. Son équation de fonctionnement est donc :

$$|\underline{A}_1\underline{U} + \underline{C}_1\underline{I}| = |\underline{A}_2\underline{U} + \underline{C}_2\underline{I}| \qquad (4-1)$$

où :

$$\underline{A_1} = A_1 \underline{|\alpha_1}$$

$$\underline{A_2} = A_2 \underline{|\alpha_2}$$

$$\underline{C_1} = C_1 \underline{|\gamma_1}$$

$$\underline{C_2} = C_2 \underline{|\gamma_2}$$

sont des constantes complèxes ; si A_1 et A_2 sont des nombres sans dimension, C_1 et C_2 ont la dimension d'une impédance ; si C_1 et C_2 sont sans dimension, A_1 et A_2 ont la dimension d'une admittance.

Posons :

$$\theta_1 = \alpha_1 - \gamma_1$$

$$\theta_2 = \alpha_1 - \gamma_2$$

En divisant (4—1) par $\underline{I}$ nous obtenons :

$$|\underline{A_1 Z} + \underline{C_1}| = |\underline{A_2 Z} + \underline{C_2}| \qquad (4-2)$$

qui est l'equation réprésentant la caractéristique de fonctionnement du relais Zg (Yg) dans le plan complèxe de l'impédance, „vue" par le relais :

$$\underline{Z} = R + jX = Z \underline{|\varphi}$$

Cette equation, mise sous forme cartésiennce, représente un cercle ayant le centre déplacé vis-à-vis de l'origine (fig. no. 1 a) :

$$\boxed{R^2 + X^2 = 2R_0 R + 2X_0 X + D} \qquad (4-3)$$

où :

$$R_0 = \frac{-A_1 C_1 \cos\theta_1 + A_2 C_2 \cos\theta_2}{A_1^2 - A_2^2} \qquad (4-5)$$

$$X_0 = \frac{A_1 C_1 \sin\theta_1 - A_1 C_2 \sin\theta_2}{A_1^2 - A_2^2} \qquad (4-5)$$

$$D = -\frac{C_1^2 - C_2^2}{A_1^2 - A_2^2} \qquad (4-6)$$

Le centre du cercle est en $\underline{Z_0} = R_0 + jX_0 = Z_0 \underline{|\delta_z}$ ou :

$$\operatorname{tg}\delta_z = \frac{X_0}{R_0} = -\frac{A_1 C_1 \sin\theta_1 - A_2 C_2 \sin\theta_2}{-A_1 C_2 \cos\theta_1 + A_2 C_2 \cos\theta_2} \qquad (4-7)$$

Le rayon du cercle est :

$$\varrho_z = \sqrt{D + R_0^2 + X_0^2} = \frac{\sqrt{A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - 2A_1 A_2 C_1 C_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}}{|A_1^2 - A_2^2|} \qquad (4-8)$$

L'origine du plan complèxe de l'impédance est située à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle suivant que :

$$\varrho_z \gtrless Z_0 \qquad (4-9)$$

Si on reprend l'equation (4—1) et on la divise cette fois-ci par $\underline{U}$ on obient :

$$|\underline{A_1}+\underline{C_1}\,\underline{Y}| = |\underline{A_2}+\underline{C_2}\,\underline{Y}| \qquad (4-10)$$

qui est l'equation représentant la caractéristique de foctionnement du même relais Zg (Yg) dans le plan complèxe de l'admittance „vue" par le relais :

$$\underline{Y} = G - jB = Y\,|\underline{-\varphi}$$

L'equation (4—10), mise nous forme certèsienne, représente de même un cercle ayant le centre deplacé vis-à-vis de l'origine (fig. no. 1 b) :

$$\boxed{G^2+B^2 = 2G_0G+2B_0B+F} \qquad (4-11)$$

où :

$$G_0 = \frac{-A_1C_1\cos\theta_1 + A_2C_2\cos\theta_2}{C_1^2-C_2^2} \qquad (4-12)$$

$$B_0 = \frac{A_1C_1\sin\theta_1 - A_2C_2\sin\theta_2}{C_1^2-C_2^2} \qquad (4-13)$$

$$F = -\frac{A_1^2-A_2^2}{C_1^2-C_2^2} \qquad (4-14)$$

Le centre du cercle est en $\underline{Y_0}=G_0-jB_0=Y_0\,|\underline{-\delta_y}$, ou :

$$\operatorname{tg}\delta_y = \frac{B_0}{G_0} = \frac{A_1C_1\sin\theta_1 - A_2C_2\sin\theta_2}{-A_1C_1\cos\theta_1 + A_2C_2\cos\theta_2} = \operatorname{tg}\delta_z\,; \qquad (4-15)$$

donc :

$$\delta_y = \delta_z \qquad (4-16)$$

Le rayon du cercle est :

$$\varrho_y = \sqrt{F+G_0^2+B_0^2} = \frac{\sqrt{A_1^2C_2^2+A_2^2C_1^2-2A_1A_2C_1C_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}{|C_1^2-C_2^2|} \qquad (4-17)$$

Donc :

$$\frac{\varrho_z}{\varrho_y} = \frac{|C_1^2-C_2^2|}{|A_1^2-A_2^2|} \qquad (4-18)$$

5* **Relais de résistance (conductance) généralisée** Zg (Gg)

Ce type de relais s'obtient en particularisant le relais Zg (Yg) de manière que l'ont ait :

$$A_1 C_1 \sin \theta_1 = A_2 C_2 \sin \theta_2 \qquad (5-1)$$

Dans ce cas, de (4—4), (4—5) et (4—7) on obtient :

$$R_0 = \frac{A_1 C_1}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin \theta_2} \qquad (5-2)$$

$$X_0 = 0 \qquad (5-3)$$

$$\operatorname{tg} \delta_z = 0 ; \quad \delta_z = 0 \qquad (5-4)$$

La caractéristique du relais Rg (Gg) dans le plan complèxe de l'impédance Z est un cercle ayant le centre déplacé vis-à-vis de l'origine sur l'axe réelle R (fig. no 2 a), d'equation :

$$\boxed{R^2 + X^2 = 2R_0 R + D} \qquad (5-5)$$

De ($4_0$12) ; ($4_0$13) et (4—15) avec (5—1) on obtient :

$$G_0 = \frac{A_1 C_1}{C_1^2 - C_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin \theta_2} \qquad (5-6)$$

$$B_0 = 0 \qquad (5-7)$$

$$\operatorname{tg} \delta_y = 0 ; \quad \delta_y = \delta_z = 0 \qquad (5-8)$$

La caractéristique du relais Rg (Gg) dans le plan complèxe de l'admittance Y est de même un cercle ayant le cercle déplacé vis-à-vis de l'origine sur l'axe réelle G (fig. no. 26), d'equation :

$$\boxed{G^2 + B^2 = 2G_0 G + F} \qquad (5-9)$$

6* **Relais de réactance (susceptance) généralisée** Xg (Bg)

Ce type de relais s'obtient en particularisant le relais Zg (Yg) de manière que l'ont ait :

$$A_1 C_1 \cos \theta_1 = A_2 C_2 \cos \theta_2$$

Dans ce cas, de (4—4), (4—5) et (4—7) on obtient :

$$R_0 = 0 \qquad (6-2)$$

$$X_0 = \frac{A_1 C_1}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \qquad (6-3)$$

$$\operatorname{tg} \delta_z = \pm \infty ; \quad \delta_z = \pm \frac{\pi}{2} \qquad (6-4)$$

La caractéristique du relais $Xg\,(Bg)$ dans le plan complèxe de l'impédance $\underline{Z}$ est un cercle ayant le centre déplacé vis-à-vis de l'origine sur l'axe imaginaire jX (fig. no. 3 a), d'equation :

$$\boxed{R^2 + X^2 = 2\,X_0 X + D} \qquad (6-5)$$

De (4—12) ; (4—13) et (4—15) avec (6—1) on obtient :

$$G_0 = 0$$

$$B_0 = \frac{A_1\,C_1}{C_1^2 - C_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2} \qquad (6-7)$$

$$\operatorname{tg}\delta_y = \pm\infty\,; \quad \delta_y = \delta_z = \pm\frac{\pi}{2} \qquad (6-8)$$

La caractéristique du relais $Xg\,(Bg)$ dans le plan complèxe de l'admittance $\underline{Y}$ est de même un cercle déplacé vis-à-vis de l'origine, sur l'axe imaginaire jB (fig. no. 3 b) d'equation :

$$\boxed{G^2 + B^2 = B_0\,B + F} \qquad (6-9)$$

7* **Relais d'admittance mixte** *Ym*

Ce type de relais est un cas particulier du relais $Zg\,(Yg)$ pour lequel on a :

$$C_1 = C_2 = C \qquad (7-1)$$

Dans ce cas les relations (4—4) — (4—8) deviennent :

$$R_0 = \frac{C}{A_1^2 - A_2^2}\,(-A_1\cos\theta_1 + A_2\cos\theta_2) \qquad (7-2)$$

$$X_0 = \frac{C}{A_1^2 - A_2^2}\,(A_1\sin\theta_1 - A_2\sin\theta_2) \qquad (7-3)$$

$$D = 0 \qquad (7-4)$$

$$\operatorname{tg}\delta_z = \frac{X_0}{R_0} = \frac{A_1\sin\theta_1 - A_2\sin\theta_2}{-A_1\cos\theta_1 + A_2\cos\theta_2} \qquad (7-5)$$

$$\varrho_z = \sqrt{D + R_0^2 + X_0^2} = \frac{C\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}}{|A_1^2 - A_2^2|} = |\underline{Z}_0| \qquad (7-6)$$

La caractéristique du relais Y_m dans le plan Z est un cercle ayant le centre déplacé vis-à-vis de l'origine et passant par l'origine (fig. no. 4 a) d'equation (déduite de (4—3) avec (7—4) :

$$\boxed{R^2 + X^2 = 2R_0R + 2X_0X} \qquad (7-7)$$

Les rélations (4—12) à (4—17) deviennent :

$$G_0 = B_0 = F = \pm\infty \qquad (7+6)$$

$$\operatorname{tg}\delta_y = \frac{B_0}{G_0} = \frac{A_1 \sin\theta_1 - A_2 \sin\theta_2}{-A_1\cos\theta_1 + A_2\cos\theta_2} = \operatorname{tg}\delta_z \qquad (7-9)$$

$$\delta_y = \delta_z \qquad (7-10)$$

$$\varrho_y = \infty \qquad (7-11)$$

L'équation (4—11) se transforme en :

$$\boxed{2R_0G + 2X_0B = 1} \qquad (7-12)$$

Par conséquent la caractéristique du relais *Ym* dans le plan Y est une droite, normale à la direction caractérisée par l'angle $-\delta_y$ et située à une distance de $\frac{1}{2Z_0}$ de l'origine (fig. no. 4 b).

8* **Relais de conductance** : *G*

Ce relais peut être considéré comme un cas particulier du relais *Ym* pour lequel $X_0=0$, ou bien comme un cas particulier du relais *Rg* (*Gg*) pour lequel $C_1=C_2=C$, dans les deux hypothèses la condition qui résulte étant :

$$A_1 \sin\theta_1 = A_2 \sin\theta_2 \qquad (8-1)$$

De (7—2) à (7—6) on obtient dans ce cas :

$$R_0 = \frac{A_1C}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin\theta_2} \qquad (8-2)$$

$$X_0 = D = 0 \qquad (8-3)$$

$$\operatorname{tg}\delta_z = 0\,; \quad \delta_z = 0 \qquad (8-4)$$

$$\varrho_z = |R_0| = \left| \frac{A_1C}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin\theta_2} \right| \qquad (8-5)$$

La caractéristique du relais G dans le plan complèxe de l'impédance $\underline{Z}$ est un cercle ayant le centre sur l'axe réelle et passant par l'origine (fig. no. 5 a), d'equation (déduite de (7—7) avec (8—3) :

$$\boxed{R^2 + X^2 = 2 R_0 R} \qquad (8-6)$$

Les relations (7—8) et (7—11) restent valables, et (7—9) et (7—10) deviennent :

$$\operatorname{tg} \delta_y = 0 \qquad (8-7)$$

$$\delta_y = \delta_z = 0 \qquad (8-8)$$

Le caractéristique du relais G dans le plan $\underline{Y}$ est une droite vérticàle passant à une distance de $\frac{1}{2R}$ de l'origine (fig. no. 5 b). Son equation (provenue de (7—12) avec (8—3) est :

$$\boxed{G = \frac{1}{2R_0}} \qquad (8-9)$$

9* **Relais de susceptance :** B

Ce type de relais peut être considéré comme un cas particulier du relais Y_m pour lequel $R_0=0$, ou bien comme un cas particulier du relais $Xg(Bg)$ pour lequel $C_1=C_2=C$, dans les deux hypothèses la condition qui en résulte étant :

$$A_1 \cos \theta_1 = A_2 \cos \theta_2 \qquad (9-1)$$

De (7—2) à (7—6) on obtient dans ce cas :

$$R_0 = D = 0 \qquad (9-2)$$

$$X_0 = \frac{A_1 C}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \qquad (9-3)$$

$$\operatorname{tg} \delta_z = \pm \infty ; \quad \delta_z = \pm \frac{\pi}{2} \qquad (9-4)$$

$$\varrho_z = |X_0| = \left| \frac{A_1 C}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \right| \qquad (9-5)$$

La caractéristique du relais B dans le plan $\underline{Z}$ est un cercle ayant le centre sur l'axe imaginaire et passant par l'origine (fig. no 6 a) son equation (déduite de (7—7) avec (9—2) est :

$$\boxed{R^2 + X^2 = 2 X_0 X} \qquad (9-6)$$

Les relations (7—8) et (7—11) restent valables, et (7—9) ; (7—10) deviennent :

$$\operatorname{tg} \delta_y = \pm \infty \qquad (9-7)$$

$$\delta_y = \delta_z = \pm \frac{\pi}{2} \qquad (9-8)$$

La caractéristique du relais B dans le plan $\underline{Y}$ est une droite horizontale passant à une distance de $\frac{1}{2X_0}$ de l'origine fig. no. 6 b). Son équation, déduite de (7—12) avec (9—2) est :

$$\boxed{B = \frac{1}{2X_0}} \qquad (9-9)$$

10* **Relais d'impédance mixte :** Zm

Ce type de relais est un cas particulier du relais $Zg(Yg)$ pour lequel on a :

$$A_1 = A_2 = A \qquad (10-1)$$

Dans ce cas les relations (4—12) à (4—17) deviennent :

$$G_0 = \frac{A}{C_1^2 - C_2^2}(-C_1 \cos \theta_1 + C_2 \cos \theta_2) \qquad (10-2)$$

$$B_0 = \frac{A}{C_1^2 - C_2^2}(C \sin \theta_1 - C_2 \sin \theta_2) \qquad (10-3)$$

$$F = 0 \qquad (10-4)$$

$$\operatorname{tg} \delta_y = \frac{B_0}{G_0} = \frac{C_1 \sin \theta_1 - C_2 \sin \theta_2}{-C \cos \theta_1 + C_2 \cos \vartheta_2} \qquad (10-5)$$

$$\varrho_y = \sqrt{F + G_0^2 + B_0^2} = \frac{A\sqrt{C^2 + C^2 - 2C_1C_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}}{|C_1^2 - C_2^2|} \qquad (10-6)$$

La caractéristique du relais Zm dans le plan complèxe $\underline{Y}$ est un cercle ayant le centre déplacé vis-à-vis de l'origine et passant par celle-ci (fig. no. 7 b), d'équation déduite de (4—11) avec (10—4) :

$$\boxed{G^2 + B^2 = 2G_0G + 2B_0B} \qquad (10-7)$$

Les relations (4—4) à (4—8) deviennent :

$$R_0 = X_0 = D = \pm\infty \qquad (10-8)$$

$$\operatorname{tg}\delta_z = \frac{X_0}{R_0} = \frac{C_1 \sin\theta_1 - C_2 \sin\theta_2}{-C_1\cos\theta_1 + C_2\cos\theta_2} = \operatorname{tg}\delta_y \qquad (10-9)$$

$$\delta_z = \delta_y \qquad (10-10)$$

$$\varrho_z = \infty \qquad (10-11)$$

L'équation (4—3) se transforme en :

$$\boxed{2G_0R + 2B_0X = 1} \qquad (10-12)$$

Par conséquent, la caractéristique du relais Zm dans le plan $\underline{Z}$ est une droite, normale à la direction caracterisée par l'angle δ_z et située a une distance de $\frac{1}{2X_0}$ de l'origine (fig. no. 7 a).

11* **Relais de résistance :** R

Ce relais peut être considéré soit comme un cas particulier du relais Z pour lequel $B_0=0$, soit comme un cas particulier du relais $Rg(Gg)$ pour lequel $A_1=A_2=0$ en arrivant par les deux chemins à la condition.

$$C_1 \sin\vartheta_1 = C_2 \sin\theta_2 \qquad (11-1)$$

De (10—2) à (10—6) il résulte dans ce cas :

$$G_0 = \frac{AC_1}{C_1^2 - C_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin\theta_2} \qquad (11-2)$$

$$B_0 = F = 0 \qquad (11-3)$$

$$\operatorname{tg}\delta_y = 0\,; \qquad \delta_y = 0 \qquad (11-4)$$

$$\varrho_y = |G_0| = \left| \frac{AC_1}{C_1^2 - C_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin\theta_2} \right| \qquad (11-5)$$

La caractéristique du relais R dans le plan $\underline{Y}$ est un cercle ayant le centre sur l'axe réelle et passant par l'origine (fig. no. 8 b), son équation, déduite de (10—7) avec (11—3), étant :

$$\boxed{G^2 + B^2 = 2G_0G} \qquad (11-6)$$

Les relations (10—8) et (10—11) restent valables et (10—9), (10—10), deviennent :

$$\operatorname{tg} \delta_z = 0 \qquad (11-7)$$

$$\delta_z = \delta_y = 0 \qquad (11-8)$$

La caractéristique du relais R dans le plan $\underline{Z}$ est une droite verticale passant à une distance de $\frac{1}{2G_0}$ de l'origine (fig. no. 8 a). Son équation provenue de (10—12) avec (11—3) est :

$$\boxed{R = \frac{1}{2G_0}} \qquad (11-9)$$

12* **Relais de réactance :** X

Ce relais peut être considéré soit comme un cas particulier du relais Z_m pour lequel $G_0=0$, soit comme un cas particulier du relais $X_g(B_g)$ pour lequel $A_1=A_2=A$, des deux manières arrivant à la même condition.

$$C_1 \cos \theta_1 = C_2 \cos \theta_2 \qquad (12-1)$$

De (10—2) à (10—6) on obtient dans ce cas :

$$G_0 = F = 0 \qquad (12-2)$$

$$B_0 = \frac{AC_1}{C_1^2 - C_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \qquad (12-3)$$

$$\operatorname{tg} \delta_y = \pm \infty ; \qquad \delta_y = \pm \frac{\pi}{2} \qquad (12-4)$$

$$\varrho_y = |B_0| = \left| \frac{AC_1}{C_1^2 - C_2^2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \right| \qquad (12-5)$$

La caractéristique du relais X dans le plan $\underline{Y}$ est un cercle ayant le centre sur l'axe imaginaire et passant par l'origine (fig. no. 9 b) son équation, — déduite de (10—7) avec (12—2) étant :

$$\boxed{G^2 + B^2 = 2B_0 B} \qquad (12-6)$$

Les relations (10—8) et (10—11) demeurent valables, tandis que (10—9) et (10—10) deviennent :

$$\operatorname{tg} \delta_z = \pm \infty \qquad (12-7)$$

$$\delta_z = \delta_y = \pm \frac{\pi}{2} \qquad (12-8)$$

La caractéristique du relais de réactance dans le plan $\underline{Z}$ est une droite horizontale passant à une distance de $\frac{1}{2B_0}$ de l'origine (fig. no. 9 a). Son équation, provenue de (10—12) avec (12—2) est :

$$\boxed{X = \frac{1}{2B_0}} \qquad (12-9)$$

13* **Relais directionnel de puissance mixte :** S_m

Un pareil relais peut s'obtenir :

a) soit en particularisant le relais $Z_g(X_g)$ de telle manière que $D=F=0$.

b) soit en particularisant le relais Y_m pour que $F=0$.

c) soit en particularisant le relais Z_m pour que $D=0$.

Par toutes ces voies on arrive aux conditions :

$$A_1 = A_2 = A \qquad (13-1)$$

et

$$C_1 = C_2 = C \qquad (13-2)$$

De (4—4) à (4—8) et (4—12) à (4—17) avec (13—1) et (13—2) il résulte :

$$R_0 = X_0 = G_0 = B_0 = \pm\infty \qquad (13-3)$$

$$\varrho_z = \varrho_y = \infty \qquad (13-4)$$

$$\operatorname{tg}\delta_z = \frac{-\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{\sin\theta_1 - \sin\theta_2} = \operatorname{tg}\delta_y \qquad (13-5)$$

$$\delta_z = (2K+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \delta_y \qquad (15-6)$$

Les équations (4—3) et (4—11) deviennent :

$$\boxed{(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)R + (-\sin\theta_1 + \sin\theta_2)X = 0} \qquad (13-7)$$

et

$$\boxed{(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)G + (-\sin\theta_1 + \theta_2)B = 0} \qquad (13-8)$$

Ainsi donc, la caractéristique du relais directionnel est tant dans le plan $\underline{Z}$ que dans le plan $\underline{Y}$ une droite passant par l'origine et normale à la direction caractérisée par l'angle δ_z respectivement $-\delta_y = -\delta_z$.

14* **Relais directionnel de puissance active :** P

Ce type de relais peut être obtenu :

a) soit d'un relais $Rg(Gg)$ pour lequel $D=F=0$
b) soit d'un relais G pour lequel $F=0$
c) soit d'un relais R pour lequel $D=0$.

De toute façon on arrive aux conditions :

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \qquad (14-1)$$

et

$$\cos \theta_1 \neq \cos \theta_2, \qquad (14-2)$$

donc ensemble :

$$\theta_1 + \theta_2 = (2K+1)\pi \qquad (14-3)$$

A part cela, les conditions (13—1) et (13—2) maintiennent leur valabilité.

Il s'ensuit qu'en plus de (13—3) et (13—4) on a de (13—5) et (13—6) aussi :

$$\operatorname{tg} \delta_z = \operatorname{tg} \delta_y = 0 \qquad (14-4)$$

$$\delta_z = \delta_y = 0 \qquad (14-5)$$

Il résulte donc que tant dans le plan $\underline{Z}$ que dans le plan $\underline{Y}$ le relais directionnel P est représenté par l'axe imaginaire.

15* **Relais directionnel de puissance réactive :** Q

Ce type de relais peut être obtenu :

a) soit d'un relais $Xg(Bg)$ ainsi que $D=F=0$
b) soit d'un relais B ainsi que $F=0$
c) soit d'un relais X ainsi que $D=0$.

En tout cas, on arrive aux conditions :

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 \qquad (15-1$$

et

$$\sin \theta_1 \neq \sin \theta_2 \qquad (15-1)$$

donc ensemble :

$$\theta_1 + \theta_2 = 2K\pi \qquad (15-3)$$

A part cela, les conditions (13—1) et (13—2) restent valables.

Il résulte qu'en plus de (13—3) et (13—4) on a de (13—5) et (13—6) aussi :

$$\operatorname{tg} \delta_z = \operatorname{tg} \delta_y = \pm \infty \qquad (15-4)$$

$$\delta_z = \delta_y = \pm \frac{\pi}{2} \qquad (15-5)$$

Les équations (13—7) et (13—8) deviennent :

$$\boxed{X=0} \qquad (15-6)$$

et

$$\boxed{B=0} \qquad (15-7)$$

Il résulte donc que tant dans le plan $\underline{Z}$ que dans le plan $\underline{Y}$ le relais directionnel Q est representé par l'axe réel.

16* **Relais d'impédance (admittance) : $Z\ (Y)$**

Ce type de relais s'obtient lui aussi du relais $Zg(Yg)$ pour lequel on à $Z_0=O$ et $Y_0=O$.

Dans ce cas îl faut que :

$$R_0=X_0=G_0=B_0=0, \qquad (16-1)$$

c'est-à-dire de (4—4), (4—5), (4—12) et (4—13) :

$$A_1C_1\cos\theta_1=A_2C_2\cos\theta_2 \qquad (16-2)$$

et

$$A_1C_1\sin\theta_1=A_2C_2\sin\theta_2 \qquad (16-3)$$

Par conséquent il résulte comme necessaire que :

$$A_1C_1=A_2C_2 \qquad (16-4)$$

et

$$\theta_2=\theta_1+2K\pi \qquad (16-5)$$

(4—6) et (4—14) deviennent :

$$D=\frac{C_2^2}{A_1^2}=\frac{C_1^2}{A_2^2} \qquad (16-6)$$

$$F=\frac{A_1^2}{C_2^2}=\frac{A_2^2}{C_1^2}=\frac{1}{D} \qquad (16-7)$$

De (4—8) et (4—17) on obtient :

$$\varrho_z=\sqrt{D}=\frac{C_2}{A_1}=\frac{C_1}{A_1} \qquad (18-8)$$

et

$$\varrho_y=\sqrt{F}=\frac{A_1}{C_2}=\frac{A_2}{C_1} \qquad (16-9)$$

De (4—18) il résulte :

$$\frac{\varrho_z}{\varrho_y}=\sqrt{\frac{D}{F}}=D=\frac{1}{F}=\frac{C_2^2}{A_1^2}=\frac{C_1^2}{A_2^2} \qquad (16-10)$$

Les équations (4—3) et (4—11) deviennent :

$$\boxed{R^2+X^2=\frac{C_2^2}{A_1^2}} \qquad (16-11)$$

et

$$\boxed{G^2+B^2=\frac{A_1^2}{C_2^2}} \qquad (16-12)$$

On constate que le relais $Z(Y)$ a une caractéristique circulaire ayant le centre dans l'origine tant dans le plan $\underline{Z}$ que dans le plan $\underline{Y}$.

17* Aperçu général des résultats obtenus de l'analyse des caractéristiques des relais effectuée selon le principe de la balance

De l'analyse effectuée au ch. 4* à 16* il apparait que tous les types de relais étudiés dérivent du relais d'impédance (admittance) généralisée $Zg(Yg)$, dont l'équation est donnée sous (4—1).

Cette équation (4—1) dépend de 8 paramètres (A_1 A_2, C_1 C_2, α_1 α_2, γ_1 γ_2), respectivement 6 paramètres (A_1, A_2, C_1, C_2, θ_1, θ_2). De tous ces paramètres 5 — respectivement 3 — peuvent être choisis d'une façon arbitraire, le reste de 3 paramètres étant ceux qui déterminent la caractéristique de fonctionnement du relais. Cette éléction arbitraire est tout-de-même limitée de manière qu'aucune des conditions (5—1), (6—1) ou (10—1) ne soit satisfaite pour que le relais $Zg(Yg)$ ne dégénère pas dans un des autre types de relais. Dans le tableau no. 2 sont exposées le nombre de conditions et les conditions mêmes qui doivent être respectées par les paramètres pour obtenir chacun des 12 types de relais particularisés. Il résulte encore du même tableau le fait que ces conditions restreignent le nombre des paramètres déterminants, c'est-à-dire des paramètres qui fixent les données géometriques de la caractéristique, le type du relais étant établi par les conditions spécifiquez à ce type.

Afin de réaliser une certaine caractéristique dans le plan $\underline{Z}$ ou le plan $\underline{Y}$ pour un relais d'un type donné on doit procédér de la manière suivante :

a) on établit de façon arbitraire les valeurs de 5, — respectivement 3, — paramètres non déterminants.

b) on introduit les valeurs de ceux-ci dans les équations (4—4) ; (4 — 5) ; (4 — 8) ou (4 — 12) ; (4 — 13) ; (4 — 17), respectivement leurs transformées pour le type de relais considéré (ces transformées tiennent compte des conditions supplémentaires spécifiques au type de relais donné, conformément à la colonne du tableau no. 2).

c) on résolve le système d'équations ainsi obtenu, en déduisant les valeurs nécessaires des paramètres déterminants pour la caractéristique recquise du relais.

TABLEAU No. 2

No.	Type de relais	Nombre total des paramètres	Nombre des paramètres arbitraires nondéterminants	Nombre et expression des conditions supplémentaires nécessaires	Nombre des paramètres déterminants pour la caractéristique de relais
1	Relais d'impédance (admittance) généralisée	6	3	0	3
2	Relais de résistance (conductance) généralisée	6	3	1 $(6-1)A_1C_1 \sin\theta_1 = A_2C_2 \sin\theta_2$	2
3	Relais de réactance (susceptance) généralisée	6	3	1 $(6-1)A_1C_1 \cos\theta_1 = A_2C_2 \cos\theta_2$	2
4	Relais d'admittance mixte	6	3	1 $(7-1)\ C_1 = C_2 = C$	2
5	Relais de conductance	6	3	2 (5—1) et (7—1)	1
6	Relais de susceptance	6	3	2 (6—1) et (7—1)	1
7	Relais d'impédance mixte	6	3	1 $(10-1)A_1 = A_2 = A$	2
8	Relais de résistance	6	3	2 (5—1) et (10—1)	1
9	Relais de réactance	6	3	2 (6—1) et (10—1)	1
10	Relais directionnel (de puissance mixte)	6	3	2 (7—1) et (10—1)	1
11	Relais directionnel de puissance active (Wattmétrique)	6	3	3 (5—1) ; (7—1) ; (10—1)	0
12	Relais directionnel de puissance réactive (Varmétrique)	6	3	3 (6—1) ; (7—1) ; (10—1)	0
13	Relais d'impédance (admittance)	6	3	2 (5—1) et (6—1)	1

Le problème pratique qui se pose est de savoir ce que doit comparer la balance dans le cas de chaque type de relais. A ce but on analysera dans ce qui suit la forme que prend l'équation (4—1) pour chacun des différents types de relais et on donnera l'interprétation des résultats obtenus.

17.1. *Relais d'impédance (admittance) généralisée : Zg(Yg)*

On peut démontrer facilement que l'équation (4—1) peut être mise sous une des deux formes suivantes :

$$|m\underline{U}+\underline{Z'}\underline{I}| = |\underline{U}=\underline{Z''}\underline{I}| \qquad (17-1_1)$$

$$|\underline{Y'}\underline{U}+n\underline{I}|=|\underline{Y''}\underline{U}+\underline{I}| \qquad (17-1_2)$$

L'interpretation de ces équations permet de tirer la conclusion que le relais $Zg(Yg)$ peut être obtenu :

a) soit en comparant la somme d'un multiple de la tension U et de la chute de tension produite par le passage du courant I, par une impédance donnée $\underline{Z'}$, à la somme de la tension U et de la chute de tension provoquée par le passage du courant I dans une autre impédance donnée $\underline{Z''}$;

b) soit en comparant la somme d'un multiple du courant I et du courant produit par la tension U appliquée à une admittance donnée $\underline{Y'}$, à la somme du courant I et d'un courant produit par la tension U appliquée à une autre admittance donnée $\underline{Y''}$.

Des paramètres m, R', R'', X', X'' (ou n, G', G'', B', B'') seulement trois d'entre eux sont detérminants pour la caractérique du relais, conformément à ce qui a été montré dans le tableau no. 2.

17.2. *Relais de résistance (conductance) généralisée : Rg(Gg)*

L'équation du relais est :

$$|m\underline{U}+R'\underline{I}|=|\underline{U}+R''\underline{I}| \qquad (17-2_1)$$

ou

$$|G'\underline{U}+n\underline{I}|=G''\underline{U}+\underline{I}| \qquad (17-2_2)$$

Par rapport au cas précédent les impédances $\underline{Z'}$ et $\underline{Z''}$ (resp. les admittances $\underline{Y'}$ et $\underline{Y''}$), se réduisent à des simples resistances (resp. conductances).

Des paramètres m, R', R'' — resp. n, G', G'', deux seulement sont détérminants.

17.3. *Relais de réactance (susceptance) généralisée : Xg(Bg)*

L'équation du relais est :

$$|m\underline{U}+jX'\underline{I}|=|\underline{U}+jX''\underline{I}| \qquad (17-3_1)$$

ou

$$|jB'\underline{U}+n\underline{I}|=|jB''\underline{U}+\underline{I}| \qquad (17-3_2)$$

Par rapport au cas décrit sous 17.1, les impédances $\underline{Z}'$ et $\underline{Z}''$ (resp. les admittances $\underline{Y}'$ et $\underline{Y}''$), sont des simples réactances (resp. susceptances).

Des paramètres $m\ X'$ et X'' — resp. n, B', B'' — deux seulement sont déterminants.

17.4. *Relais d'admittance mixte :* Y_m

L'équation du relais est :

$$|\underline{Y}'\underline{U}+\underline{I}| = |\underline{Y}''\underline{U}+\underline{I}| \qquad (17-4)$$

Ce type de relais (Y_m) s'obtient en comparant les sommes du courant $\underline{I}$ et des courants produits par la tension $\underline{U}$ à travers deux admittances $\underline{Y}'$ et $\underline{Y}''$ données.

Deux seulement des paramètres G', G'', B', B'' sont déterminants.

17.5. *Relais de conductance :* G.

L'équation du relais est :

$$|G'\underline{U}+\underline{I}|=|G''\underline{U}+\underline{I}| \qquad (15-5)$$

Par rapport au relais Y_m les admittances $\underline{Y}'$ et $\underline{Y}''$ se réduisent à des simples conductances.

Le paramètre déterminant unique est la somme $G'+G''$.

17.6. *Relais de susceptance :* B.

L'équation du relais est :

$$|jB'\underline{U}+\underline{I}|=|jB''\underline{U}+\underline{I}| \qquad (17-6)$$

Par rapport au relais Y_m les admittances $\underline{Y}'$ et $\underline{Y}''$ sont de simples susceptances.

Le paramètre déterminant unique est la somme $B'+B''$.

17.7. *Relais d'impédance mixte :* Z_m

L'équation du relais est :

$$|\underline{U}+\underline{Z}'\underline{I}|=|\underline{U}+\underline{Z}''\underline{I}| \qquad (17-7)$$

Ce type de relais (Z_m) s'obtient en comparant les résultats obtenus de la sommation de la tension $\underline{U}$ et des chutes de tension produites par le passage du courant $\underline{I}$ dans des impédances $\underline{Z}'$, — respectivement $\underline{Z}''$, données.

Deux seulement des paramètres R', R'', X', X'' sont déterminants.

17.8. *Relais de résistance : R*

L'équation du relais est :

$$|\underline{U}+R'\underline{I}|=|\underline{U}+R''\underline{I}| \qquad (17-8)$$

Par rapport au relais Z_m les impédances $\underline{Z}'$ et $\underline{Z}''$ se réduisent à des simples résistances.

Le paramètre unique détérminant est la somme $R'+R''$.

17.9. *Relais de réactance : X.*

L'équation du relais est :

$$|\underline{U}+jX'\underline{I}|=|\underline{U}+jX''\underline{I}| \qquad (17-9)$$

Par rapport au relais Z_m les impédances $\underline{Z}'$ et $\underline{Z}''$ se réduisent à des simples réactances.

Le paramètre détérminant unique est la somme $X'+X''$.

17.10. *Relais directionnel de puissance mixte : S_m*

L'équation du relais est :

$$|\underline{U}+Z'\underline{|-\theta_1}\,\underline{I}|=|\underline{U}\,Z'\underline{|-\theta_2}\,\underline{I}| \qquad (17-10_1)$$

ou

$$|Y'\underline{|\theta_1}\,\underline{U}+\underline{I}|=Y''\underline{|\theta_2}\,\underline{U}+\underline{I}| \qquad (17-10_2)$$

Le principe du relais directionnel S_m est donc un des suivants :

a) soit celui du relais Ym (17—4) pour lequel les deux admittances ont la même valeur Y', mais des angles intérieurs différents θ_1 et θ_2 ;

b) soit celui du relais Z_m (17—7) pour lequel les deux impédances ont la même valeur Z', mais des angles intérieurs différents θ_1 et θ_2.

La valeur de Y' (ou de Z') n'a pas d'importance pour la caractéristique du relais (Y' et Z' ne sont pas de vrais paramètres), et des paramètres θ_1 et θ_2 se forme le paramètre détérminant unique :

17.11. *Relais directionnel de puissance active : P.*

L'équation du relais est :

$$|\underline{U}+R'\underline{I}|=|\underline{U}-R'\underline{I}| \qquad (17-11_1)$$

ou

$$|\underline{I}+G'\underline{U}|=|\underline{I}-G'\underline{U}| \qquad (17-11_2)$$

Ce type de relais (P) peut être obtenu :

a) soit en comparant la somme et la différence de la tension $\underline{U}$ et de la chute de tension provoquée par le passage du courant $\underline{I}$ dans une résistance quelconque R.

b) soit en comparant la somme et la différence du courant $\underline{I}$ et du courant produit par la tension $\underline{U}$ à travers une conductance quelconque G'.

La valeur de R', ou de G', est dénuée d'importance pour la caractéristique du relais (R' et G' ne sont pas de vrais paramètres), donc il n'existe aucun paramètre déterminant.

17.12. *Relais directionnel de puissance réactive : Q.*

L'équation du relais est :

$$|\underline{U}+jX'\underline{I}|=|\underline{U}-jX'\underline{I}| \qquad (17-12_1)$$

ou

$$|\underline{I}+jB'\underline{U}|=|\underline{I}-jB'\underline{U}| \qquad (17-12_2)$$

Le principe du relais (Q) est un des deux principes analogues à ceux décrits pour le relais (P) à la différence qu'au lieu resistance R' (ou conductance G') on à une réactance X' (ou une susceptance B') quelçonques. Dans ce cas non plus il n'existe pas de paramètres déterminants.

17.13. *Relais d'impédance (admittance) : Z(Y).*

Les équations les plus générales de ce relais sont :

$$|m\underline{U}+\underline{Z'}\underline{I}|=|\underline{U}+m\underline{Z'}\underline{I}| \qquad (17-13_1)$$

ou

$$|n\underline{I}+\underline{Y'}\underline{U}|=|n\underline{Y'}\underline{U}+\underline{I}| \qquad (17-13_2)$$

De l'aspect de ces équations il découle qu'un relais d'impédance (admittance) $Z(Y)$ peut être réalisé suivant le principe du relais d'impédance (admittance) généralisée $Zg(Yg)$, en faisant l'impédance $\underline{Z''}$ m fois plus grande que l'impédance $\underline{Z'}$ et ayant le même angle intérieur de déphasage ; respectivement en faisant l'admittance $\underline{Y''}$ n fois plus grande que l'admittance $\underline{Y'}$ et ayant le même angle intérieur de déphasage.

On constate facilement que dans ce cas les facteurs m et n ne sont pas de vrais paramètres. En faisant $m=0$ ou $m=\infty$ dans l'équation ($17—13_1$), respectivement $n=0$ ou $n=\infty$ dans l'équation ($17—13_2$), on obtient les équations simplifiées du relais d'impédance (admittance) $Z(Y)$:

$$|\underline{U}|=|\underline{Z'}\underline{I}| \qquad (17-13_3)$$

ou

$$|\underline{I}|=|\underline{Y'}\underline{U}| \qquad (17-13_4)$$

De ces équations dérivent les principes classiques du relais $Z(Y)$:

— soit la comparaison de la tension U et de la chute de tension provoquée par le passage du courant I dans une impédance Z' ;

— soit la comparaison du courant I et du courant résulté de l'application de la tension U à une admittance Y'.

Le paramètre déterminant unique est la valeur (module) de l'impédance Z' (ou de l'admittance Y') leur angle de déphasage intérieur étant sans importance (n'étant pas un paramètre proprement dit).

18* L'analyse du fonctionnement des différents types de relais par l'équation des couples

On a déjà mentionné au ch. 3-ème que pour les relais de distance et directionnels réalisés suivant le principe de l'induction ou celui électrodynamique l'analyse doit être effectuée par l'équation des couples.

De l'èxamen de l'équation (4—1) du relais Zg (Yg) on constate facilement qu'elle peut être mise sous une autre forme, notamment :

$$K_1U^2 + K_2I^2 + K_3UI\cos\varphi + K_4UI\sin\varphi = 0 \qquad (18-1)$$

où

$$K_1 = A_1^2 - A_2^2 \qquad (18-2)$$

$$K_2 = C_1^2 - C_2^2 \qquad (18-3)$$

$$K_3 = 2(A_1C_1\cos\theta_1 - A_2C_2\cos\theta_2) \qquad (18-4)$$

$$K_4 = 2(-A_1C_1\sin\theta_1 + A_2C_2\sin\theta_2) \qquad (18-5)$$

De cette équation (18—1) on voit que le relais d'impédance (admitannce) généralisée $\underline{Zg}$ ($\underline{Yg}$) peut être obtenu par la sommation de 4 couples :

— un couple proportionnel au carré de la tension U,

— un couple proportionnel au carré du courant I,

— un couple proportionnel à la puissance active P,

— un couple proportionnel à la puissance réactive Q (d'ailleurs les deux derniers couples peuvent être combinés dans un couple unique proportionnel à la puissance mixte, — combinaison linéaire de la puissance active et de celle réactive : $\underline{S}_m = K_3P + K_4Q$.

La caractéristique du relais dépend donc de 4 paramètres, un desquels peut être choisi d'une façon arbitraire tandis que les trois autres sont detérminants ; cette conclusion confirme celle qui a été trouvée au ch. 17* par la première méthode d'analyse.

Au tableau no. 3 on montre quelles sont les conditions particularisantes et l'équation des couples pour chaque type des relais considérés. On peut constater la correspondance parfaite qui existe entre les tableaux no. 2 et no. 3, respectivement entre les résultats de l'analyse efectuée par les deux méthodes.

TABLEAU No. 3

No.	Type du relais	Nombre total des paramètres	Nombre des paramètres arbitraires	Nombre et expressions des conditions qui doivent être replies par les paramètres	Nombre des paramètres déterminants	L'aquation des couples
1	Relais d'impédance (admittance) généralisée	4	1	0	3	$K_1 U^2 + K_2 I^2 + K_3 P + K_4 Q = 0$
2	Relais de résistance (conductance) généralisée	4	1	1 $K_4 = 0$	2	$K_1 U^2 + K_2 I^2 + K_3 P = 0$
3	Relais de réactance (susceptance) généralisée	4	1	1 $K_3 = 0$	2	$K_1 U^2 + K_2 I^2 + K_4 Q = 0$
4	Relais d'admittance mixte	4	1	1 $K_2 = 0$	2	$K_1 U^2 + K_3 P + K_4 Q = 0$
5	Relais de conductance	4	1	2 $K_2 = K_4 = 0$	1	$K_1 U^2 + K_3 P = 0$
6	Relais de susceptance	4	1	2 $K_2 = K_3 = 0$	1	$K_1 U^2 + K_4 Q = 0$
7	Relais d'impédance mixte	4	1	1 $K_1 = 0$	2	$K_2 I^2 + K_3 P + K_4 Q = 0$ $K_2 I^2 + K_3 P = 0$
8	Relais de résistance	4	1	2 $K_1 = K_4 = 0$	1	
9	Relais de réactance	4	1	2 $K_1 = K_3 = 0$	1	$K_2 I^2 + K_4 Q = 0$
10	Relais directionnel (de puissance mixte)	4	1	2	1	$K_3 P + K_4 Q = 0$ ou $S_m = 0$
11	Relais directionnel de puissance active (Wattmétrique)	4	1	3 $K_1 = K_2 = K_4 = 0$	0	$P = 0$
12	Relais directionnel de puissance réactive (Varmétrique)	4	1	1 $K_1 = K_2 = K_3 = 0$	0	$Q = 0$
13	Relais d'impédance (admittance)	4	1	2	1	$K_1 U^2 + K_2 I^2 = 0$

19* Conclusions

Le but du présent ouvrage a été de présenter d'une façon unitaire et complète les relais de distance et directionnels ayant une courbe caractéristique linéaire ou circulaire dans le plan complèxe des impédances $\underline{Z}$ ou dans celui des admittances $\underline{Y}$.

Tous ces relais sont caractérisés soit par une équation du type:

$$M = C^{te} \qquad (19 - 1)$$

soit par une équation du type :

$$M = 0 \qquad (19-2)$$

où M est une grandeur électrique qui dépend de la tension $\underline{U}$ et du courant $\underline{I}$ appliqués au relais.

De la première catégorie font part :

— le relais d'impédance (admittance) pour lequel :

$$M = Z = \frac{U}{I} \text{ ou } M = Y = \frac{I}{U}$$

— le relais de résistance pour lequel :

$$M = R = \frac{U}{I} \cos \varphi$$

— le relais de réactance pour lequel :

$$M = X = \frac{U}{I} \cos \varphi$$

— le relais d'impédance mixte pour lequel :

$$M = Z_m = K_1 R + K_2 X$$

— le relais de conductance pour lequel :

$$M = G = \frac{I}{U} \cos \varphi$$

— le relais de susceptance pour lequel :

$$M = B = \frac{I}{U} \sin \varphi$$

— le relais d'admittance mixte pour lequel :

$$M = Y_m = K_1 G + K_2 B$$

Le nom de tous ces relais est celui de la grandeur qui est maintenue constante conformément à leur équation caractéristique qui délimite les deux régions du plan Z ou Y dans lesquelles l'action du relais est différente : déclenchement ou blocage.

Nous considérons que ce mode de les dénommer est préférable à d'autres usances. Ainsi le système de dénommer le relais conformément aux propriétés géometriques de la caractéristique, nécessité une précision de plus : notamment le plan (Z ou Y) dans lequel est considérée la caractéristique.

Par exemple, le relais à caractéristique circulaire passant par l'origine peut-être tout aussi bien le relais d'admittance mixte (Y_m) que le relais d'impédance mixte (Z_m) suivant que l'on considère le plan des impédances ou celui des admittances.

Il nous semble de même que la pratique américaine de nommer les relais d'impédance mixte ou d'admittance mixte suivant le nom des unités de mesure de l'impédance ou de l'admittance (relais du type „Ohm" ou „Mho") est impropre.

Nous considérons toutefois qu'il est indispensable d'ajouter le mot „mixte" pour les relais du type Z_m et Y_m. Souvent les relais d'admittance mixte (Y_m) sont nommés relais d'admittance, par opposition aux relais d'impédance : Z (Y). Cette nomenclature manque de justification d'autant plus qu'un relais d'impédance (Z) est toutefois un relais d'admittance (Y) (Y) ($Si\ Z = \text{Cte}$; $Y = \text{Cte}$ aussi).

Les relais de la deuxième catégorie (qui satisfont l'équation (19—2) sont les relais directionnels.

Pour le relais directionnel du type général (S_m) la grandeur M est l'admittance mixte ($M = Y_m$) ou l'impédance mixte ($M = Z_m$). Mais étant donné que $M = 0$ on peut écrire aussi $S_m = 0$ par multiplication avec I^2 ou U^2 des équations $Z_m = 0$ ou $Y_m = 0$.

Ces relais (S_m) font donc une discrimination entre les cas pour lesquels le signe (et donc aussi le sens vis-à-vis un certain sens choisi arbitrairement comme positif, notamment celui des barres en dehors) de la puissance mixte S_m est positif ou negatif. De là provient le nom de „directionnel" qui, de notre avis doit être complété par les mots „de puissance mixte" pour avoir une signification complète.

L'une manière analogue, nous considérons comme propice les noms de „relais directionnels de puissance active (réactive)" pour les relais caractérisés par $M = G = 0$ ou $M = R = 0$ (donc aussi $M = P = 0$), respectivement $M = B = 0$ ou $M = X = 0$ (donc aussi $M = Q = 0$). Les noms de relais „Wattmétriques" et „Varmétriques" ne sont pas cohérents au mode de présentation utilisé dans cet ouvrage et à la nomenclature proposée.

Tous ces relais enumérés plus haut proviennent de la particularisation des relais nommés dans cet ouvrage relais généralisés ; caractérisés par des cercles déplacés vis-à-vis de l'origine tant dans le plan $\underline{Z}$ que dans le plan $\underline{Y}$.

La nomenclature proposée se prête facilement à une utilisation dans toutes les langues de large circulation technique.

En plus, on peut utiliser aussi des symboles pour les types de relais étudiés qui eux-aussi pourraient être adoptés comme language téchniques international (voir colonne no. 3 au tableau no. 1).

BIBLIOGRAPHIE

(1) *G. I. ATABEKOV* — Teoreticeschie osnovî releinoi zaşcitî vîsokovoltnîh setei-Gosenergoizdat 1957.

(2) *A. R. van WARRINGTON* — Application of the Ohm and Mho Principles to Protective Relays — El. Eng. no. 6, 1946.

(3) *H. NEUGEBAUER* — Selektivschutz — 1958.

ЕДИНЫЙ МЕТОД ТРАКТОВКИ ДИСТАНЦИОННЫХ И НАПРАВЛЕННЫХ РЕЛЕ

(Краткое содержание)

Представлен единый метод трактовки реле, имеющих линейную или круговую характеристику в комплексной плоскости полнои сопротивления или полнои проводимости.

A UNITARY METHOD OF PRESENTING THE DIRECTIONAL AND DISTANCE RELAYS

(Summary)

A unitary method is elaborated of discussing the protection relays that have a linear or circular characteristic in the complex plane of impedance or admittance. Starting from the so called „relay of generalized impedance (admittance)", the author states that all the directional or distance relays can be considered as deriving from it. An analysis is made both by the method of the equation of the balance and by that of the resulting torque equation.

A nomenclature is suggested in order to clear up the problems related to distance relays and to avoid any possible confusion.

UNE MÉTHODE UNITAIRE DE PRÉSENTER LES RELAIS DE DISTANCE ET DIRECTIONNELS

(Résumé)

L'auteur présente une méthode unitaire de traitement des relais à caractéristique linéaire ou circulaire dans le plan complexe de l'impédance ou de l'admittance. Il montre que l'on peut considérer que tous les relais de distance et directionnels dérivent du relais „d'impédance (d'admittance) généralisée". L'analyse est faite tant par la méthode qui correspond au principe comparatif de la balance que par celle du couple résultant.

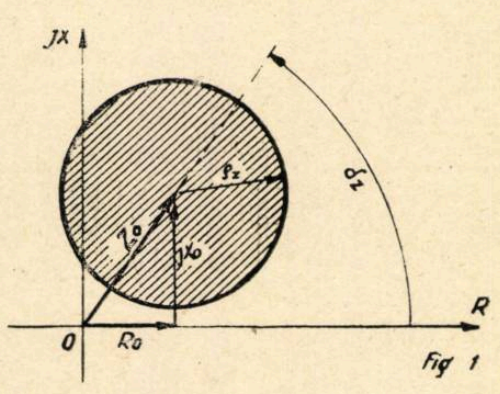
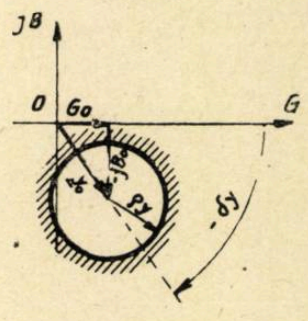
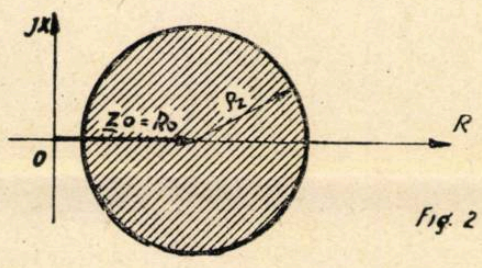
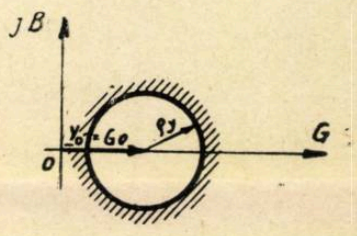
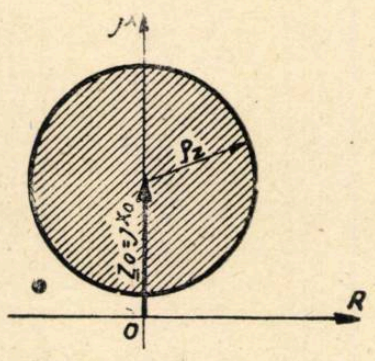
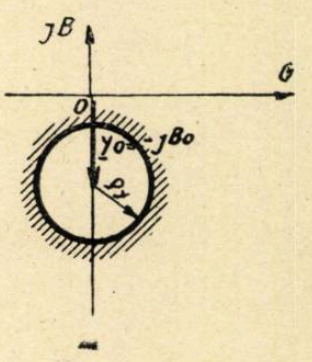
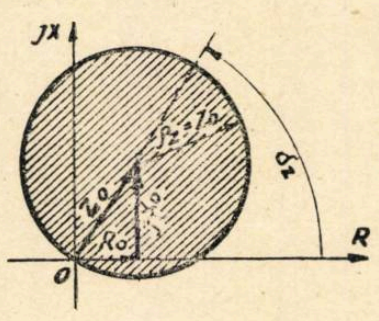
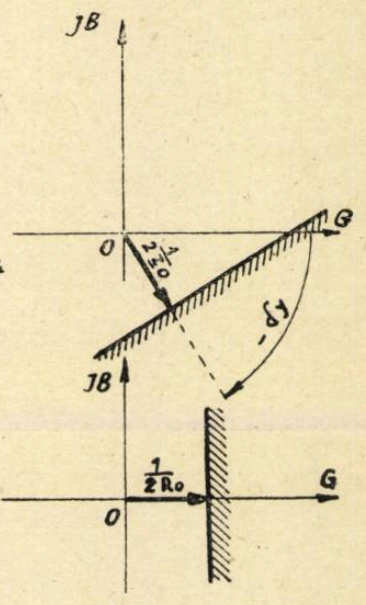
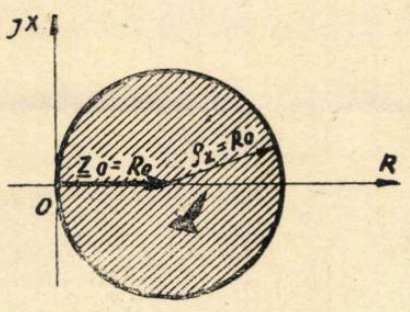
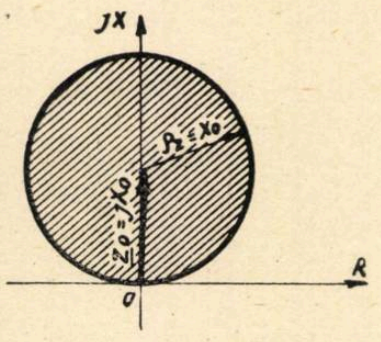
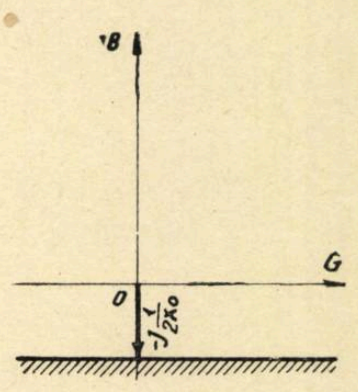
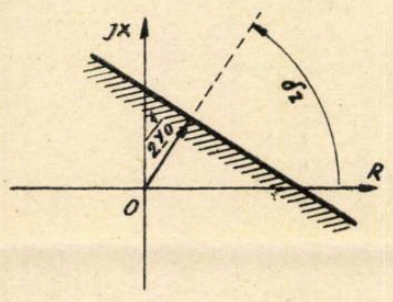
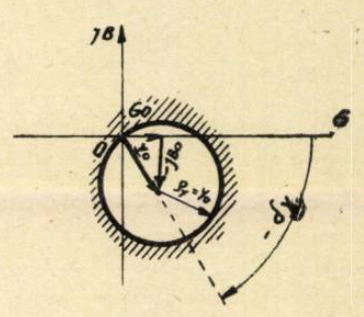
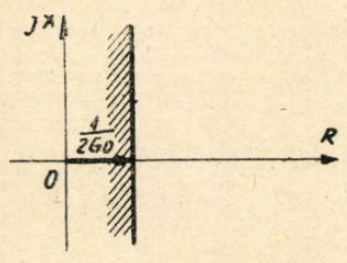
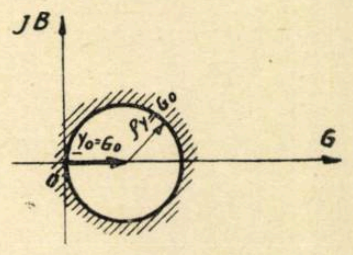
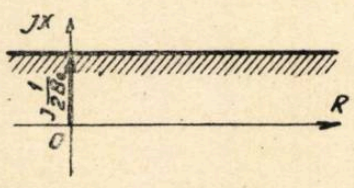
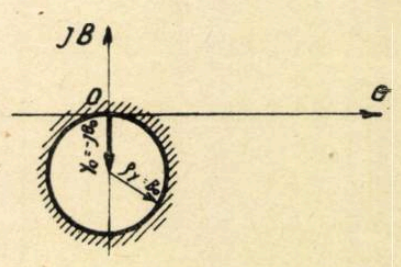
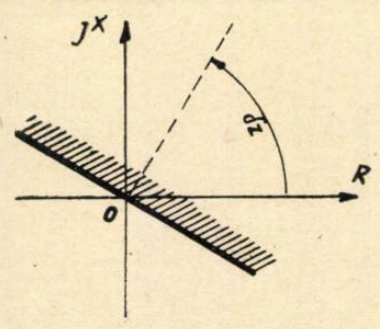
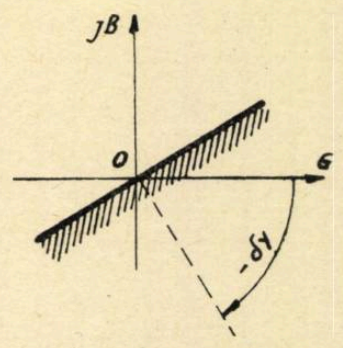
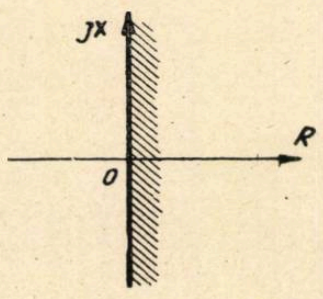
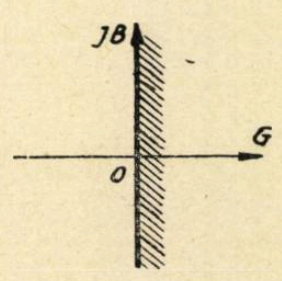
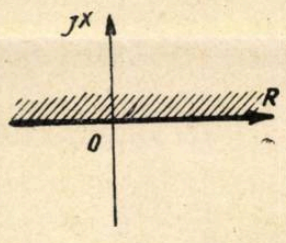
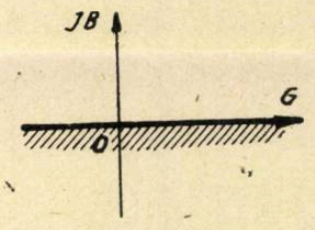
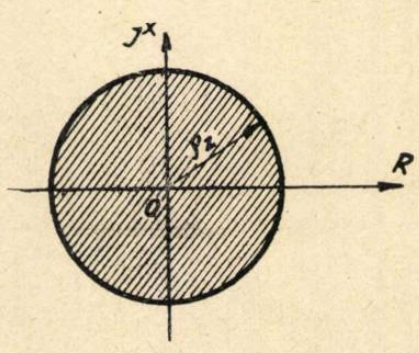
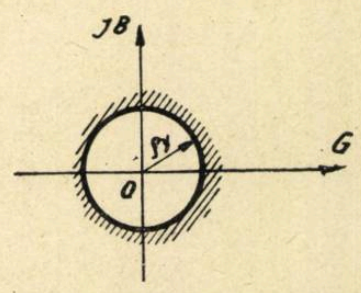
On propose une nomenclature devant apporter des clarifications et éliminér les confusions possibles en ce qui concerne les problèmes des protections de distance.

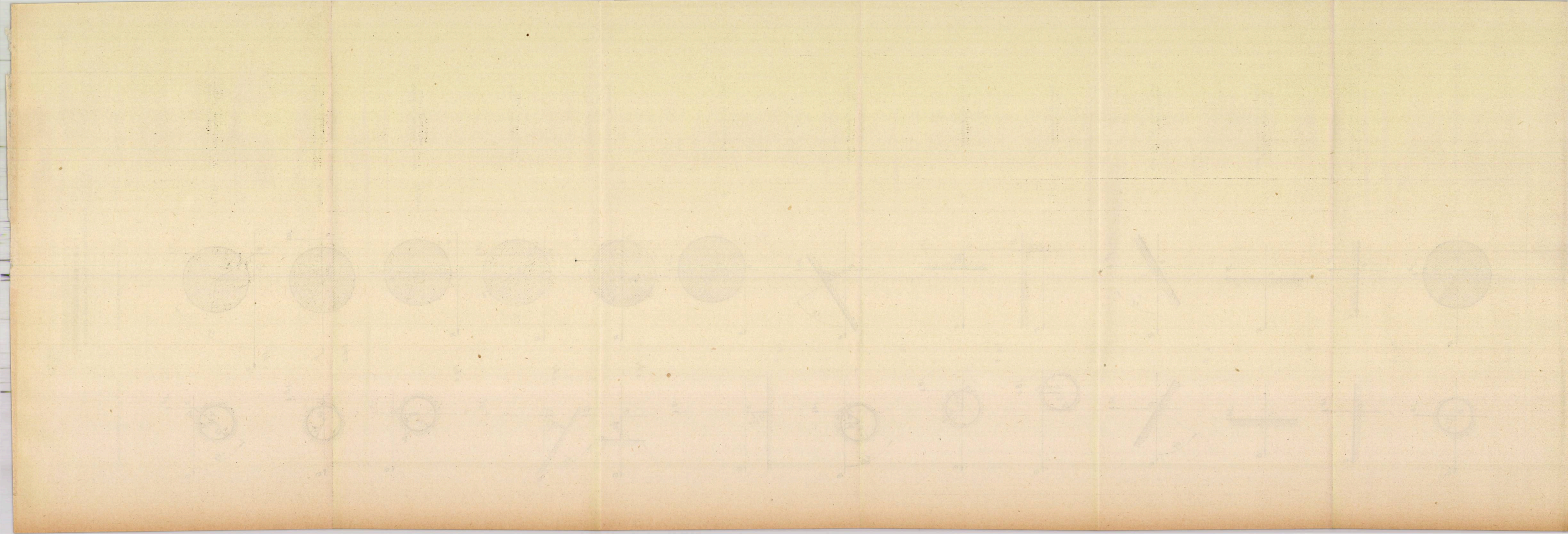
EIN EINHEITLICHES DARSTELLUNGSVERFAHREN DER DISTANZ — UND RICHTUNGSRELAIS

(Zusammenfassung)

Es sind Verfahren zur einheitlichen Auffassung der in der komplexen Darstellung der Impedanz oder Admittanz über lineäre oder kreisförmige charakteristik verfügenden Relais erörtert. Dabei wird von den allgemein Impedanz (Admittanz) Relais ausgegangen und nachgewiesen, dass sämtliche Distanz oder Richtungsrelais als aus diesen entwickelt betrachtet werden können. Die Untersuchung wurde sowohl an der Gleichung vorgenommen, die dem Gleichgewichtzustand entspricht, als auch an der Gleichung der sich ergebenden Drehmomente. Es wird eine Begriffbestimmung vorgeschlagen, geeignet zur Klärung der Frage des Distanz schutzes beizutragen und Missverständnissen vorzubeugen.

TABLEAU No. 1
classification des types de relais analysés

No.	Type du relais	Symbole	Caractéristique du relais	
			Dans le plan complexe d'impédance Z	Dans le plan complexe d'admittance Y
1	2	3	4	5
1	Relais d'impédance (d'admittance) généralisée	$Zg(Yg)$	 Fig 1	
2	Relais de résistance (conductance) généralisée	$Rg(Gg)$	 Fig. 2	
3	Relais de réactance (susceptance) généralisée	$Xg(Bg)$		 Fig. 3
4	Relais d'amittance mixte (Mho)	Ym		 Fig. 4
5	Relais de conductance	G		Fig. 5
6	Relais de susceptance	B		 Fig. 6.
7	Relais d'impédance mixte (Ohm)	Zm		 Fig. 7.
8	Relais de résistance	R		 Fig. 8.
9	Relais de réactance	X		 Fig. 9.
10	Relais directionel (de puissance mixte)	Sm		 Fig. 10.
11	Relais directionnel de puissance active (Wattmétrique)	P		 Fig. 11.
12	Relais directionnel de puissance réactive (Varmétrique)	Q		 Fig. 12.
13	Relais d'impédance (admittance)	$Z(Y)$		 Fig. 13.



BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

ELECTRONICĂ

LINIA DE ÎNTÎRZIERE ȘI FORMARE CU PARAMETRI VARIABILI

I. TEODORESCU

Multe scheme electronice, folosite în telecomunicații, și mai ales în aparatura experimentală de fizică nucleară, conțin linii de transmisie (coaxiale, spirale sau artificiale) ca elemente de întîrziere sau de formare a impulsurilor.

În primul caz, linia adaptată se introduce între cele două secțiuni I și II ale lanțului de transmisie, între care este cerută întîrzierea semnalului. Timpul de întîrziere este determinat de lungimea liniei. Dacă este necesară realizarea unor timpuri de întîrziere diferite, se practică deobicei schimbarea liniei (înlocuirea unei linii cu alta de lungime diferită) sau se culege semnalul dintr-un punct intermediar la o distanță l_1 (fig. 1). Întîrzierea este :

$$\theta = T_0 l_1 \tag{1}$$

în care T_0 e întîrzierea specifică.

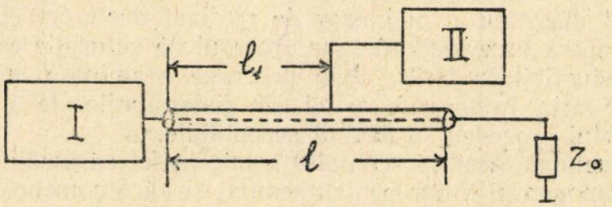


Fig. 1.

În al doilea caz, impulsul e format prin reflexie la capătul în gol sau în scurt circuit al liniei și durata impulsului e determinată de asemeni de lungimea liniei (fig. 2). Durata impulsului format e dată de

$$\tau = 2 T_0 l \tag{2}$$

În toate cazurile, întîrzierea pe unitatea de lungime T_0, e dată, la linia omogenă fără pierderi, de

$$T_0 = \frac{10}{3}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \ldots (ns/m) \tag{3}$$

în care ε_γ și μ_γ sînt permitivitatea și permeabilitatea relativă ale mediului ce umple spațiul dintre conductorii liniei.

Impedanța caracteristică, în aceleași condiții, este

$$Z_0 = Z_{0\,aer} \sqrt{\frac{\mu_\gamma}{\varepsilon_\gamma}} \ \ldots \ (\Omega) \tag{4}$$

Examinăm cazul în care constantele mediului de propagare pot fi făcute funcții de timp, ceea ce ne va permite să realizăm un timp de propagare reglabil pe linie.

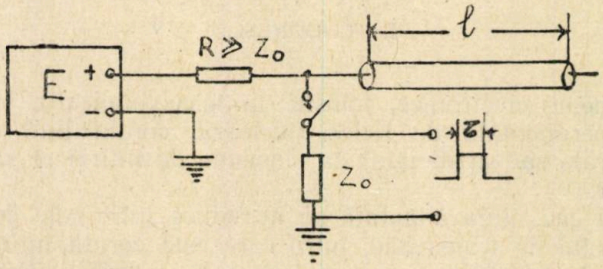


Fig. 2

Practic, aceasta se realizează prin construirea unei linii în care mediul de propagare este un material cu proprietăți feromagnetice, cu pierderi mici, de exemplu ferită.

Varierea constantelor μ_γ sau ε_γ se poate face prin aplicarea unui cîmp electric sau magnetic omogen în tot volumul care interesează, cu variație lentă în timp și pentru care nu se manifestă fenomene de propagare. Cîmpul magnetic e mai ușor de realizat decît cel electric, printr-o bobină ce acoperă întreaga linie, iar procesul de saturație este mai evident și mai reproductibil la ferite. Prin procedee examinate anterior, [1], se poate reduce aria hysteresis, astfel că distorsiunile de tipul hysteresis, specifice acestui procedeu să devină acceptabile.

Vom presupune deci că semnalul e mic astfel că mediul de propagare se prezintă omogen și liniar pentru semnal și că fenomenele tranzitorii de magnetizare pot fi neglijate în primă aproximație.

Atunci, dacă punem

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{ri}[1 + f_1(t)] \tag{5}$$

$$\mu_r = \mu_{ri}[1 + f_2(t)] \tag{6}$$

cu f_1 respectiv f_2 mult mai mici decît unitatea, atunci

$$T_0 \cong T_{0i}\left(1 + \frac{f_1 + f_2}{2}\right) \tag{7}$$

și

$$Z_0 \cong Z_{0i}\left(1 + \frac{f_1 - f_2}{2}\right) \tag{8}$$

Pentru $f_1 = f_2 = f$, avem

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= T_{0i}(1+f) \\ Z_0 &= Z_{0i} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

deci se obține o variație liniară cu timpul a lui T_0, iar impedanța caracteristică rămîne constantă și linia poate fi utilizată în mod direct la formarea

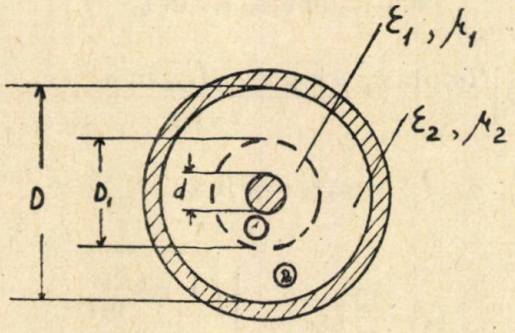


Fig. 3.

impulsurilor sau la întîrzierea lor. Acest caz însă nu corespunde materialelor existente, la care pote fi reglată, fie numai permeabilitatea, prin aplicarea unui cîmp de magnetizare, fie numai permitivitatea, prin aplicarea unui cîmp de polarizare.

Dacă linia este realizată cu două medii 1 și 2, separate printr-o suprafață concentrică cu suprafețele conductorilor (fig. 3), schema echivalentă pentru unitatea de lungime a unei astfel de linii, considerată fără pierderi, poate fi reprezentată ca în fig. 4.

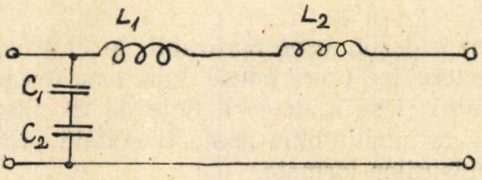


Fig. 4.

L_1 și C_1 corespund cîmpurilor existente în mediul 1, iar L_2 și C_2 corespund cîmpurilor ce iau naștere în mediul 2. [2].

Dacă se notează

$$\delta_1 = \frac{D_1}{d}\ ; \qquad \delta_2 = \frac{D}{D_1}$$

și respectiv

$$L_0 = L_1 + L_2$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

se obține

$$T_0 = \frac{10}{3} \sqrt{\frac{\mu_{r1} \ln \delta_1 + \mu_{r2} \ln \delta_2}{\varepsilon_{r2} \ln \delta_1 + \varepsilon_{r1} \ln \delta_2} \cdot \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}} \tag{10}$$

și

$$Z_0 = 60 \sqrt{\frac{(\mu_{r1} \ln \delta_1 + \mu_{r2} \ln \delta^2)(\varepsilon_{r2} \ln \delta_1 + \varepsilon_{r1} \ln \delta_2)}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}}} \tag{11}$$

Punem

$$\mu_1 \delta_2 = k \ln \delta_1$$

se obține

$$T_0 = \frac{10}{3} \sqrt{\mu_u \varepsilon_{r1}} \cdot \sqrt{\frac{1 + k \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}}{1 + k \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}} \tag{12}$$

$$Z_0 = 60 (\ln \delta_1) \cdot \sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}}} \cdot \sqrt{\left(1 + k \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}\right)\left(1 + k \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\right)} \tag{13}$$

Din examinarea acestei dependențe se vede că nu poate fi găsită o configurație simplă care să dea variația liniară a lui T în raport cu una din mărimile μ_{r1}, μ_{r2}, ε_{r1}, ε_{r2} și cu atît mai puțin să asigure independența lui Z_0 față de aceeași mărime. Se poate verifica ușor că derivata lui Z_0 în raport cu oricare din cele 4 mărimi amintite, nu se anulează niciodată în cazurile interesante în practică, deoarece toate mărimile ce intervin, sînt pozitive.

Mai interesant e cazul, ușor realizabil, în care se acceptă o variație a impedanței caracteristice (care aduce după sine o variație a amplitudinii impulsurilor formate) și se realizează linia cu un singur mediu, de pildă cu ferită. Variația de amplitudine poate fi evitată printr-o limitare corespunzătoare a impulsurilor formate.

În acest caz, avem $\varepsilon_r = ct$ și

$$T_0 = k_1 \sqrt{\mu_r}$$

$$Z_0 = k_2 \sqrt{\mu_r}$$

Permeabilitatea feritelor, variază de obicei, după o lege ce poate fi aproximată printr-o relație de forma

$$\mu_r = 1 + (\mu_M - 1) e^{-(aH)^2} \tag{15}$$

De cele mai multe ori $\mu_M \gg 1$ și în zona de lucru $\mu_r \gg 1$ așa că

$$T_0 = A_1 e^{-(\alpha H)^2} \tag{16}$$

$$Z_0 = A_2 e^{-(\alpha H)^2} \tag{17}$$

Dacă punctul mediu de funcționare corespunde pantei maxime, adică pentru

$$H_0 = \frac{1}{a} \tag{18}$$

această pantă are valoarea

$$T'_{0M} = -0{,}86\,\alpha A_1$$

Sensibilitatea maximă, corespunzătoare acestui punct, este dată de

$$T = \frac{\frac{\Delta T_0}{T_0}}{\frac{\Delta H}{H_0}} = 1 \tag{20}$$

La variații mari ale lui H, sensibilitatea scade sensibil.

Dacă sistemul se folosește pentru modularea în durată a impulsurilor, relația (20) arată că gradul de modulație al lui H, se reproduce în T_0.

Distorsiunea neliniară poate fi evaluată prin relația

$$\delta = \frac{\frac{1}{6}(\Delta H)^2 T^{IV}_{0M}}{T'_{0M}} = \frac{2}{3}(\Delta H)^2 \alpha^2 \tag{21}$$

Verificări experimentale

Au fost confecționate două linii coaxiale și una spirală, cu care au fost efectuate măsurători asupra duratei și formei impulsurilor și asupra posibilităților de reglaj a duratei.

1. *Linia coaxială cu ferită compactă*

Conductorul interior este realizat din sîrmă de cupru cu $d = 1{,}4$ mm, pe care au fost înșirate 10 bastoane perforate axial din ferită de tip HFK, lungi de 50 mm și cu diametrul exterior de 7,5 mm. Întreg ansamblul a fost îmbrăcat cu o foaie de cupru, obținîndu-se o linie de 0,5 m lungime. S-au măsurat durata impulsului format, durata fronturilor și impedanța caracteristică, și s-au obținut următoarele valori: $T_0 = 0{,}3$ μs/m, $T_f = 0{,}085$ μs și $Z_0 = 360$ Ω. De aici rezultă că parametrii feritei folosite sînt: $\mu_r = 360$ și $\varepsilon_r = 28$.

2. *Linia coaxială cu ferită pulverizată*

Conductorul interior e din sîrmă de cupru cu $d=1{,}5$ mm, iar cel exterior un tub de cupru cu $D=13$ mm. Intervalul a fost umplut cu ferită de înaltă frecvență de tip oxifer, măcinată pînă la granule mai mici de 10 μ. La o lungime a liniei $l=0{,}6$ m, se obține un impuls de 0,12 μs deci $T_0=0{,}1$ μs/m și $Z_0=140$ Ω. La exterior s-a bobinat înfășurarea de magnetizare. Cu cca 25 AS/cm durata impulsului se reduce la jumătate.

3. *Linia spirală*

În scopul creșterii mai departe a lui T_0, a fost realizată o linie spirală, la care atît spațiul din interiorul spiralei cît și cel dintre spirală și cilin-

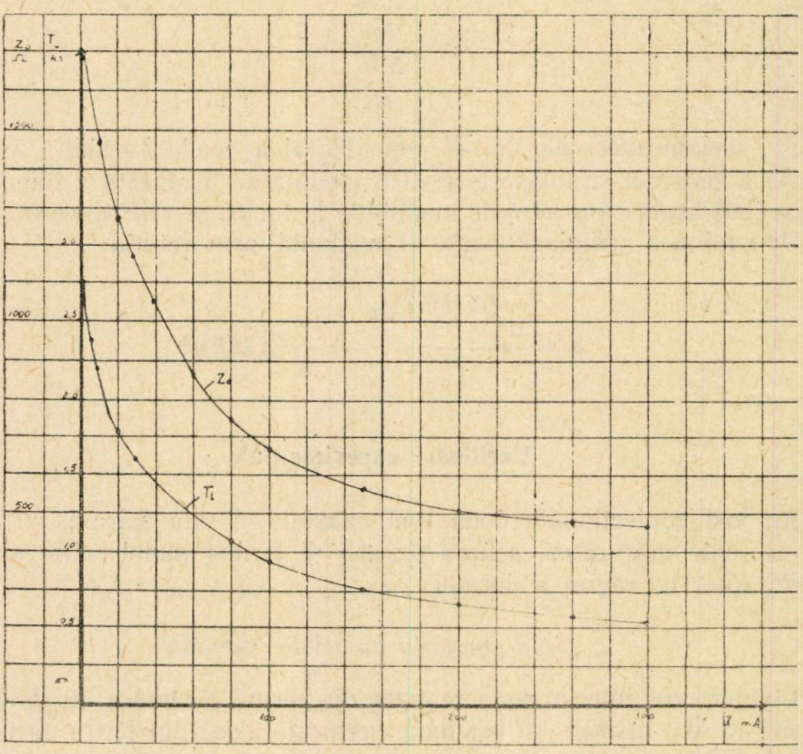


Fig. 5.

drul exterior, au fost umplute cu ferită măcinată. (fig. 5). Circuitul magnetic al bobinei de magnetizare este închis printr-un cilindru exterior, realizîndu-se în acest fel o reducere considerabilă a puterii consumate în

circuitul de comandă. Linia astfel realizată, are o lungime de 15 cm, formează impulsuri cu durata de 2,8 μs, și are o impedanță de 1670 Ω. Variația duratei impulsului și a impedanței în funcție de curentul de magnetizare, este arătată în fig. 6.

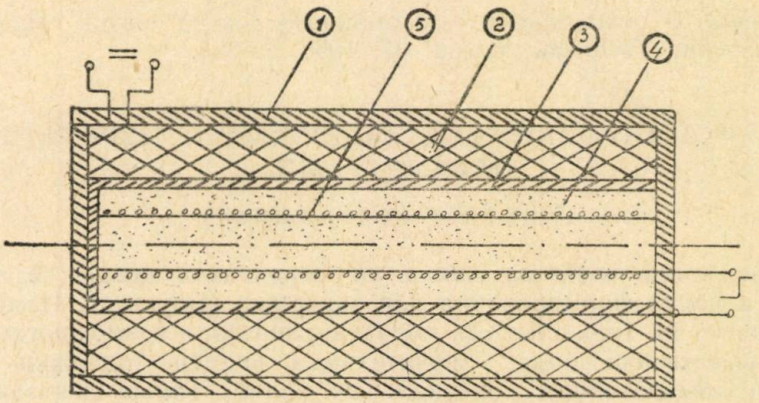


Fig. 6.

Concluzii.

Experiențele efectuate au arătat că folosirea liniilor de întîrziere și formare cu ferită deschide perspective interesante sub două aspecte:

a) Permite reducerea cu cîteva ordine de mărime a lungimii liniei față de cablul coaxial obișnuit.

b) Permite controlul simplu, pe cale electrică, fără comutări sau elemente mobile, a duratei impulsului sau a timpului de întîrziere.

Frontul impulsurilor formate este în general bun. Măsurătorile de front efectuate nu au fost suficient de concludente, deoarece nu am dispus decît de un generator cu front de 0,075 μs. Frontul posterior este mai lung, ceea ce se poate explica prin vîscozitatea magnetică a materialului, care nu permite schimbarea bruscă a stării magnetice a feritei.

Linia poate fi executată și sub formă de cablu flexibil, la care, între conductorul interior și cel exterior sînt introduse inele de ferită, ce au și rolul de a menține distanța dintre conductori. O soluție posibilă pentru realizarea de cable flexibile, o constituie înglobarea feritei sub formă de pulbere, într-un suport flexibil din material plastic.

Parametrii obținuți la liniile experimentale executate, dau temei să se afirme că prin perfecționarea tehnologiei de fabricație, acest tip de linie de întîrziere va putea înlocui cablul de polietilenă, în toate cazurile în care se cer întîrzieri mari și o bandă de frecvență largă.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Teodorescu, I.:* Modulator de frecvență cu ferită. Buletinul I.P.B., Tom XXII, 1960, Fasc. 1, 151.

[2] *Raisbeck, G.:* Attennation in continuously loaded coaxial cables. Bell System Technical Journal 37, 1958, 2, 361.

ЛИНИЯ ФОРМИРОВАНИЯ И ЗАДЕРЖКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

(Краткое содержание)

Исследованы свойства линии на ферритах с целью её использования в цепях формирования или задержки импульсов. Измерения, выполненные на трёх опытных образцах, показали возможность получения существенно более значительных времен задержки чем с помощью обыкновенных коаксиальных линий. Также доказана возможность регулирования длительности импульса или величины задержки путём наложения внешнего магнитного поля.

В работе указаны конструктивные возможности осуществления, на этом принципе, гибких коаксиальных кабелей.

PULSE — FORMING AND TIME DELAY LINE WITH VARIABLE PARAMETERS

(Summary)

The properties of the transmission line with ferrite, used in pulse forming or time delay networks are discussed. Measurements made on three experimental lines, show that it is possible to obtain larger delay times than from the conventional polythene coaxial cables. It is also possible to control the pulse — length, by an external magnetic field.

Some proposals are made for manufacturing flexible coaxial cables of this kind.

LIGNE À RETARD AVEC DES PARAMÈTRES VARIABLES

(Résumé)

On a étudié les proprietés de la ligne de transmission a férrite, comme circuit électrique pour former ou retarder les impulsions. Les essais portés sur trois exemplaires expérimentaux, ont confirmé qu'il est possible d'obtenir des temps de retard sensible plus grands par rapport aux cables coaxiaux a

polieth ylène. En même temps, il y a la possibilité de régler la durée de l'impulsion formée, ou du temps de retard, par la supperposition d'un champ magnétique éxterieur.

On indique des solutions constructives pour la fabrication — sur ce principe — des cables coaxiaux flexibles.

PULSFORMENDE UND VERZÖGERUNGSLEITUNG MIT REGELBAREN KONSTANTEN

(Zusammenfassung)

Es werden die Eigenschaften der Leitung mit Ferrit, als Impulsformender Kreis, oder als Verzögerungskreis untersucht. Die an drei experimentellen Exemplaren durchgeführten Messungen, bestätigen die Möglichkeit viel grössere Verzögerungszeiten als bei den gewöhnlichen Koaxialleitungen zu erhalten, wie auch die Möglichkeit die Impulsdauer oder die Verzögerungszeit durch Anlegung eines äusseren Magnetfeldes zu regeln.

Es werden gleichzeitig Bauangaben fär die Ausführung von Flexiblen Koaxialkabeln gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIV — 1962, Fascicola 4

ПРИМЕЧАНИЕ

Теорема 7 из статьи *„О применении одного обобщения ареолярных производных к преобразованиям некоторых систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных“*, Н. Т. Стельмашука, опубликована в Бюлетене Бухарестского Политехнического Института XXIV том 2 выпус.к 1962 г. просьбе исправляемся по автора, следующим образом.

Теорема 7. Пусть для данных функций p, q, f, Θ, Ψ и для данного круга Γ имеем

$$|\tilde{f}|, |\tilde{\Psi}|, |\tilde{\Theta}| < \alpha \quad \text{(для всяких пар точек круга } \Gamma\text{)}$$

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| < \alpha; \qquad \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| < \alpha,$$

где α — некоторая постоянная Тогда для всякой точки B круга Γ получим

$$|R^n f| < \alpha\,(\alpha^2 \cdot S)^{2n}; \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

где S — расстояние между точками A (центр круга Γ) и взятой точкой B

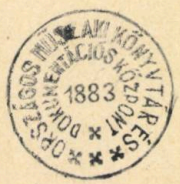
Доказательство сразу следует из определения операторов

$$R^n f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следствие. Из доказанной теоремы, очевидно, получим, что найдётся такой круг, концентрический с кругом Γ и достаточно малого радиуса, в котором абсолютно и равномерно сходится ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n f \tag{a}$$

Замечание. Во всём дальнейшем мы будем обозначать буквой Γ указанный круг, в котором абсолютно и равномерно сходится ряд (a).



INTREPRINDEREA
POLIGRAFICĂ Nr. 6
Str. Alex. Odobescu, 12
B U C U R E Ş T I
c. 131

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițiale de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.